保密★启用前

湖南省岳阳市2024届高三下学期教学质量监测（三）（三模）数学试题

副标题

考试时间：**分钟 满分：**分

注意事项：

1、填写答题卡的内容用2B铅笔填写

2、提前 xx 分钟收取答题卡

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。（共8题）

1．已知集合 $A=\{-2,-1,0,1,2,3\}$ ，$B=\left\{x\left|\frac{x-3}{x+1}\le 0\right.\right\}$，则 $A\cap B=$（ ）

A．$\{-1,0,1,2,3\}$　B．$\{0,1,2,3\}$　C．$\{1,2,3\}$　D．$\{0,1,2\}$

2．若虚数单位 i 是关于 x 的方程 $ax^3+bx^2+2x+1=0(a,b\in\mathrm{R})$ 的一个根，则 $|a+b\mathrm{i}|=$（ ）

A．$\sqrt{2}$　B．2　C．$\sqrt{5}$　D．5

3．直线 $2x-3y+1=0$ 的一个方向向量是（ ）

A．$(3,2)$　B．$(2,3)$　C．$(2,-3)$　D．$(3,-2)$

4．下列命题正确的是（ ）

A．若直线 l 上有无数个点不在平面 α 内，则 $l\parallel\alpha$

B．若直线 a 不平行于平面 α 且 $a\not\subset\alpha$，则平面 α 内不存在与 a 平行的直线

C．已知直线 a，b，平面 α,β，且 $a\subset\alpha,b\subset\beta,\alpha\parallel\beta$，则直线 a，b 平行

D．已知两条相交直线 a，b，且 $a\parallel$ 平面 α，则 b 与 α 相交

5．已知 $y=f(x+1)+1$ 为奇函数，则 $f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)+f(3)=$（ ）

A．-12　B．-10　C．-6　D．-5

6．把5个人安排在周一至周五值班，要求每人值班一天，每天安排一人，甲乙安排在不相邻的两天，乙丙安排在相邻的两天，则不同的安排方法数是（ ）

A．96种　B．60种　C．48种　D．36种

7．已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_2\ge a_1>0,S_{20}=100$，则 $a_{10}a_{11}$（ ）

A．有最小值 25　　B．有最大值 25　　C．有最小值 50　　D．有最大值 50

8．已知函数 $f(x)=\begin{cases}e^x+a,x<a\\x^2+2ax,x\geq a\end{cases}$，f(x)不存在最小值，则实数 a 的取值范围是（ ）

A．$(-1,0)$　　B．$\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$

C．$(-1,0)\cup\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$　　D．$\left(-\frac{1}{3},0\right)\cup(1,+\infty)$

二、选择题：本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．（共 3 题）

9．下列结论正确的是（ ）

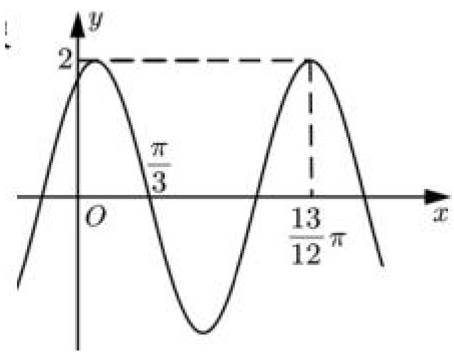
A．$C_7^n=C_7^3$，则 $n=3$

B．$C_n^m=\frac{m+1}{n+1}C_{n+1}^{m+1}$

C．$(x-1)^{10}$ 的展开式的第 6 项的系数是 C_{10}^5

D．$(1+x)^3+(1+x)^4+(1+x)^5$ 的展开式中 x^2 的系数为 C_6^3-1

10．已知函数 $f(x)=2cos(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示，则（ ）



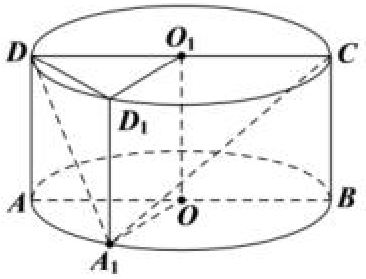
A．$\omega=2$

B．$f(x)$ 的单调递减区间为 $\left(k\pi+\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{7\pi}{12}\right),k\in Z$

C．$f(x)$ 的图象可由函数 $y=2cos2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位得到

D．满足条件 $\left(f(x)-f\left(-\frac{7\pi}{4}\right)\right)\left(f(x)-f\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)>0$ 的最小正整数 x 为 2

11．如图，四边形 $ABCD$ 是圆柱 OO_1 的轴截面且面积为 2，四边形 OO_1DA 绕 OO_1 逆时针旋转 $\theta(0\le\theta\le\pi)$ 到四边形 $OO_1D_1A_1$，则（ ）



A．圆柱 OO_1 的侧面积为 2π

B．当 $0<\theta<\pi$ 时，$DD_1\perp A_1C$

C．当 $0<\theta<\pi$ 时，四面体 CDD_1A_1 的外接球表面积最小值为 3π

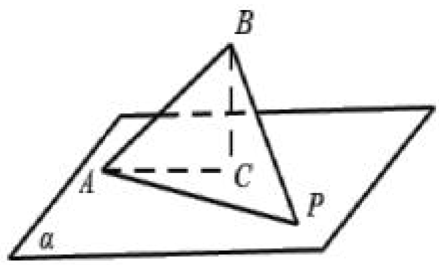
D．当 $BD_1=\sqrt{2}$ 时，$\dfrac{2\pi}{3}\le\theta\le\pi$

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分．（共 3 题）

12．已知双曲线 C 过点 $(1,\sqrt{6})$，且渐近线方程为 $y=\pm 2x$，则 C 的离心率为__________．

13．已知角 α,β 的终边关于直线 $y=x$ 对称，且 $sin(\alpha-\beta)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则 α,β 的一组取值可以是 $\alpha=$__________，$\beta=$__________．

14．如图所示，直角三角形 ABC 所在平面垂直于平面 α，一条直角边 AC 在平面 α 内，另一条直角边 BC 长为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 且 $\angle BAC=\dfrac{\pi}{6}$，若平面 α 上存在点 P，使得 $\triangle ABP$ 的面积为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，则线段 CP 长度的最小值为__________．



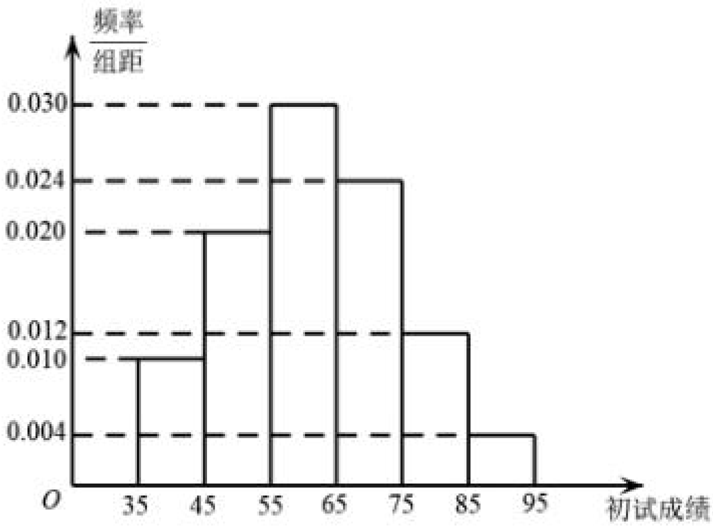
四、解答题：本大题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．（共 5 题）

15．已知等差数列$\{a_n\}$满足：$a_1=2$，且a_1、a_2、a_4成等比数列．

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若等差数列$\{a_n\}$的公差不为零且数列$\{b_n\}$满足：$b_n=\dfrac{4n^2}{(a_n-1)(a_n+1)}$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$．

16．某地区举行专业技能考试，共有8000人参加，分为初试和复试，初试通过后，才能参加复试．为了解考生的考试情况，随机抽取了100名考生的初试成绩，并以此为样本，绘制了样本频率分布直方图，如图所示．



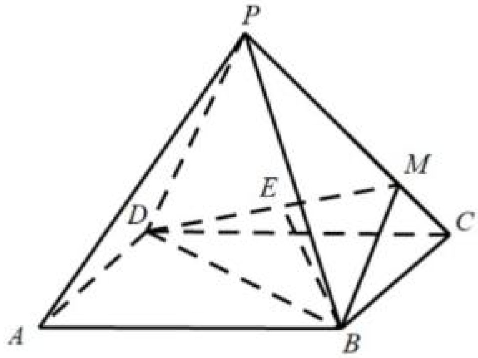
附：若随机变量X服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，则：$P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)=0.6827$，

$P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)=0.9545, P(\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma)=0.9973$．

（1）若所有考生的初试成绩X近似服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，其中μ为样本平均数的估计值，$\sigma=11.5$，试利用正态分布估计所有考生中初试成绩不低于85分的人数；

（2）复试共四道题，前两道题考生每题答对得5分，答错得0分，后两道题考生每题答对得10分，答错得0分，四道题的总得分为考生的复试成绩．已知某考生进入复试，他在复试中，前两题每题能答对的概率均为$\dfrac{3}{4}$，后两题每题能答对的概率均为$\dfrac{3}{5}$，且每道题回答正确与否互不影响．规定复试成绩上了20分（含20分）的考生能进入面试，请问该考生进入面试的概率有多大?

17．已知四棱锥$P-ABCD$的底面$ABCD$是边长为4的菱形，$\angle DAB=60^\circ$，$PA=PC$，$PB=PD=2\sqrt{10}$，M是线段PC上的点，且$\overrightarrow{PC}=4\overrightarrow{MC}$．



（1）证明：$PC\perp$平面BDM；

（2）点E在直线DM上，求BE与平面$ABCD$所成角的最大值．

18．已知动圆P过定点$F(0,1)$且与直线$y=3$相切，记圆心P的轨迹为曲线E．

（1）已知A、B两点的坐标分别为$(-2,1)$、$(2,1)$，直线AP、BP的斜率分别为k_1、k_2，证明：$k_1-k_2=1$；

（2）若点$M\left(x_1,y_1\right)$、$N\left(x_2,y_2\right)$是轨迹E上的两个动点且$x_1x_2=-4$，设线段MN的中点为Q，圆P与动点Q的轨迹Γ交于不同于F的三点C、D、G，求证：$\triangle CDG$的重心的横坐标为定值．

19．已知$\triangle ABC$的三个角A，B，C的对边分别为a，b，c且$c=2b$，点D在边BC上，AD是$\angle BAC$的角平分线，设$AD=kAC$（其中k为正实数）．

（1）求实数k的取值范围；

（2）设函数$f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}ax^3-\dfrac{5}{2}bx^2+cx-\dfrac{b}{2}$

①当$k=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$时，求函数$f(x)$的极小值；

②设x_0是$f(x)$的最大零点，试比较x_0与1的大小．

【答案区】

1. 【答案】B

【解析】【解答】解：原不等式$\frac{x-3}{x+1}\le 0$，转化为$\begin{cases}(x-3)(x+1)\le 0\\ x+1\ne 0\end{cases}$，解得$-1<x\le 3$，

则集合$B=\{x|-1<x\le 3\}$，因为集合$A=\{-2,-1,0,1,2,3\}$，所以$A\cap B=$

$\{0,1,2,3\}$.

故答案为：B.

【分析】先解不等式求得集合B，再根据集合的交集运算求解即可.

2. 【答案】C

【解析】【解答】解：因为i是方程$ax^3+bx^2+2x+1=0(a,b\in R)$的一个根，所以

$a\mathrm{i}^3+b\mathrm{i}^2+2\mathrm{i}+1=0$，

即$(2-a)\mathrm{i}+(1-b)=0$，又因为$a,b\in R$，所以$a=2,b=1$，则

$|a+b\mathrm{i}|=|2+\mathrm{i}|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$.

故答案为：C.

【分析】由题意，结合复数相等的充要条件列式求得a,b，再求复数的模即可.

3. 【答案】A

【解析】【解答】解：易知直线$2x-3y+1=0$的斜率为$\frac{2}{3}$，

则直线$2x-3y+1=0$的一个方向向量为$\vec{a}=\left(1,\frac{2}{3}\right)$；

A、因为$3\times\frac{2}{3}-1\times 2=0$，所以向量$(3,2)$与$\left(1,\frac{2}{3}\right)$共线，故A符合；

B、因为$2\times\frac{2}{3}-1\times 3\ne 0$，即向量$(2,3)$与$\left(1,\frac{2}{3}\right)$不共线，故B不符合；

C、因为$3\times\frac{2}{3}-1\times(-2)\ne 0$，即向量$(3,-2)$与$\left(1,\frac{2}{3}\right)$不共线，故C不符合；

D、因为$2\times\frac{2}{3}-1\times(-3)\ne 0$，即向量$(2,-3)$与$\left(1,\frac{2}{3}\right)$不共线，故D不符合.

故答案为：A.

【分析】先求直线的斜率即可得该直线的一个方向向量$\vec{a}$，再根据向量共线求解即可.

4. 【答案】B

【解析】【解答】解：A、若直线l上有无数个点不在平面α内，则l与α相交或平行，故A错误；

B、若直线a不平行于平面α且$a \not\subset \alpha$，则a与α相交，所以平面α内不存在与a平行的直线，故B正确；

C、已知直线a,b，平面α,β，且$a \subset \alpha, b \subset \beta, \alpha // \beta$，则直线$a,b$平行或异面，故C错误；

D、两条相交直线a,b，且$a//$平面α，则$b//$平面α或b与α相交，故D错误.

故答案为：B.

【分析】根据空间直线与直线、直线与平面的位置关系判断即可.

5. 【答案】D

【解析】【解答】解：因为函数$y=f(x+1)+1$的为奇函数，即图象关于原点对称，

所以函数$y=f(x)$的图象关于点$(1,-1)$对称，

则$f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)+f(3)=[f(-1)+f(3)]+[f(0)+f(2)]+f(1)$，

即$f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)+f(3)=2\times(-1)+2\times(-1)+(-1)=-5$.

故答案为：D.

【分析】由题意，得函数$y=f(x)$图象的对称性，即可求$f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)+f(3)$的值.

6. 【答案】D

【解析】【解答】解：设这五个人分别为甲乙丙丁戊；

因为乙丙安排在相邻的两天，将乙丙捆绑看成一个整体，再考虑2人之间的顺序，有$A_2^2=2$种情况；

将这个整体与丁戊全排列，有$A_3^3=6$种安排方法；

排好后产生4个空位，因甲乙不相邻，则只能从3个空中任选1个安排甲，有$A_3^1=3$种安排方法，

由分步乘法计数原理可知：不同的方案共有 $2\times6\times3=36$ 种.

故答案为：D.

【分析】根据分步乘法计数原理，结合捆绑法和插空法求解即可.

7. 【答案】B

【解析】【解答】解：由 $S_{20}=100$ ， 可得 $S_{20}=\frac{20(a_1+a_{20})}{2}=10(a_{10}+a_{11})=100$ ， 解得 $a_{10}+a_{11}=10$ ，

因为 $a_2\geq a_1>0$ ， 所以等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d\geq0$ ， 故 $a_{10}>0,a_{11}>0$ ，

则 $a_{10}a_{11}\leq(\frac{a_{10}+a_{11}}{2})^2=25$ ， 当且仅当 $a_{10}=a_{11}=5$ 时等号成立，

即当 $a_{10}=a_{11}=5$ 时， $a_{10}a_{11}$ 取得最大值 25.

故答案为：B.

【分析】由 $S_{20}=100$ ， 利用等差数列的求和公式集合等差数列的性质推出 $a_{10}+a_{11}=10$ ， 再利用基本不等式求解即可.

8. 【答案】C

【解析】【解答】解：当a<0 时，若 $x<a$ ， 则 $f(x)=e^x+a$ ，

因为函数 $f(x)=e^x+a$ 在 $(-\infty,a)$ 上单调递增，所以 $a<f(x)<e^a+a$ ，

若 $x\geq a$ ， 则 $f(x)=x^2+2ax=(x+a)^2-a^2\geq-a^2$ ， 当且仅当 $x=-a$ 时取等号，

因为 $f(x)$ 不存在最小值，所以 $-a^2>a$ ， 所以 $-1<a<0$ ；

当 $a\geq0$ 时，若 $x<a$ ， 则 $f(x)=e^x+a$ ，

因为函数 $f(x)=e^x+a$ 在 $(-\infty,a)$ 上单调递增，所以 $a<f(x)<e^a+a$ ，

若 $x\geq a$ ， 则 $f(x)=x^2+2ax=(x+a)^2-a^2\geq f(a)=3a^2$ ， 当且仅当 $x=a$ 时取等号，

因为 $f(x)$ 不存在最小值，所以 $3a^2>a$ ， 所以 $a>\frac{1}{3}$ ，

综上所述：实数 a 的取值范围是 $(-1,0)\cup\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$.

故答案为：C.

【分析】分 $a<0,a\geq 0$ 结合指数函数单调性及二次函数性质，确定函数 $f(x)$ 的取值规律，由函数不存在最小值列不等式求 a 的范围即可.

9. 【答案】B,D

【解析】【解答】解：A、因为 $C_7^n=C_7^3$ ，由组合数性质可得 $n=3$ 或 $n=4$ ，故 A 错误；

B、$C_n^m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}=\dfrac{m+1}{n+1}\dfrac{(n+1)\cdot n!}{(m+1)\cdot m!\cdot(n-m)!}=\dfrac{m+1}{n+1}\dfrac{(n+1)!}{(m+1)!\cdot[(n+1)-(m+1)]!}$ ，

则 $C_n^m=\dfrac{m+1}{n+1}C_{n+1}^{m+1}$ ，故 B 正确；

C、$(x-1)^{10}$ 展开式的第 6 项为 $T_6=C_{10}^5x^{10-5}(-1)^5=-C_{10}^5x^5$ ，则第 6 项的系数是 $-C_{10}^5$ ，故 C 错误；

D、$(1+x)^3$ 的展开式中 x^2 的系数为 C_3^2 ，$(1+x)^4$ 的展开式中 x^2 的系数为 C_4^2 ，$(1+x)^5$ 的展开式中 x^2 的系数为 C_5^2 ，

则 $(1+x)^3+(1+x)^4+(1+x)^5$ 的展开式中 x^2 的系数为

$C_3^2+C_4^2+C_5^2=C_3^2+C_3^3+C_4^2+C_5^2-1=C_4^3+C_4^2+C_5^2-1=C_5^3+C_5^2-1=C_6^3-1$ ，

故 D 正确.

故答案为：BD.

【分析】根据组合数的性质即可判断 A；利用组合数的性质证明结论即可判断 B；根据二项式展开式的通项公式求第 6 项，确定其系数即可判断 C；结合二项式展开式的通项公式及组合数性质求展开式中 x^2 的系数即可判断 D.

10. 【答案】A,B,D

【解析】【解答】解：A、由图可得：$\dfrac{3}{4}T=\dfrac{13\pi}{12}-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3\pi}{4}$ ，则 $\dfrac{2\pi}{|\omega|}=\pi$ ，因为 $\omega>0$ ，

所以 $\omega=2$ ，故 A 正确；

B、因为 $x=\dfrac{13}{12}\pi$ 时，函数 $f(x)$ 取最大值 2，所以 $2\times\dfrac{13\pi}{12}+\varphi=2m\pi,m\in Z$ ，又因为 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$ ，

所以 $\varphi=-\dfrac{\pi}{6}$ ，故 $f(x)=2\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ ，由 $2k\pi\leq 2x-\dfrac{\pi}{6}\leq 2k\pi+\pi,k\in Z$ ，

可得 $k\pi+\frac{\pi}{12}\le 2x-\frac{\pi}{6}\le k\pi+\frac{7\pi}{12},k\in Z$，所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为

$\left(k\pi+\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{7\pi}{12}\right),k\in Z$，故 B 正确；

C、函数 $y=2cos2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位得到函数 $y=2cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，故 C 错误；

D、因为 $f(x)=2cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，所以

$f\left(-\frac{7\pi}{4}\right)=2cos\left(-\frac{7\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=2cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=1$，

$f\left(\frac{4\pi}{3}\right)=2cos\left(\frac{8\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=2cos\frac{5\pi}{2}=0$，所以

$\left(f(x)-f\left(-\frac{7\pi}{4}\right)\right)\left(f(x)-f\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)>0$ 可化为 $\left(f(x)-1\right)f(x)>0$，

所以 $f\left(x\right)>1$ 或 $f\left(x\right)<0$，

由 $f\left(x\right)>1$ 可得，$cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)>\frac{1}{2}$，所以 $2n\pi-\frac{\pi}{3}<2x-\frac{\pi}{6}<2n\pi+\frac{\pi}{3},n\in Z$，

即 $n\pi-\frac{\pi}{12}<x<n\pi+\frac{\pi}{4},n\in Z$，

取 $n=0$ 可得 $-\frac{\pi}{12}<x<\frac{\pi}{4}$，取 $n=1$ 可得 $\frac{11\pi}{12}<x<\frac{5\pi}{4}$，

由 $f\left(x\right)<0$ 可得，$cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)<0$，所以 $2t\pi+\frac{\pi}{2}<2x-\frac{\pi}{6}<2t\pi+\frac{3\pi}{2},t\in Z$，

即 $t\pi+\frac{\pi}{3}<x<t\pi+\frac{5\pi}{6},t\in Z$，取 $t=0$ 可得 $\frac{\pi}{3}<x<\frac{5\pi}{6}$，

所以满足条件 $\left(f(x)-f\left(-\frac{7\pi}{4}\right)\right)\left(f(x)-f\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)>0$ 的最小正整数 x 为 2，故 D 正确.

故答案为：ABD.

【分析】由函数的图象确定函数 $f(x)$ 的周期，利用周期公式求 ω 即可判断 A；结合 $x=\frac{13}{12}\pi$ 时，函数取最大值，列方程求 φ，根据正弦函数的单调性求 $f(x)$ 的单调递减区间即可判断 B；根据函数图象变换结论即可判断 C；先求