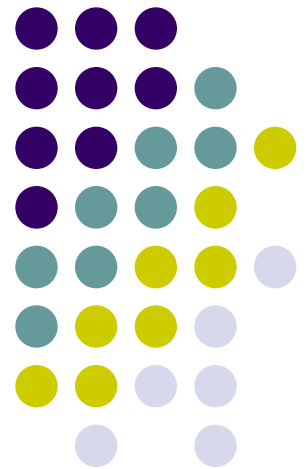


# 第8章 相量法

## ● 重点：

1. 复数的运算
2. 正弦量的表示、相位差
3. 正弦量的相量表示
4. 电路定律的相量形式



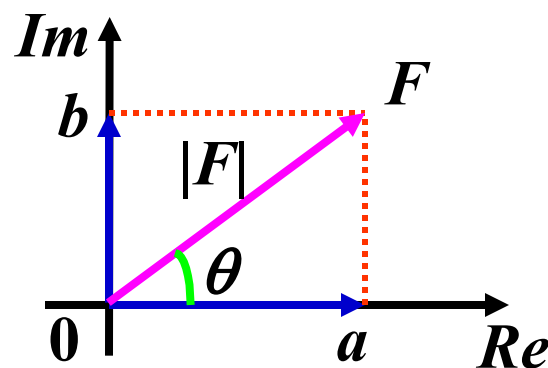
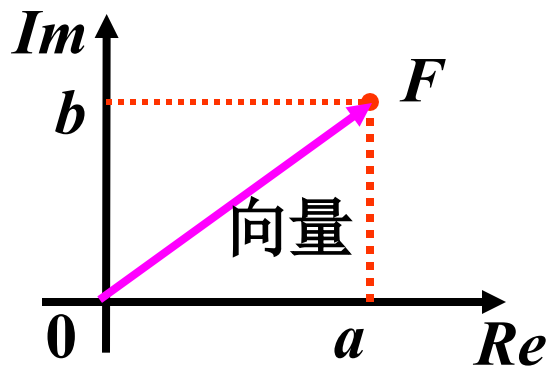
# 8.1 复数



## 1. 复数的表示形式

$$F = a + jb$$

( $j = \sqrt{-1}$  为虚单位)



①代数形式

$$\mathbf{F} = a + jb$$

②三角形式

$$\mathbf{F} = |\mathbf{F}| (\cos \theta + j \sin \theta)$$

③指数形式

$$\mathbf{F} = |\mathbf{F}| e^{j\theta}$$

④极坐标形式

$$\mathbf{F} = |\mathbf{F}| \angle \theta$$

## 两种表示法的关系

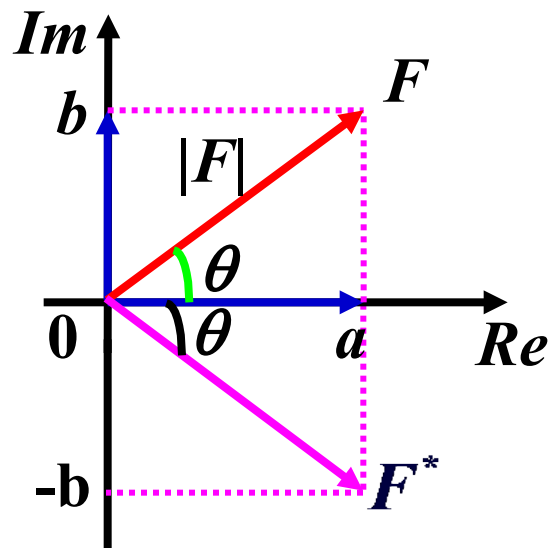
$$\mathbf{F} = a + jb$$

$$\mathbf{F} = |\mathbf{F}| \angle \theta$$

$$\begin{cases} |\mathbf{F}| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \theta = \arctg \frac{b}{a} \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} a = |\mathbf{F}| \cos \theta \\ b = |\mathbf{F}| \sin \theta \end{cases}$$



## 几个常用概念

$$\text{Re}[\mathbf{F}] = a \quad \text{Im}[\mathbf{F}] = b$$

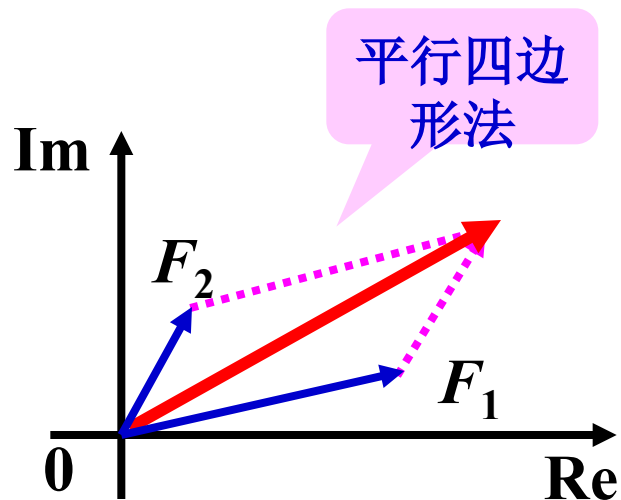
$$\mathbf{F}^* = a - jb = |\mathbf{F}| \angle -\theta$$

## 2. 复数运算

① 加减运算——必须采用代数形式

$$\text{若 } F_1 = a_1 + jb_1, \quad F_2 = a_2 + jb_2$$

$$\text{则 } F_1 + F_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$$





## ② 乘除运算——宜采用极坐标形式

$$\mathbf{F}_1 = |\mathbf{F}_1| \angle \theta_1 \quad \mathbf{F}_2 = |\mathbf{F}_2| \angle \theta_2$$

$$\text{则: } \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2 = |\mathbf{F}_1| e^{j\theta_1} \cdot |\mathbf{F}_2| e^{j\theta_2} = |\mathbf{F}_1| |\mathbf{F}_2| e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$= |\mathbf{F}_1| |\mathbf{F}_2| \angle \theta_1 + \theta_2 \quad \text{乘法: 模相乘, 角相加}$$

$$\frac{\mathbf{F}_1}{\mathbf{F}_2} = \frac{|\mathbf{F}_1| e^{j\theta_1}}{|\mathbf{F}_2| e^{j\theta_2}} = \frac{|\mathbf{F}_1|}{|\mathbf{F}_2|} e^{j(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{|\mathbf{F}_1|}{|\mathbf{F}_2|} \angle \theta_1 - \theta_2$$

除法: 模相除, 角相减

例1.  $5 \angle 47^\circ + 10 \angle -25^\circ = ?$

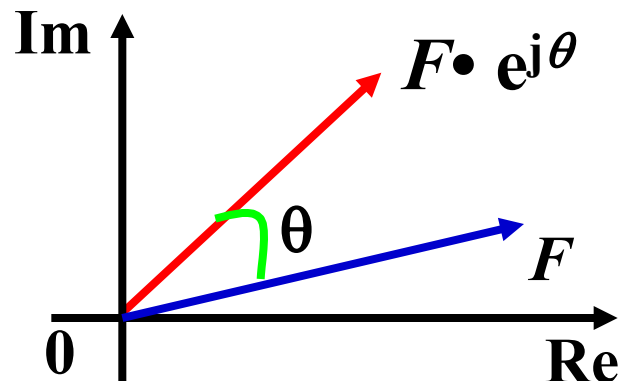
解  $= (3.41 + j3.657) + (9.063 - j4.226)$

$$= 12.47 - j0.569 = 12.48 \angle -2.61^\circ$$

### ③ 旋转因子

复数  $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta = 1 \angle \theta$

$F \cdot e^{j\theta}$  相当于  $F$  逆时针旋转一个角度  $\theta$ ，而模不变。故把  $e^{j\theta}$  称为旋转因子。

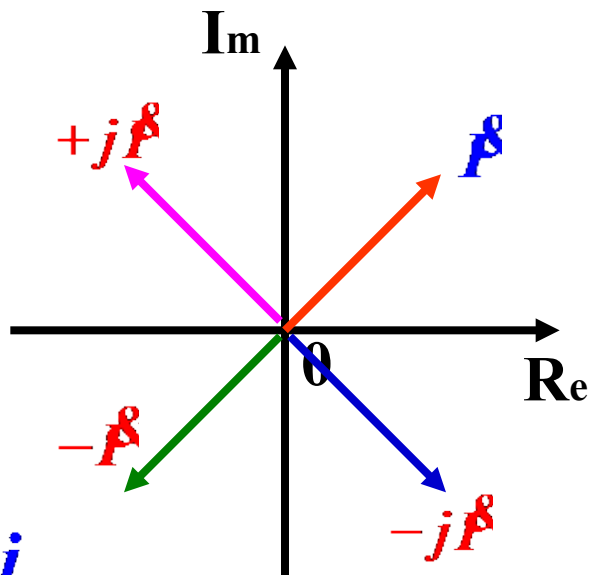


#### 几种不同 $\theta$ 值时的旋转因子

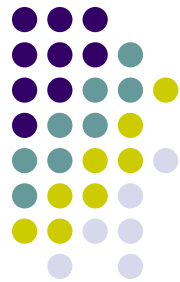
$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2} = +j$$

$$\theta = -\frac{\pi}{2} \quad e^{j-\frac{\pi}{2}} = \cos(-\frac{\pi}{2}) + j\sin(-\frac{\pi}{2}) = -j$$

$$\theta = \pm\pi \quad e^{j\pm\pi} = \cos(\pm\pi) + j\sin(\pm\pi) = -1$$



## 8.2 正弦量

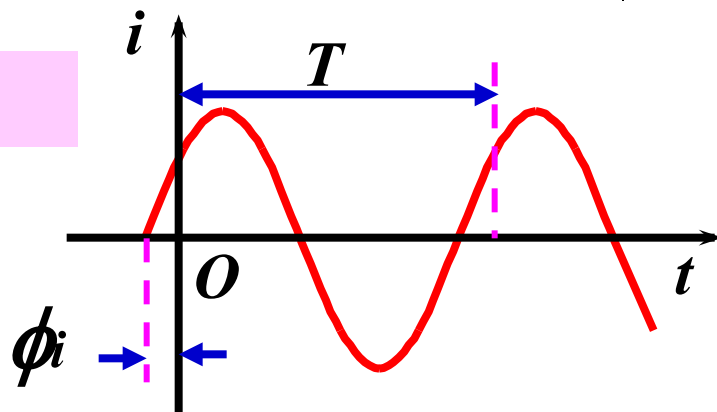


### 1. 正弦量 电路中按正弦规律变化的电压或电流

瞬时值表达式:

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi_i)$$

波形:



周期  $T$  (*period*) 和频率  $f$  (*frequency*):

$$f = \frac{1}{T}$$

周期  $T$ : 重复变化一次所需的时间。单位: s, 秒

频率  $f$ : 每秒重复变化的次数。单位: Hz, 赫兹

## 2. 正弦量的三要素

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi_i)$$



### (1) 幅值 (amplitude) (振幅、最大值) $I_m$

→ 反映正弦量变化幅度的大小。 峰峰值 =  $2I_m$

### (2) 角频率 (angular frequency) $\omega$

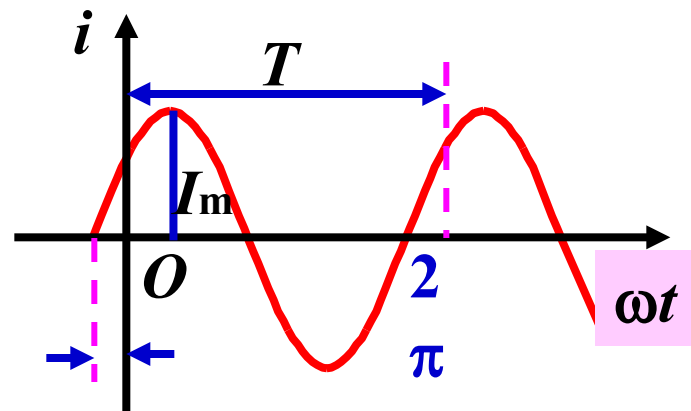
→ 相位随时间变化的角速度。 相位:  $\omega t + \phi_i$

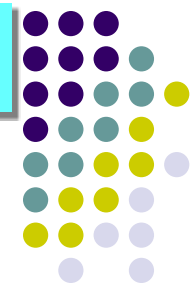
$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad \text{单位: rad/s, 弧度/秒}$$

### (3) 初相位 (initial phase angle)

→  $\phi_i$   $t=0$ 时的相位,

$$|\phi_i| \leq 180^\circ$$





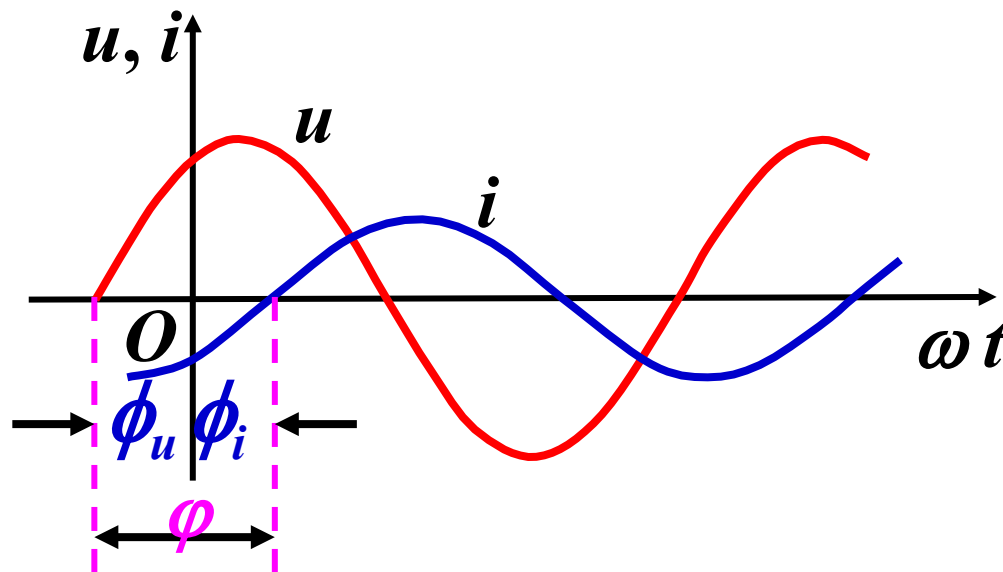
### 3. 同频率正弦量的相位差 (phase difference)

设  $u(t)=U_m \cos(\omega t+\phi_u)$ ,  $i(t)=I_m \cos(\omega t+\phi_i)$

则 相位差:  $\varphi = (\omega t+\phi_u) - (\omega t+\phi_i) = \phi_u - \phi_i$

等于初相位之差 规定:  $|\varphi| \leq \pi$

- $\varphi > 0$ ,  $u$  超前  $i$ , 或  $i$  落后  $u$ ,  $u$  比  $i$  先到达最大值。



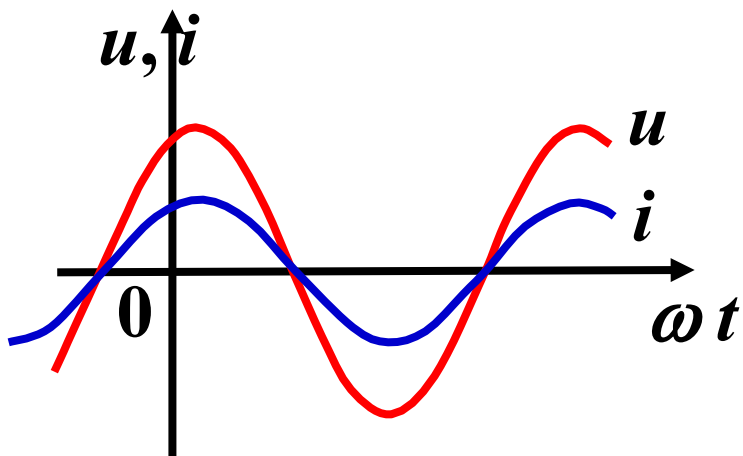
- $\varphi < 0$ ,  $i$  超前  $u$ , 或  $u$  滞后  $i$ ,  $i$  比  $u$  先到达最大值。



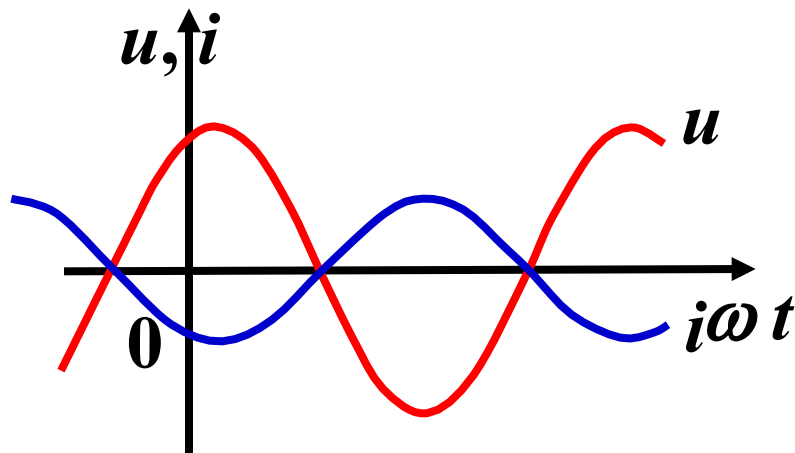
# 特殊相位关系:



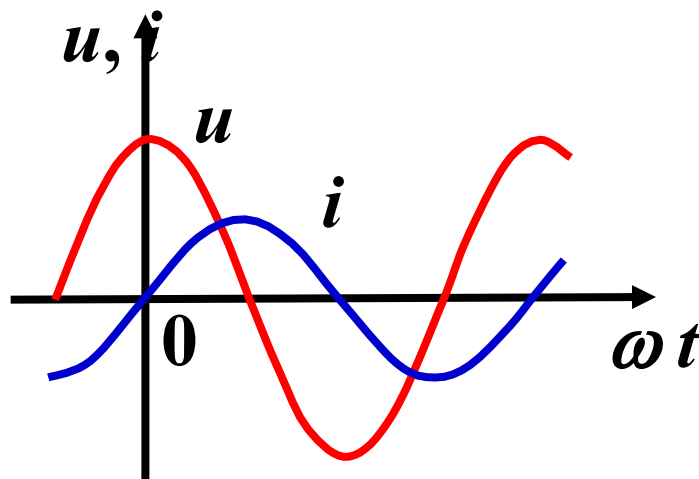
①  $\varphi = 0$ , 同相



②  $\varphi = \pm\pi$  ( $\pm 180^\circ$ ), 反相

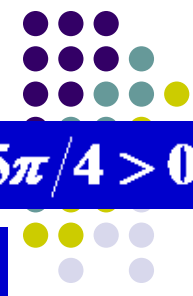


③  $\varphi = \pm\pi/2$ , 正交



同样可比较两个电压或两个电流的相位差。

例 计算下列两正弦量的相位差。



(1)  $i_1(t) = 10 \cos(100\pi t + 3\pi/4)$   
 $i_2(t) = 10 \cos(100\pi t - \pi/2)$

$\varphi = 3\pi/4 - (-\pi/2) = 5\pi/4 > 0$   
 $\varphi = 2\pi - 5\pi/4 = 3\pi/4$

(2)  $i_1(t) = 10 \cos(100\pi t + 30^\circ)$   
 $i_2(t) = 10 \sin(100\pi t - 15^\circ)$

$i_2(t) = 10 \cos(100\pi t - 105^\circ)$   
 $\varphi = 30^\circ - (-105^\circ) = 135^\circ$

(3)  $u_1(t) = 10 \cos(100\pi t + 30^\circ)$   
 $u_2(t) = 10 \cos(200\pi t + 45^\circ)$

$\omega_1 \neq \omega_2$

不能比较相位差

(4)  $i_1(t) = 5 \cos(100\pi t - 30^\circ)$   
 $i_2(t) = -3 \cos(100\pi t + 30^\circ)$

$i_2(t) = 3 \cos(100\pi t - 150^\circ)$   
 $\varphi = -30^\circ - (-150^\circ) = 120^\circ$

两个正弦量进行相位比较时应满足同频率、同函数、同符号，且在主值范围比较。

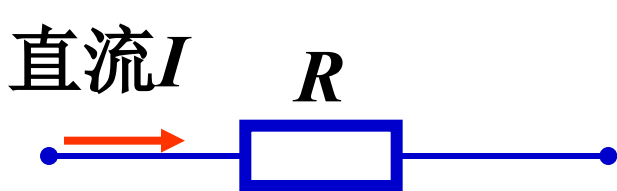
## 4. 周期性电流、电压的有效值



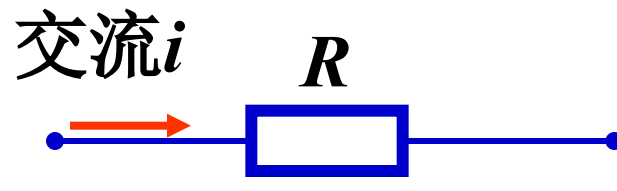
周期性电流、电压的瞬时值随时间而变，为了衡量其平均效果工程上采用有效值来表示。

### ● 周期电流、电压有效值(*effective value*)定义

物理意义



$$W = RI^2T$$



$$W = \int_0^T Ri^2(t)dt$$

电流有效值定义为

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t)dt}$$

有效值也称均方根值  
(*root-mean-square*)

同样，可定义电压有效值：

$$U \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}$$



● 正弦电流、电压的有效值

设  $i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t + \phi) dt}$$

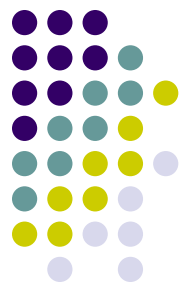
$$\int_0^T \frac{1 + \cos 2(\omega t + \phi)}{2} dt = \frac{1}{2} t \Big|_0^T = \frac{1}{2} T$$

$$\therefore I = \sqrt{\frac{1}{T} I_m^2 \cdot \frac{T}{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0.707 I_m \rightarrow I_m = \sqrt{2} I$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi) = \sqrt{2} I \cos(\omega t + \phi)$$

同理，可得正弦电压有效值与最大值的关系：

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} U_m \quad \text{或} \quad U_m = \sqrt{2} U$$



若一交流电压有效值为 $U=220\text{V}$ ，则其最大值为 $U_m \approx 311\text{V}$ ；

**注** (1) 工程上说的正弦电压、电流一般指有效值，如设备铭牌额定值、电网的电压等级等。

但绝缘水平、耐压值也的具是十倍。因此在考虑  
电器设备的耐压

(2) 测量中，交流一般为有效值。

*i*, *I<sub>m</sub>*, *I*

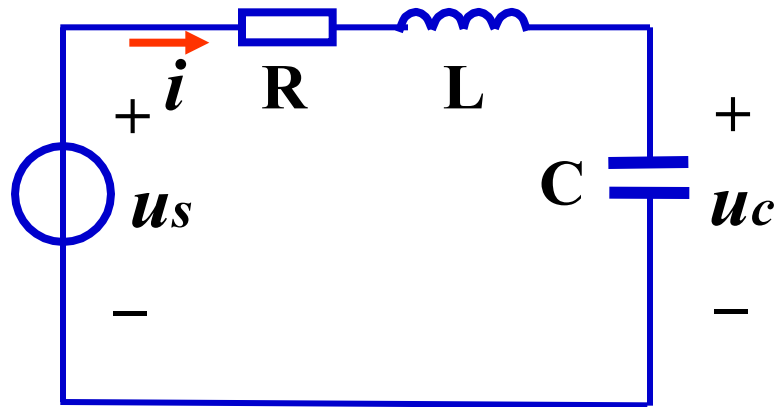
(3) 区分电压、电流的瞬时值、最大值、有效值的符号。

## 8.3 相量法的基础

### 1. 问题的提出:

电路方程是微分方程:

$$LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c = u_s$$



当  $u_s$  为正弦量时, 如何避免繁琐的求解过程?

### 思路一: 稳态响应

非齐次线性微分方程  $u_c = \underline{\text{特解}} + \text{通解}$

**注意!**

$t \rightarrow \infty$ ,  
通解  $\rightarrow 0$

与激励形式相同

直流: 直流

正弦量: 同频率正弦量

线性非时变电路中, 若激励是正弦量, 则电路中各支路的  $u$  和  $i$  的 **稳态响应** 是 **同频率的正弦量**。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/067200126153006104>