湖北省 2025 届高三（9 月）起点考试

数学试卷

命题单位：荆州市教科院 审题单位：恩施州教科院 宜昌市教科院

2024.9

本试卷共 4 页，19 题，全卷满分 150 分.考试用时 120 分钟

★祝考试顺利★

注意事项：

1.答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.

2.选择题的作答：每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.

3.非选择题的作答：用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内.写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.

4.考试结束后，请将本试卷和答题卡一并上交.

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共计 40 分，每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的，请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上，

1. 已知集合 $A=\{x\mid 3<2^x<17\}$，$B=\{0,1,2,3,4,5\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{0,1\}$　　B. $\{0,1,5\}$　　C. $\{2,3,4\}$　　D. $\{5\}$

【答案】C

【解析】

【分析】先求出集合 A，再根据集合间的运算即可求解.

【详解】解：$\because 3<2^x<17$，

$\therefore \log_2 3<x<\log_2 17$，

$\therefore A=\{x\mid \log_2 3<x<\log_2 17\}$，

故 $A\cap B=\{2,3,4\}$.

故选：C.

2. 已知两条直线$l_1: ax+4y-1=0, l_2: x+ay+2=0$，则“$a=2$”是“$l_1 // l_2$”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】由两直线平行求出a，再利用充分条件、必要条件的定义判断即得.

【详解】当$l_1 // l_2$时，$\frac{a}{1}=\frac{4}{a}\neq\frac{-1}{2}$，则$a=\pm 2$，

所以“$a=2$”是“$l_1 // l_2$”的充分不必要条件.

故选：A

3. 已知复数z满足$(z-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})=3+\mathrm{i}$，则$z$的共轭复数$\bar{z}$在复平面中的对应点位于（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

【答案】D

【解析】

【分析】求出复数z后可求$\bar{z}$，从而可得复数$\bar{z}$在复平面中的对应点，故可得正确的选项.

【详解】$z=\frac{3+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}+\mathrm{i}=\frac{(3+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{2}+\mathrm{i}=1+3\mathrm{i}$，故$\bar{z}=1-3\mathrm{i}$，其对应的点为$(1,-3)$，

该点在第四象限，

故选：D.

4. 将$95,96,97,98,99$这5个数据作为总体，从这5个数据中随机选取2个数据作为一个样本，则该样本的平均数与总体平均数之差的绝对值不超过1的概率为（　　）

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{2}{5}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

【答案】D

【解析】

【分析】先求得总体平均数，然后利用列举法，结合古典概型概率计算公式求得正确答案.

【详解】依题意可知，总体平均数为97，

从这5个数据中随机选取2个数据作为一个样本，情况如下：

选到$95,96$，则样本平均数为95.5，所以$|95.5-97|=1.5$，

选到$95,97$，则样本平均数为96，所以$|96-97|=1$，

选到$95,98$，则样本平均数为96.5，所以$|96.5-97|=0.5$，

选到$95,99$，则样本平均数为97，所以$|97-97|=0$，

选到$96,97$，则样本平均数为96.5，所以$|96.5-97|=0.5$，

选到$96,98$，则样本平均数为97，所以$|97-97|=0$，

选到$96,99$，则样本平均数为97.5，所以$|97.5-97|=0.5$，

选到$97,98$，则样本平均数为97.5，所以$|97.5-97|=0.5$，

选到$97,99$，则样本平均数为98，所以$|98-97|=1$，

选到$98,99$，则样本平均数为98.5，所以$|98.5-97|=1.5$，

所以该样本的平均数与总体平均数之差的绝对值不超过1的概率为$\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$.

故选：D

5. 已知$\sin\theta-\cos\theta=\frac{7}{5}$，则$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=$（　　）

A. $\frac{1}{7}$或 7　　B. $\frac{1}{7}$或$-\frac{1}{7}$　　C. 7 或-7　　D. -7 或$-\frac{1}{7}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据辅助角公式可求$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$，故可求$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$的值.

【详解】因为$\sin\theta-\cos\theta=\frac{7}{5}$，故$\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\sin\theta-\cos\frac{\pi}{4}\cos\theta\right)=\frac{7}{5}$，

故$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{7\sqrt{2}}{10}$，故$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\pm\frac{\sqrt{2}}{10}$，故$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\pm\frac{1}{7}$，

故选：B.

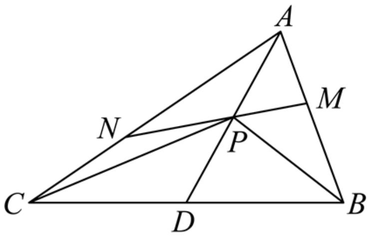
6. 已知点P在$\triangle ABC$所在的平面内，且$2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$.过点$P$的直线与直线$AB,AC$分别交于$M,N$，设$\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AN}=\beta\overrightarrow{AC},(\alpha>0,\beta>0)$，则$\alpha+4\beta$的最小值为（　　）

A. $\dfrac{7}{4}$　　B. $\dfrac{3+2\sqrt{2}}{4}$　　C. $\dfrac{9}{4}$　　D. $\dfrac{3}{2}+\sqrt{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】利用平面向量基本定理可得$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=4$，再利用基本不等式可求最小值.

【详解】

设BC的中点为D，连接PD,PC,PB，则$2\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$，

故$2\overrightarrow{PD}+2\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{0}$即$\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{PA}$，故$P$为$AD$的中点，

因为P,M,N三点共线，故存在实数s，使得$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AM}+(1-s)\overrightarrow{AN}$，

故$\overrightarrow{AP}=s\alpha\overrightarrow{AB}+(1-s)\beta\overrightarrow{AC}$，而$\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，

因为$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$不共线，故$\begin{cases}s\alpha=\dfrac{1}{4}\\(1-s)\beta=\dfrac{1}{4}\end{cases}$即$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=4$，

$\alpha+4\beta=\dfrac{1}{4}(\alpha+4\beta)\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)=\dfrac{1}{4}\left(5+\dfrac{4\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}\right)\geq\dfrac{9}{4}$，

当且仅当$\alpha=\dfrac{3}{4},\beta=\dfrac{3}{8}$时等号成立，故$\alpha+4\beta$的最小值为$\dfrac{9}{4}$，

故选：C.

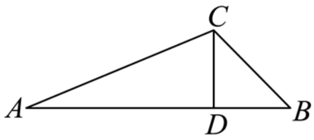
7. 一个三角形纸板的三个顶点为$A,B,C,AB=3,BC=\sqrt{2},AC=\sqrt{5}$，以$AB$边上的高所在直线为旋转轴，将三角形纸板旋转$180°$，则纸板扫过的空间所形成的几何体的体积为（　　）

A. $\dfrac{5\pi}{6}$　　B. π　　C. $\dfrac{5\pi}{3}$　　D. 2π

【答案】A

【解析】

【分析】几何体为两个半圆锥构成，根据圆锥的体积可求该几何体的体积.

【详解】

$\cos A=\dfrac{AC^2+AB^2-BC^2}{2AC\times AB}=\dfrac{9+5-2}{2\times3\times\sqrt{5}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，而 A 为三角形内角，故$\sin A=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，

故$CD=AC\sin A=\sqrt{5}\times\dfrac{1}{\sqrt{5}}=1$，故$AD=\sqrt{5}\times\dfrac{2}{\sqrt{5}}=2$，故$DB=1$，

故几何体的体积为$\dfrac{1}{2}\times1\times\dfrac{1}{3}\left(\pi\times2^2+\pi\times1^2\right)=\dfrac{5\pi}{6}$

故选：A.

8. 若不等式$kx+b\geq\ln x$恒成立，则$\dfrac{b}{k}$的取值范围是（　　）

A. $[0,+\infty)$　　B. $[-1,+\infty)$　　C. $[-2,+\infty)$　　D. $[-\mathrm{e},+\infty)$

【答案】B

【解析】

【分析】令$f(x)=\ln x-kx-b$，依题意可得$f(x)\leq0$恒成立，求出函数的导函数，分$k\leq0$、$k>0$两种情况讨论，说明函数的单调性，求出$f(x)_{\max}$，即可得到$b\geq-\ln k-1$，从而得到$\dfrac{b}{k}\geq\dfrac{-\ln k-1}{k}$，再利用导数求出$\dfrac{-\ln k-1}{k}$的最小值，即可得解.

【详解】令$f(x)=\ln x-kx-b$，则$f(x)\leq0$恒成立，

又$f'(x)=\dfrac{1}{x}-k$，

当$k\leq0$时，$f'(x)>0$恒成立，所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，且$x\to+\infty$时$f(x)\to+\infty$，不符合题意；

当$k>0$时，令$f'(x)>0$，解得$0<x<\dfrac{1}{k}$，令$f'(x)<0$，解得$x>\dfrac{1}{k}$，

所以$f(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{k}\right)$上单调递增，在$\left(\dfrac{1}{k},+\infty\right)$上单调递减，

所以$f(x)_{\max}=f\left(\dfrac{1}{k}\right)=\ln\dfrac{1}{k}-1-b=-\ln k-1-b\leq0$，

所以$b\geq-\ln k-1$，

所以$\dfrac{b}{k}\geq\dfrac{-\ln k-1}{k}$，

令 $g(k)=\dfrac{-\ln k-1}{k}$， $k\in(0,+\infty)$，

则 $g'(k)=\dfrac{\ln k}{k^2}$，所以当 $0<k<1$ 时 $g'(k)<0$，当 $k>1$ 时 $g'(k)>0$，

所以 $g(k)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $g(k)\geq g(1)=-1$，所以 $\dfrac{b}{k}\geq -1$，即 $\dfrac{b}{k}$ 的取值范围是 $[-1,+\infty)$.

故选：B

【点睛】关键点点睛：本题关键是推导出 $b\geq -\ln k-1\ (k>0)$，从而得到 $\dfrac{b}{k}\geq\dfrac{-\ln k-1}{k}$.

二、多选题：本大题共 3 小题，每小题 6 分，共计 18 分，每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求.全部选对得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 已知函数 $f(x)=\sin x, g(x)=\cos x$，则下列结论正确的有（　　）

A. 函数 $y=f(x)g(x)$ 的最小正周期为 2π

B. 函数 $y=f(x)-g(x)$ 的最大值为 $\sqrt{2}$

C. 函数 $y=f(x)-g(x)$ 的所有零点构成的集合为 $\left\{x\middle|x=k\pi+\dfrac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$

D. 函数 $y=f(x)+g(x)$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right]$ 上是增函数

【答案】BC

【解析】

【分析】利用倍角公式求出 $y=f(x)g(x)$，再求其周期判断 A 的真假；利用辅助角公式化简 $y=f(x)-g(x)$ 与 $y=f(x)+g(x)$，分析函数的性质，判断 B，C，D 的真假.

【详解】对 A： $y=f(x)g(x)=\sin x\cos x=\dfrac{1}{2}\sin 2x$，所以 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.故 A 错误；

对 B：因为 $y=f(x)-g(x)=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$，

当 $x-\dfrac{\pi}{4}=2k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathrm{Z}$ 即 $x=2k\pi+\dfrac{3\pi}{4},k\in\mathrm{Z}$ 时，函数有最大值 $\sqrt{2}$，故 B 正确；

对 C：由 $\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0\Rightarrow x-\dfrac{\pi}{4}=k\pi\Rightarrow x=k\pi+\dfrac{\pi}{4},k\in\mathrm{Z}$，故 C 正确；

对 D：$y=f\left(x\right)+g\left(x\right)=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，

由 $-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\le x+\dfrac{\pi}{4}\le\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z\Rightarrow-\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi\le x\le\dfrac{\pi}{4}+2k\pi,k\in Z$，

令 $k=0$ 得，函数在 $\left[-\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上递增，在 $\dfrac{\pi}{4}$ 右侧一定是先单调递减，故 D 错误.

故选：BC

10. 已知定义域为 R 的偶函数 $f\left(x\right)$ 满足 $f\left(x+2\right)=-f\left(-x\right)$，当 $x\in\left(1,2\right]$ 时 $f\left(x\right)=2^x-2$，则下列结论正确的有（　　）

A. $f\left(-1\right)=0$

B. $f\left(x\right)$ 的图象关于点 $\left(3,0\right)$ 成中心对称

C. $f\left(2024\right)>f\left(2025\right)$

D. $f\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)\le f\left(\dfrac{1}{2}\right)$

【答案】ABD

【解析】

【分析】对 A，利用赋值法再结合偶函数即可求解；对 B，先推出 $f\left(x\right)$ 的周期，再结合中心对称的结论即可求解；对 C，利用周期性即可求解；对 D，利用函数的奇偶性，单调性，再结合函数的对称性即可求解.

【详解】对 A，$\because f\left(x\right)$ 满足 $f\left(x+2\right)=-f\left(-x\right)$，

令 $x=-1$，

则 $f\left(1\right)=-f\left(1\right)$，即 $f(1)=0$，

又 $\because f\left(x\right)$ 为偶函数，$\therefore f\left(-1\right)=f\left(1\right)=0$，故 A 对；

对 B，$\because f\left(x+2\right)=-f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$，

$\therefore f\left(x+4\right)=-f\left(x+2\right)=f\left(x\right)$，

故 $f\left(x\right)$ 的周期 $T=4$，

再根据 $f\left(x+2\right)=-f\left(-x\right)$，即 $f\left(x+6\right)=-f\left(-x\right)$，

$\therefore f(x)$ 的图象关于点 $\left(3,0\right)$ 成中心对称，故 B 对；

对 C，由 B 知：$f\left(x\right)$的周期$T=4$，

故$f\left(2024\right)=f\left(506\times 4\right)=f\left(0\right)$，

$\because f\left(x+2\right)=-f\left(-x\right)$，

令$x=0$，

则$f(2)=-f(0)$，

又$\because$当$x\in\left(1,2\right]$时$f\left(x\right)=2^{x}-2$，

$\therefore f\left(2\right)=2^{2}-2=2$，

即$f\left(0\right)=-f\left(2\right)=-2$，

即$f\left(2024\right)=f\left(0\right)=-2$，

$f\left(2025\right)=f\left(506\times 4+1\right)=f\left(1\right)=0$，

故$f\left(2024\right)<f\left(2025\right)$，故 C 错误；

对 D，$f\left(x\right)$满足$f\left(x+2\right)=-f\left(-x\right)$，

$\therefore f(x)$关于$(1,0)$中心对称，

又$\because$当$x\in\left(1,2\right]$时$f\left(x\right)=2^{x}-2$，

$\therefore f(x)$在$[0,2]$上单调递增；

当$x=0$时，$f\left(0\right)=-2<f\left(\frac{1}{2}\right)=2^{\frac{1}{2}}-2=\sqrt{2}-2$，

当$x\neq 0$时，$\because f\left(x\right)$为偶函数，

$$\therefore f\left(\frac{x}{x^{2}+1}\right)=f\left(\left|\frac{x}{x^{2}+1}\right|\right)=f\left(\frac{|x|}{|x|^{2}+1}\right)=f\left(\frac{1}{|x|+\frac{1}{|x|}}\right),$$

$\because 0<\dfrac{1}{|x|+\frac{1}{|x|}}\leq\dfrac{1}{2}$，

当且仅当$|x|=\dfrac{1}{|x|}$时，即$x=1$时等号成立，

$\therefore f\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)\le f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，故 D 对.

故选：ABD.

【点睛】关键点点睛：解答此类有关函数性质的题目，关键点在于要结合函数性质，利用赋值法以及代换法，推出函数相应的性质.

11. 在平面直角坐标系中，已知点 P 是曲线 $\Gamma: y^2=x$ 上任意一点，过点 P 向圆 $C:(x-2)^2+y^2=1$ 引两条切线，这两条切线与 Γ 的另一个交点分别为 A,B，则下列结论正确的有（　　）

A. $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}>0$

B. 直线 AB 与圆 C 相切

C. $\triangle PAB$ 的周长的最小值为 $4\sqrt{3}$

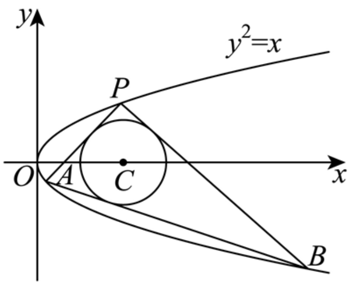
D. $\triangle PAB$ 的面积的最小值为 $3\sqrt{3}$

【答案】BD

【解析】

【分析】分别对直线 PA，PB 的斜率是否存在进行讨论，对各种情况下各选项的内容进行判断即可.

【详解】如图，不妨设点 P 位于第一象限，直线 PA 在圆 C 的左边，直线 PB 在圆 C 的右边.



首先，若直线 PA 的斜率不存在，则 $P(1,1)$，$A(1,-1)$，

设直线 PB 的方程为：$y-1=k(x-1)$ 即 $kx-y+1-k=0$.

因为直线 PB 与圆 C 相切，所以 $\dfrac{|k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=1\Rightarrow k=0$，

此时直线 PB：$y=1$ 与曲线 Γ 只有 1 个交点，不合题意；

其次，若直线 PB 的斜率不存在，则 $P\left(3,\sqrt{3}\right)$，$B\left(3,-\sqrt{3}\right)$，

设直线 PA 的方程为：$y-\sqrt{3}=k(x-3)$ 即 $kx-y+\sqrt{3}-3k=0$.

因为直线 PA 与圆 C 相切，所以 $\dfrac{\left|-k+\sqrt{3}\right|}{\sqrt{k^2+1}}=1\Rightarrow k=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

此时直线 PA：$\sqrt{3}x-3y=0$，所以 $A(0,0)$.

此时：$A(0,0)$，$B\left(3,-\sqrt{3}\right)$，$P\left(3,\sqrt{3}\right)$，$C(2,0)$.

所以 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=(-2,0)\cdot\left(1,-\sqrt{3}\right)=-2<0$，故 A 不成立；

直线 AB：$\sqrt{3}x+3y=0$，由 $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{9+3}}=1$ 得直线 AB 与圆 C 相切，故 B 成立；

因为 $|AB|=|PA|=|PB|=2\sqrt{3}$，所以 $\triangle PAB$ 的周长为 $6\sqrt{3}$，满足 C 选项；

$S_{\triangle PAB}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\left(2\sqrt{3}\right)^2=3\sqrt{3}$，满足 D 选项.

最后，直线 PA，PB 的斜率都存在时：

设 $P\left(t^2,t\right)$（$t>0$ 且 $t\neq 1,\sqrt{3}$），$A\left(t_1^2,t_1\right)$，$B\left(t_2^2,t_2\right)$.

所以 $k_{PA}=\dfrac{t_1-t}{t_1^2-t^2}=\dfrac{1}{t_1+t}$，

所以直线 PA 的方程为：$y-t=\dfrac{1}{t_1+t}\left(x-t^2\right)$，即 $x-\left(t_1+t\right)y+t_1\cdot t=0$.

因为直线 PA 与圆 C 相切，所以：$\dfrac{\left|2+t_1\cdot t\right|}{\sqrt{1+\left(t_1+t\right)^2}}=1\Rightarrow\left(t^2-1\right)t_1^2+2t\cdot t_1+3-t^2=0$.

同理可得：$\left(t^2-1\right)t_2^2+2t\cdot t_2+3-t^2=0$.

所以 t_1,t_2 为方程 $\left(t^2-1\right)x^2+2t\cdot x+3-t^2=0$ 的两根.

所以：$t_1+t_2=\dfrac{-2t}{t^2-1}$，$t_1\cdot t_2=\dfrac{3-t^2}{t^2-1}$.

又直线 AB 的方程为：$x-\left(t_1+t_2\right)y+t_1\cdot t_2=0$，

点 C 到直线 AB 的距离为：$\dfrac{\left|2+t_1\cdot t_2\right|}{\sqrt{1+\left(t_1+t_2\right)^2}}=\dfrac{\left|2+\dfrac{3-t^2}{t^2-1}\right|}{\sqrt{1+\left(\dfrac{-2t}{t^2-1}\right)^2}}=\dfrac{t^2+1}{\sqrt{\left(t^2+1\right)^2}}=1$.

所以直线 AB 与圆 C 相切，故 B 正确；