第二节　二项式定理

目录

C O N T E N T S

PART 1

知识 体系构建

二项式定理

- 有关概念

二项式定理	$(a+b)^n=$ ________ $(n\in\mathbf{N}^*)$
二项展开式的通项	$T_{k+1}=C_n^k a^{n-k}b^k$，它表示展开式的第____项
二项式系数	____ $(k=0,1,\cdots,n)$

- 二项式系数的性质

(1)对称性：与首末两端“等距离”的两个二项式系数____；

(2)增减性与最大值：①当$k<\frac{n+1}{2}$时，二项式系数是递增的；②当$k>\frac{n+1}{2}$时，二项式系数是递减的；③当n是偶数时，中间的一项$C_n^{\frac{n}{2}}$取得最大值；④当n是奇数时，中间的两项$C_n^{\frac{n-1}{2}}$与$C_n^{\frac{n+1}{2}}$相等，且同时取得最大值

对点自测

1. $(1+x)^{10}$的展开式中x^2的系数为（　　）

A. 1　　B. 10

C. 45　　D. 120

解析：（$1+x$）^{10}的展开式的通项公式为$T_{r+1}=C_{10}^{r}x^{r}$，令$r=2$得x^2的系数为$C_{10}^{2}=45$，故选C.

2. （2022·北京高考8题）若 $(2x-1)^4=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，则 $a_0+a_2+a_4=$（　　）

A. 40

B. 41

C. －40

D. －41

解析： **法一**（赋值法） 依题意，令$x=1$，可得$1=a_4+a_3+a_2+a_1+a_0$，令$x=-1$，可得$81=a_4-a_3+a_2-a_1+a_0$，以上两式相加可得$82=2(a_4+a_2+a_0)$，所以$a_0+a_2+a_4=41$，故选B.

法二（通项公式法） 二项式$(2x-1)^4$的通项为$T_{r+1}=C_4^r(2x)^{4-r}(-1)^r$，分别令$r=4$，2，0，可分别得$a_0=1$，$a_2=24$，$a_4=16$，所以$a_0+a_2+a_4=41$，故选B.

3. (2024·宜宾模拟)在二项式$\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^n$的展开式中，二项式系数的和是32，则展开式中各项系数的和为(　　)

A. -32　　B. -1

C. 1　　D. 32

解析：∵二项式系数的和是32，则$2^n=32$，∴$n=5$，令$x=1$，则展开式中各项系数的和为$(-1)^5=-1$，故选B.

4. $\left(\frac{1}{x}-\sqrt{x}\right)^9$的展开式中常数项为___84___.（用数字作答）

解析：根据通项公式$T_{k+1}=C_9^k\left(\frac{1}{x}\right)^{9-k}(-\sqrt{x})^k=(-1)^k C_9^k x^{\frac{3k-18}{2}}$，令$\frac{3k-18}{2}=0$，解得$k=6$，所以$T_7=(-1)^6 C_9^6=84$.

常用结论

1. 若二项展开式的通项为 $T_{r+1}=g(r)\cdot x^{h(r)}$（$r=0,1,2,\cdots,n$），$g(r)\neq 0$，则：

（1）$h(r)=0\Leftrightarrow T_{r+1}$是常数项；

（2）$h(r)$是非负整数$\Leftrightarrow T_{r+1}$是整式项；

（3）$h(r)$是负整数$\Leftrightarrow T_{r+1}$是分式项；

（4）$h(r)$是整数$\Leftrightarrow T_{r+1}$是有理项.

2. 常用公式

（1）$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$；

（2）$C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots=C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots=2^{n-1}$.

应用

1. 二项式$(\sqrt{3}x+\sqrt[3]{2})^n$（$n\in\mathbf{N}^*$）的展开式中只有一项的系数为有理数，则$n$的可能取值为（　　）

A. 6　　B. 7

C. 8　　D. 9

解析：$T_{r+1}=C_n^r\cdot 3^{\frac{n-r}{2}}\cdot 2^{\frac{r}{3}}\cdot x^{n-r}$，由结论1可知：$n-r$是2的倍数，$r$是3的倍数，$n=7$，$r=3$符合题意，故选B.

2. 已知$C_n^0+2C_n^1+2^2C_n^2+2^3C_n^3+\cdots+2^nC_n^n=243$，则$C_n^1+C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n=$ 31 .

解析：逆用二项式定理得$C_n^0+2C_n^1+2^2C_n^2+2^3C_n^3+\cdots+2^nC_n^n=(1+2)^n=243$，$3^n=3^5$，所以$n=5$，由结论2得，$C_n^1+C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n=2^5-1=31$.

考点 分类突破

精选考点 典例研析 技法重悟通

PART

2

考点一 二项式中的特定项及系数问题

（基础自学过关）

1. $\left(2x-\frac{1}{x}\right)^5$的展开式中$x$的系数是（　　）

A. -40　　B. 40

C. -80　　D. 80

解析：$\left(2x-\frac{1}{x}\right)^5$展开式的通项公式为$T_{r+1}=C_5^r(2x)^{5-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r=(-1)^r2^{5-r}C_5^rx^{5-2r}$（$r=0$，1，…，5），令$5-2r=1$，可得$r=2$.即含$x$的项为第3项，$\therefore T_3=80x$，故$x$的系数为80.故选D.

2. $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{30}$的展开式中无理项的项数为（　　）

A. 27　　B. 24

C. 26　　D. 25

解析：$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{30}$展开式的通项为$T_{r+1}=C_{30}^{r}\cdot(\sqrt{x})^{30-r}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{r}=C_{30}^{r}\cdot x^{15-\frac{5}{6}r}$，$r=0$，1，2，…，30，若$x$的指数$15-\frac{5}{6}r$为整数，则$r$是6的倍数，所以当$r=0$，6，12，18，24，30时为有理项，共6项，故无理项的项数为$31-6=25$．故选D．

3. $\left(x^2+\frac{2}{x}\right)^6$的展开式中常数项是$\underline{\quad 240 \quad}$（用数字作答）.

解析：（$x^2+\frac{2}{x}$）^{6}展开式的通项$T_{r+1}=C_6^r(x^2)^{6-r}\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^r=C_6^r 2^r x^{12-3r}$，令$12-3r=0$，解得$r=4$，所以常数项为$C_6^4 2^4=240$.

练后悟通

求二项展开式中特定项的策略

求二项展开式的特定项问题，实质是考查通项 $T_{k+1}=C_n^k a^{n-k}b^k$ 的特点，一般需要建立方程求 k，再将 k 的值代回通项求解，注意 k 的取值范围（$k=0$，1，2，…，n）.

提醒 两类系数的区别：二项式系数是指 C_n^0，C_n^1，…，C_n^n，它只与各项的项数有关，而与 a，b 的值无关；项的系数是指该项中除变量外的常数部分，与各项的项数有关，也与 a，b 的值有关.

考点二　二项式系数的性质与各项系数的和

（定向精析突破）

考向1　二项展开式中的系数和问题

【例1】　（1）（2024·惠州一模）已知 $(2x-1)^5=a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，则 $|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_5|=$（　　）

A. 1　　　　B. 243

C. 121　　　　D. 122

解析：令$x=1$，得$a_5+a_4+a_3+a_2+a_1+a_0=1$，①.

令$x=-1$，得$-a_5+a_4-a_3+a_2-a_1+a_0=-243$，②.

①+②，得$2(a_4+a_2+a_0)=-242$，即$a_4+a_2+a_0=-121$.

①-②，得$2(a_5+a_3+a_1)=244$，即$a_5+a_3+a_1=122$.所以$|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_5|=122+121=243$.

（2）在（$2x-3y$）^{10}的展开式中，奇数项系数的和为$\underline{\quad\frac{1+5^{10}}{2}\quad}$.

解析：设（$2x-3y$）$^{10}=a_0x^{10}+a_1x^9y+a_2x^8y^2+\cdots+a_{10}y^{10}$，令$x=y=1$，得$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}=1$，①.令$x=1$，$y=-1$得$a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_{10}=5^{10}$，②.①+②得2（$a_0+a_2+\cdots+a_{10}$）$=1+5^{10}$，所以奇数项的系数和为$\frac{1+5^{10}}{2}$.

解题技法

赋值法的应用

（1）对形如$(ax+b)^n$，$(ax^2+bx+c)^m$（a，b，$c\in\mathrm{R}$，m，$n\in\mathrm{N}^*$）的式子求其展开式的各项系数之和，只需令$x=1$即可；

（2）对形如（$ax+by$）^{n}（a，$b\in\mathbf{R}$，$n\in\mathbf{N}^{*}$）的式子求其展开式各项系数之和，只需令$x=y=1$即可；

（3）一般地，若f（x）$=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，则$f$（$x$）展开式中各项系数之和为$f$（1），奇数项系数之和为$a_0+a_2+a_4+\cdots=\frac{f(1)+f(-1)}{2}$，偶数项系数之和为$a_1+a_3+a_5+\cdots=\frac{f(1)-f(-1)}{2}$.

考向2　系数的最值问题

【例2】　在 $\left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{n}$ 的展开式中，只有第5项的二项式系数最大，则展开式中系数最小的项的系数为（　　）

A. -126　　B. -70

C. -56　　D. -28

解析： ∵只有第5项的二项式系数最大，∴$n=8$，$\left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$的展开式的通项为$T_{k+1}=(-1)^k C_8^k x^{8-\frac{3}{2}k}$（$k=0$，1，2，…，8），

∴展开式中奇数项的二项式系数与相应奇数项的系数相等，偶数项的二项式系数与相应偶数项的系数互为相反数，而展开式中第5项的二项式系数最大，因此展开式中第4项和第6项的系数相等且最小，为$(-1)^3 C_8^3=-56$.

解题技法

1. 求二项式系数最大项

（1）如果n是偶数，那么中间一项（第$\frac{n}{2}+1$项）的二项式系数最大，最大值为$C_n^{\frac{n}{2}}$；

（2）如果n是奇数，那么中间两项（第$\frac{n+1}{2}$项与第$\frac{n+1}{2}+1$项）的二项式系数相等且最大，最大值为$C_n^{\frac{n-1}{2}}$或$C_n^{\frac{n+1}{2}}$.

2. 求展开式系数最大项

求（$a+bx$）^{n}（a，$b\in\mathrm{R}$）的展开式中系数最大的项，一般是采用待定系数法，设展开式各项系数分别为A_1，A_2，…，A_{n+1}，且第k项系数最大，应用$\begin{cases}A_k\geq A_{k-1},\\A_k\geq A_{k+1},\end{cases}$解出$k$.

训练

1. （多选）在 $\left(\frac{2}{x}-x\right)^6$ 的展开式中，下列说法正确的是（　　）

A. 常数项为160

B. 第4项的二项式系数最大

C. 第3项的系数最大

D. 所有项的系数和为64

解析： 展开式的通项为$T_{k+1}=C_6^k\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^{6-k}\cdot(-x)^k=2^{6-k}(-1)^k\cdot C_6^k x^{2k-6}$，由$2k-6=0$，得$k=3$，所以常数项为$2^3(-1)^3C_6^3=-160$，A错误；展开式共有7项，所以第4项的二项式系数最大，B正确；第3项的系数最大，C正确；令$x=1$，得$\left(\frac{2}{1}-1\right)^6=1$，所有项的系数和为1，D错误.

2. 设m为正整数，$(x+y)^{2m}$展开式的二项式系数的最大值为a，$(x+y)^{2m+1}$展开式的二项式系数的最大值为b，若$13a=7b$，则$m=$ __6__.

解析：根据二项式系数的性质，知$(x+y)^{2m}$展开式中二项式系数的最大值为C_{2m}^{m}，而$(x+y)^{2m+1}$展开式中二项式系数的最大值为C_{2m+1}^{m}，则$C_{2m}^{m}=a$，$C_{2m+1}^{m}=b$.又$13a=7b$，所以$13C_{2m}^{m}=7C_{2m+1}^{m}$，即$13\times\frac{(2m)!}{m!\times m!}=7\times\frac{(2m+1)!}{(m+1)!\times m!}$，解得$m=6$.

考点三 多项式展开式中特定项（系数）问题

（定向精析突破）

考向1 几个多项式和的展开式中特定项（系数）问题

【例3】 在$1+(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+(1+x)^4+(1+x)^5+(1+x)^6$的展开式中，含$x^3$项的系数是（　　）

A. 25　　B. 30

C. 35　　D. 40

解析： **法一** $(1+x)^n$的通项公式为$T_{r+1}=C_n^r x^r$，当n依次取3，4，5，6，r取3得到含x^3的系数为$C_3^3+C_4^3+C_5^3+C_6^3=C_5^4+C_5^3+C_6^3=C_6^4+C_6^3=C_7^4=35$.

法二 多项式可化为$\frac{1-(1+x)^7}{1-(1+x)}=\frac{(x+1)^7-1}{x}$，二项式$(x+1)^7$的通项公式为$T_{r+1}=C_7^r x^{7-r}$，令$7-r=4\Rightarrow r=3$，含$x^3$项的系数为$C_7^3=35$.故选C.

解题技法

对于几个二项式和的展开式中的特定项（系数）问题，只需依据二项展开式的通项，从每一个二项式中分别得到特定的项，再求和即可.也可以先对二项式求和，化简后再依据通项公式确定特定项（系数）.

考向2　几个多项式积的展开式中特定项（系数）问题

【例4】　（2022·新高考Ⅰ卷13题）$\left(1-\frac{y}{x}\right)(x+y)^8$的展开式中$x^2y^6$的系数为　-28　.

解析：$(x+y)^8$展开式的通项$T_{r+1}=C_8^r x^{8-r}y^r$，$r=0$，1，…，7，8.令$r=6$，得$T_{6+1}=C_8^6x^2y^6$，令$r=5$，得$T_{5+1}=C_8^5x^3y^5$，所以$\left(1-\frac{y}{x}\right)(x+y)^8$的展开式中$x^2y^6$的系数为$C_8^6-C_8^5=-28$.

解题技法

对于几个多项式积的展开式中的特定项（系数）问题，一般都可以根据因式连乘的规律，结合组合思想求解，但要注意适当地运用分类方法，以免重复或遗漏.

考向3　三项式展开式中特定项（系数）问题

【例5】　$(x-3y+2)^5$的展开式中，常数项为__32__，所有不含字母x的项的系数之和为__-1__.

解析：由多项式知常数项为$2^5=32$.令$x=0$，$y=1$，即得所有不含字母x的项的系数之和，所以所求系数之和为$(0-3\times1+2)^5=(-1)^5=-1$.