2024年高考数学模拟试卷

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号和座位号填写在试题卷和答题卡上。用2B铅笔将试卷类型（B）填涂在答题卡相应位置上。将条形码粘贴在答题卡右上角"条形码粘贴处"。

2．作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试题卷上。

3．非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。

4．考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知等比数列$\{a_n\}$满足$a_1=3$，$a_1+a_3+a_5=21$，则$a_3+a_5+a_7=$（　　）

A． 21　　　　**B．** 42　　　　**C．** 63　　　　**D．** 84

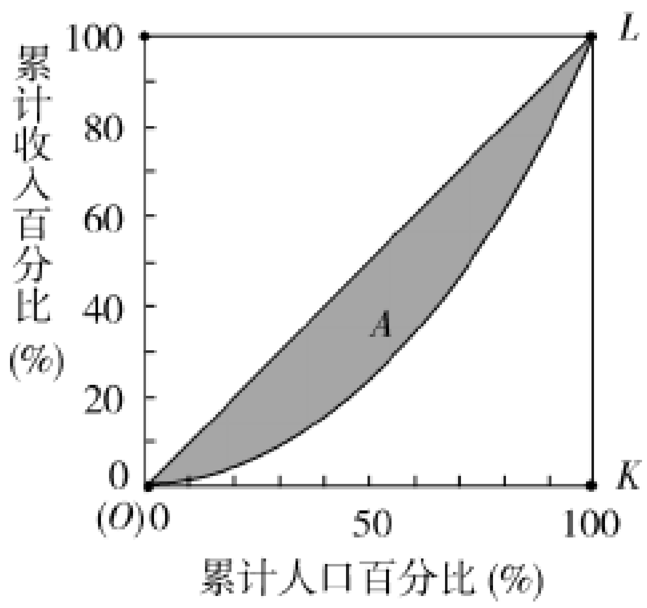
2．已知A类产品共两件A_1,A_2，B类产品共三件B_1,B_2,B_3，混放在一起，现需要通过检测将其区分开来，每次随机检测一件产品，检测后不放回，直到检测出**2**件A类产品或者检测出**3**件B类产品时，检测结束，则第一次检测出B类产品，第二次检测出A类产品的概率为（　　）

A． $\dfrac{1}{2}$　　　　**B．** $\dfrac{3}{5}$　　　　**C．** $\dfrac{2}{5}$　　　　**D．** $\dfrac{3}{10}$

3．已知函数$f(x)=e^{x-1}+x-2$的零点为m，若存在实数n使$x^2-ax-a+3=0$且$|m-n|\le 1$，则实数a的取值范围是（　　）

A． $[2,4]$　　　　**B．** $\left[2,\dfrac{7}{3}\right]$　　　　**C．** $\left[\dfrac{7}{3},3\right]$　　　　**D．** $[2,3]$

4．为了研究国民收入在国民之间的分配，避免贫富过分悬殊，美国统计学家劳伦茨提出了著名的劳伦茨曲线，如图所示.劳伦茨曲线为直线OL时，表示收入完全平等.劳伦茨曲线为折线OKL时，表示收入完全不平等.记区域A为不平等区域，a表示其面积，S为$\triangle OKL$的面积，将$\text{Gini}=\dfrac{a}{S}$称为基尼系数.



对于下列说法：

①Gini 越小，则国民分配越公平；

②设劳伦茨曲线对应的函数为 $y=f(x)$，则对 $\forall x\in(0,1)$，均有 $\frac{f(x)}{x}>1$；

③若某国家某年的劳伦茨曲线近似为 $y=x^2(x\in[0,1])$，则 $\text{Gini}=\frac{1}{4}$；

④若某国家某年的劳伦茨曲线近似为 $y=x^3(x\in[0,1])$，则 $\text{Gini}=\frac{1}{2}$.

其中正确的是：

A．①④　　B．②③　　C．①③④　　D．①②④

5．已知函数 $f(x)=\ln x$，$g(x)=(2m+3)x+n$，若 $\forall x\in(0,+\infty)$ 总有 $f(x)\le g(x)$ 恒成立.记 $(2m+3)n$ 的最小值为 $F(m,n)$，则 $F(m,n)$ 的最大值为（　　）

A．1　　B．$\frac{1}{e}$　　C．$\frac{1}{e^2}$　　D．$\frac{1}{e^3}$

6．已知复数 z 满足 $z(1+i)=1-i$（i 为虚数单位），则 z 的虚部为（　　）

A．$-i$　　B．i　　C．1　　D．-1

7．命题“$\forall x\in(0,1), e^{-x}>\ln x$”的否定是（　　）

A．$\forall x\in(0,1), e^{-x}\le\ln x$　　B．$\exists x_0\in(0,1), e^{-x_0}>\ln x_0$

C．$\exists x_0\in(0,1), e^{-x_0}<\ln x_0$　　D．$\exists x_0\in(0,1), e^{-x_0}\le\ln x_0$

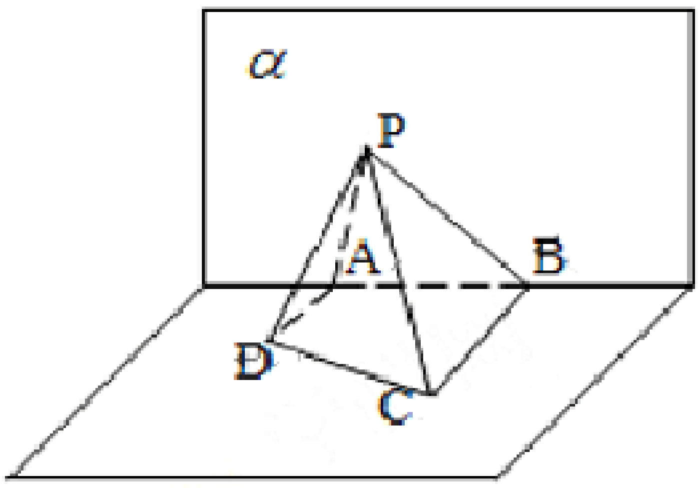
8．某医院拟派 2 名内科医生、3 名外科医生和 3 名护士共 8 人组成两个医疗分队，平均分到甲、乙两个村进行义务巡诊，其中每个分队都必须有内科医生、外科医生和护士，则不同的分配方案有

A．72 种　　B．36 种　　C．24 种　　D．18 种

9．设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_3=2$，$a_1+a_4=5$，则 $S_6=$（　　）

A．10　　B．9　　C．8　　D．7

10．如图，已知平面 $\alpha\perp\beta$，$\alpha\cap\beta=l$，A、B 是直线 l 上的两点，C、D 是平面 β 内的两点，且 $DA\perp l$，$CB\perp l$，$AD=3$，$AB=6$，$CB=6$．P 是平面 α 上的一动点，且直线 PD，PC 与平面 α 所成角相等，则二面角 $P-BC-D$ 的余弦值的最小值是（　）



A．$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　　　B．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　　　C．$\dfrac{1}{2}$　　　　D．1

11．甲、乙两名学生的六次数学测验成绩(百分制)的茎叶图如图所示.

甲		乙
	6	9
6 2	7	8
6 2 0	8	7 8
0	9	2 6

①甲同学成绩的中位数大于乙同学成绩的中位数；

②甲同学的平均分比乙同学的平均分高；

③甲同学的平均分比乙同学的平均分低；

④甲同学成绩的方差小于乙同学成绩的方差.

以上说法正确的是（　　）

A．③④　　　　B．①②　　　　C．②④　　　　D．①③④

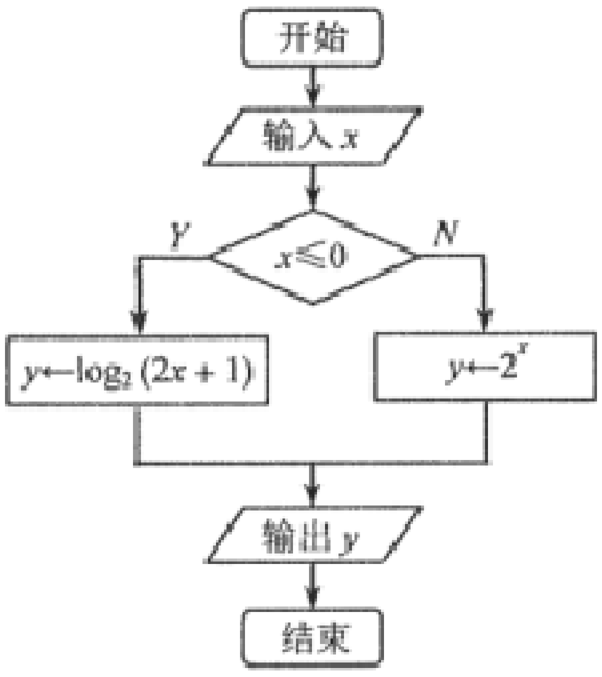
12．已知$m\in\mathbf{R}$，复数$z_1=1+3i$，$z_2=m+2i$，且$z_1\cdot\overline{z}_2$为实数，则$m=$（　　）

A．$-\dfrac{2}{3}$　　　　B．$\dfrac{2}{3}$　　　　C．3　　　　D．-3

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．函数$f\left(x\right)=e^{x}-e^{1-x}-b\left|2x-1\right|$在$\left(0,1\right)$内有两个零点，则实数$b$的取值范围是________.

14．如图是一个算法流程图，若输出的实数y的值为-1，则输入的实数x的值为______________.



15．已知 x，$y>0$，且 $\frac{8}{x^2}+\frac{1}{y}=1$，则 $x+y$ 的最小值为_____.

16．一个村子里一共有 n 个人，其中一个人是谣言制造者，他编造了一条谣言并告诉了另一个人，这个人又把谣言告诉了第三个人，如此等等．在每一次谣言传播时，谣言的接受者都是在其余 $n-1$ 个村民中随机挑选的，当谣言传播 $k(k\geqslant 2)$ 次之后，还没有回到最初的造谣者的概率是_______.

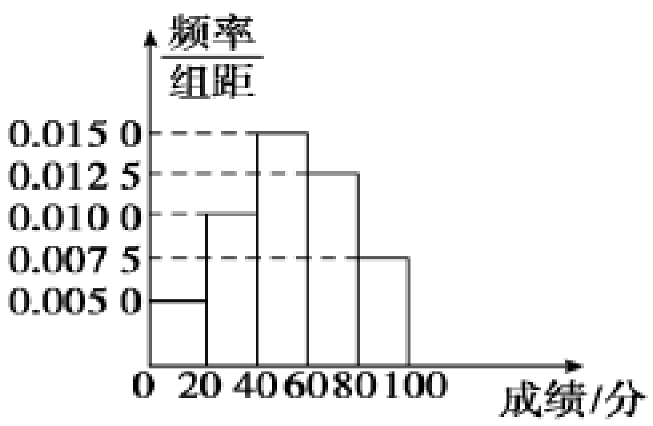
三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）已知函数 $f\left(x\right)=\ln\left(x+1\right)-ax+1-a\left(a\in R\right)$.

（**1**）若 $f\left(x\right)\le 0$ 对任意 $x>-1$ 恒成立，求实数 a 的取值范围；

（**2**）求证： $-\ln\left(x+1\right)+xe^{x-1}-x+1\ge 0$

18．（12 分）某中学准备组建"文科"兴趣特长社团，由课外活动小组对高一学生文科、理科进行了问卷调查，问卷共 **100** 道题，每题 **1** 分，总分 **100** 分，该课外活动小组随机抽取了 **200** 名学生的问卷成绩（单位：分）进行统计，将数据按照 $\left[0,20\right)$，$\left[20,40\right)$，$\left[40,60\right)$，$\left[60,80\right)$，$\left[80,100\right]$ 分成 **5** 组，绘制的频率分布直方图如图所示，若将不低于 **60** 分的称为"文科方向"学生，低于 **60** 分的称为"理科方向"学生.



	理科方向	文科方向	总计
男			**110**
女		**50**	
总计			

（**1**）根据已知条件完成下面 2×2 列联表，并据此判断是否有 **99%** 的把握认为是否为"文科方向"与性别有关？

（**2**）将频率视为概率，现在从该校高一学生中用随机抽样的方法每次抽取 **1** 人，共抽取 **3** 次，记被抽取的 **3** 人中"文

科方向”的人数为ξ，若每次抽取的结果是相互独立的，求ξ的分布列、期望$E(\xi)$和方差$D(\xi)$.

参考公式：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中$n=a+b+c+d$.

参考临界值：

$P(K^2\ge k_0)$	**0.10**	**0.05**	**0.025**	**0.010**	**0.005**	**0.001**
k_0	**2.706**	**3.841**	**5.024**	**6.635**	**7.879**	**10.828**

19.（12 分）在△**ABC** 中，a、b、c 分别为三个内角 **A**、**B**、**C** 的对边，且$b^2-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}bc\sin A+c^2=a^2$.

(1)求角 **A**；

(2)若$4\sin B\sin C=3$,且$a=2$,求△ **ABC** 的面积.

20.（12 分）在直角坐标系xQy中，曲线C_1的参数方程为$\begin{cases}x=2+2\cos\alpha\\ y=4+2\sin\alpha\end{cases}$，（$\alpha$为参数），以坐标原点为极点，$x$轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线$C_2$的极坐标方程为$\rho=4\sin\theta$.

(1)把C_1的参数方程化为极坐标方程：

(2)求C_1与C_2交点的极坐标$(\rho\ge 0,0\le\theta<2\pi)$.

21.（12 分）已知函数$f(x)=\dfrac{1}{2}ax^2+(1-a)x-\ln x,a\in R$.

（**1**）讨论$f(x)$的单调性；

（**2**）若$a\in(-\infty,1)$，设$g(x)=xe^x-x-\ln x+a$，证明：$\forall x_1\in(0,2]$，$\exists x_2\in(0,+\infty)$，使$f(x_1)-g(x_2)>2-\ln 2$.

22.（10 分）已知函数$\mathrm{f}(\mathrm{x})=|\mathrm{x}-\mathrm{a}|+|\mathrm{x}+2|$.

(1)当　$=1$时，求不等式$\mathrm{f}(\mathrm{x})\le 3$的解集；

$(2)\exists \mathrm{x}_0\in\mathrm{R}$，$\mathrm{f}(\mathrm{x}_0)\le 3$，求 **a** 的取值范围.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、**B**

【解析】

由 $\mathbf{a_1+a_3+a_5=21}$ 得 $a_1(1+q^2+q^4)=21 \therefore 1+q^2+q^4=7 \therefore q^2=2 \therefore$ $\mathbf{a_3+a_5+a_7=}q^2(a_1+a_3+a_5)=2\times21=42$，选 **B.**

2、**D**

【解析】

根据分步计数原理，由古典概型概率公式可得第一次检测出 B 类产品的概率，不放回情况下第二次检测出 A 类产品的概率，即可得解.

【详解】

A 类产品共两件 A_1,A_2，B 类产品共三件 B_1,B_2,B_3，

则第一次检测出 B 类产品的概率为 $\dfrac{3}{5}$；

不放回情况下，剩余 **4** 件产品，则第二次检测出 A 类产品的概率为 $\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$；

故第一次检测出 B 类产品，第二次检测出 A 类产品的概率为 $\dfrac{3}{5}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{10}$；

故选：**D.**

【点睛】

本题考查了分步乘法计数原理的应用，古典概型概率计算公式的应用，属于基础题.

3、**D**

【解析】

易知 $f(x)$ 单调递增,由 $f(1)=0$ 可得唯一零点 $m=1$,通过已知可求得 $0\le n\le 2$,则问题转化为使方程

$x^2-ax-a+3=0$ 在区间 $\left[0,2\right]$ 上有解,化简可得 $a=x+1+\dfrac{4}{x+1}-2$,借助对号函数即可解得实数 $\boldsymbol{a}$ 的取值范围.

【详解】

易知函数 $f(x)=e^{x-1}+x-2$ 单调递增且有惟一的零点为 $m=1$，所以 $|1-n|\le 1$，$\therefore 0\le n\le 2$，问题转化为：使方程

$x^2-ax-a+3=0$ 在区间 $\left[0,2\right]$ 上有解，即 $a=\dfrac{x^2+3}{x+1}=\dfrac{(x+1)^2-2(x+1)+4}{x+1}=x+1+\dfrac{4}{x+1}-2$

在区间 $\left[0,2\right]$ 上有解，而根据“对勾函数”可知函数 $y=x+1+\dfrac{4}{x+1}-2$ 在区间 $\left[0,2\right]$ 的值域为 $[2,3]$，$\therefore 2\le a\le 3$.

故选 **D.**

【点睛】

本题考查了函数的零点问题,考查了方程有解问题,分离参数法及构造函数法的应用,考查了利用“对勾函数”求参数取值范围问题,难度较难.

4、**A**

【解析】

对于①，根据基尼系数公式 $\text{Gini}=\dfrac{a}{S}$，可得基尼系数越小，不平等区域的面积 a 越小，国民分配越公平，所以①正确.对于②，根据劳伦茨曲线为一条凹向横轴的曲线，由图得 $\forall x\in(0,1)$，均有 $f(x)<x$，可得 $\dfrac{f(x)}{x}<1$，所以②错误.对于③，因为 $a=\int_0^1(x-x^2)\mathrm{d}x=(\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{3}x^3)|_0^1=\dfrac{1}{6}$，所以 $\text{Gini}=\dfrac{a}{S}=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{3}$，所以③错误.对于④，因为 $a=\int_0^1(x-x^3)\mathrm{d}x=(\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{4}x^4)|_0^1=\dfrac{1}{4}$，所以 $\text{Gini}=\dfrac{a}{S}=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$，所以④正确.故选 **A**.

5、**C**

【解析】

根据 $\forall x\in(0,+\infty)$ 总有 $f(x)\le g(x)$ 恒成立可构造函数 $h(x)=\ln x-(2m+3)x-n$,求导后分情况讨论 $h(x)$ 的最大值可得最大值最大值 $h\left(\dfrac{1}{2m+3}\right)=-\ln(2m+3)-1-n$,

即 $-\ln(2m+3)-1-n\le 0$.根据题意化简可得 $(2m+3)n\ge(2m+3)[-\ln(2m+3)-1]$,求得 $F(m,n)=(2m+3)[-\ln(2m+3)-1]$,再换元求导分析最大值即可.

【详解】

由题，$\forall x\in(0,+\infty)$ 总有 $\ln x\le(2m+3)x+n$ 即 $\ln x-(2m+3)x-n\le 0$ 恒成立.

设 $h(x)=\ln x-(2m+3)x-n$,则 $h(x)$ 的最大值小于等于 **0**.

又 $h'(x)=\dfrac{1}{x}-(2m+3)$,

若 $2m+3\le 0$ 则 $h'(x)>0$,$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$h(x)$ 无最大值.

若 $2m+3>0$,则当 $x>\dfrac{1}{2m+3}$ 时,$h'(x)<0$,$h(x)$ 在 $\left(\dfrac{1}{2m+3},+\infty\right)$ 上单调递减,

当 $0<x<\dfrac{1}{2m+3}$ 时,$h'(x)>0$,$h(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{2m+3}\right)$ 上单调递增.

故在 $x=\frac{1}{2m+3}$ 处 $h(x)$ 取得最大值 $h\left(\frac{1}{2m+3}\right)=\ln\frac{1}{2m+3}-1-n=-\ln(2m+3)-1-n$.

故 $-\ln(2m+3)-1-n\le 0$,化简得 $(2m+3)n\ge(2m+3)\left[-\ln(2m+3)-1\right]$.

故 $F(m,n)=(2m+3)\left[-\ln(2m+3)-1\right]$,令 $t=2m+3,(t>0)$,可令 $k(t)=-t(\ln t+1)$,

故 $k'(t)=-\ln t-2$,当 $t>\frac{1}{e^2}$ 时，$k'(t)<0$,$k(t)$ 在 $\left(\frac{1}{e^2},+\infty\right)$ 递减；

当 $0<t<\frac{1}{e^2}$ 时，$k'(t)>0$,$k(t)$ 在 $\left(0,\frac{1}{e^2}\right)$ 递增.

故在 $t=\frac{1}{e^2}$ 处 $h(t)$ 取得极大值,为 $k\left(\frac{1}{e^2}\right)=-\frac{1}{e^2}\left(\ln\frac{1}{e^2}+1\right)=\frac{1}{e^2}$.

故 $F(m,n)$ 的最大值为 $\frac{1}{e^2}$.

故选：**C**

【点睛】

本题主要考查了根据导数求解函数的最值问题,需要根据题意分析导数中参数的范围,再分析函数的最值,进而求导构造函数求解 $(2m+3)n$ 的最大值.属于难题.

6、**D**

【解析】

根据复数 z 满足 $z(1+i)=1-i$，利用复数的除法求得 z，再根据复数的概念求解.

【详解】

因为复数 z 满足 $z(1+i)=1-i$,

所以 $z=\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=-i$,

所以 z 的虚部为 -1.

故选：**D.**

【点睛】

本题主要考查复数的概念及运算，还考查了运算求解的能力，属于基础题.

7、**D**

【解析】

根据全称命题的否定是特称命题,对命题进行改写即可.

【详解】

全称命题的否定是特称命题，所以命题“$\forall x\in(0,1)$, $e^{-x}>\ln x$”的否定是：$\exists x_0\in(0,1)$， $e^{-x_0}\leqslant\ln x_0$.

故选 **D**.

【点睛】

本题考查全称命题的否定,难度容易.

8、**B**

【解析】

根据条件 **2** 名内科医生，每个村一名，**3** 名外科医生和 **3** 名护士，平均分成两组，则分 **1** 名外科，**2** 名护士和 **2** 名外科医生和 **1** 名护士，根据排列组合进行计算即可.

【详解】

2 名内科医生，每个村一名，有 **2** 种方法，

3 名外科医生和 **3** 名护士，平均分成两组，要求外科医生和护士都有，则分 **1** 名外科，**2** 名护士和 **2** 名外科医生和 **1** 名护士，

若甲村有 **1** 外科,**2** 名护士,则有$C_3^1C_3^2=3\times3=9$，其余的分到乙村，

若甲村有 **2** 外科,**1** 名护士,则有$C_3^2C_3^1=3\times3=9$，其余的分到乙村，

则总共的分配方案为 **2×(9+9)=2×18=36** 种，

故选：**B.**

【点睛】

本题主要考查了分组分配问题，解决这类问题的关键是先分组再分配，属于常考题型.

9、**B**

【解析】

根据题意 $a_3=a_1+2d=2,\ a_1+a_4=2a_1+3d=5$，解得 $a_1=4$， $d=-1$，得到答案.

【详解】

$a_3=a_1+2d=2,\ a_1+a_4=2a_1+3d=5$，解得 $a_1=4$， $d=-1$，故 $S_6=6a_1+15d=9$.

故选：B .

【点睛】

本题考查了等差数列的求和，意在考查学生的计算能力.

10、**B**

【解析】

$\angle PBA$ 为所求的二面角的平面角，由$\triangle DAP \sim \triangle CPB$ 得出 $\frac{PA}{PB}$，求出 P 在 α 内的轨迹，根据轨迹的特点求出 $\angle PBA$ 的最大值对应的余弦值

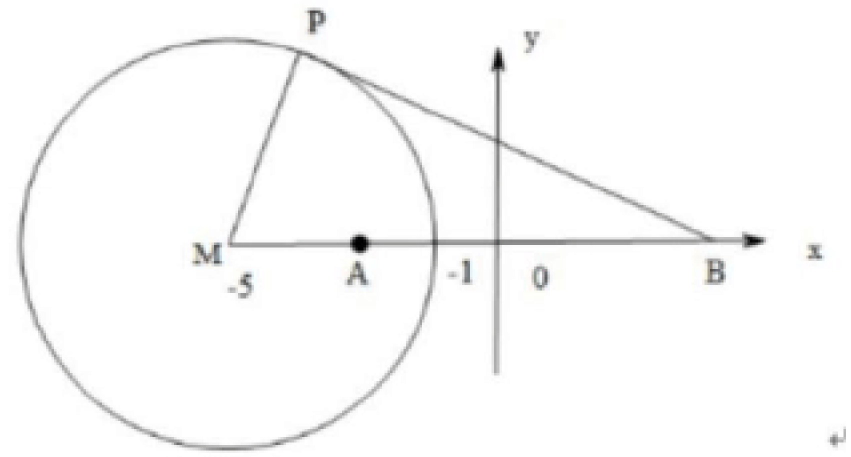
【详解】

$\because DA \perp l$，$\alpha \perp \beta$，$\alpha \cap \beta = l$，$AD \subset \beta$

$\therefore AD \perp \alpha$，同理 $BC \perp \alpha$

$\therefore \angle DPA$ 为直线 PD 与平面 α 所成的角，$\angle CPB$ 为直线 PC 与平面 α 所成的角

$\therefore \angle DPA = \angle CPB$，又 $\angle DAP = \angle CBP = 90^\circ$



$\therefore \triangle DAP \sim \triangle CPB$，$\frac{PA}{PB} = \frac{DA}{BC} = \frac{1}{2}$

在平面 α 内，以 AB 为 x 轴，以 AB 的中垂线为 y 轴建立平面直角坐标系

则 $A(-3,0)$，$B(3,0)$，设 $P(x，y)(y>0)$

$\therefore 2\sqrt{(x+3)^2+y^2} = \sqrt{(x-3)^2+y^2}$，整理可得：$(x+5)^2+y^2=16$

$\therefore P$ 在 α 内的轨迹为 $M(-5,0)$为圆心，以 4 为半径的上半圆

$\because$ 平面 $PBC \cap$ 平面 $\beta = BC$，$PB \perp BC$，$AB \perp BC$

$\therefore \angle PBA$ 为二面角 $P-BC-D$ 的平面角，

$\therefore$ 当 PB 与圆相切时，$\angle PBA$ 最大，$\cos\angle PBA$ 取得最小值

此时 $PM=4$，$MB=8$，$MP \perp PB$，$PB=4\sqrt{3}$

$$\cos\angle PBA = \frac{PB}{MB} = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

故选 B

【点睛】

本题主要考查了二面角的平面角及其求法，方法有：定义法、三垂线定理及其逆定理、找公垂面法、射影公式、向量法等，依据题目选择方法求出结果.