2024届河北省保定市十校高三三模试题

数 学

本试卷满分150分，考试时间120分钟

注意事项：

1.答题前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上.

2.回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.

3.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

4.本试卷主要考试内容：高考全部内容.

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知复数z满足$\mathrm{i}z+4\bar{z}-15=0$，则复数$z$在复平面内对应的点位于（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

2. 已知椭圆$\dfrac{y^2}{m^2+2}+\dfrac{x^2}{m^2}=1$的离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，则$m=$（　　）

A. $\pm\sqrt{2}$　　B. ± 2　　C. $\pm 2\sqrt{2}$　　D. ± 4

3. 若集合$A=\left\{x \mid \sqrt{x}\le a\right\}$，$B=\left\{x \mid x^2-2x-3\le 0\right\}$，且$A\subseteq B$，则$a$的取值范围为（　　）

A. $[0,1]$　　B. $\left[0,\sqrt{3}\right]$　　C. $(-\infty,1]$　　D. $\left(-\infty,\sqrt{3}\right]$

4. 设α，β是两个不同的平面，m，l是两条不同的直线，且$\alpha\cap\beta=l$则“$m//l$”是“$m//\beta$且$m//\alpha$”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 充分必要条件

C. 必要不充分条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. 三人被邀请参加同一个时间段的两个晚会，若两个晚会都必须有人去，去几人自行决定，且每人最多参加一个晚会，则不同的去法有（　　）

A. 8种　　B. 12种　　C. 16种　　D. 24种

6. 在$\triangle ABC$中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，且$B=2C$，$b=\sqrt{2}a$，则（　　）

A. $\triangle ABC$ 为直角三角形　　　　B. $\triangle ABC$ 为锐角三角形

C. $\triangle ABC$ 为钝角三角形　　　　D. $\triangle ABC$ 的形状无法确定

7. 已知 0 是函数 $f\left(x\right)=x^{3}+ax^{2}+1$ 的极大值点，则 a 的取值范围为（　　）

A. $\left(-\infty,0\right)$　　B. $\left(0,+\infty\right)$　　C. $\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)$　　D. $\left(-\frac{2}{3},+\infty\right)$

8. 假设在某种细菌培养过程中，正常细菌每小时分裂 1 次（1 个正常细菌分裂成 2 个正常细菌和 1 个非正常细菌），非正常细菌每小时分裂 1 次（1 个非正常细菌分裂成 2 个非正常细菌）.若 1 个正常细菌经过 14 小时的培养，则可分裂成的细菌的个数为（　　）

A. $2^{15}+2$　　B. $2^{16}-2$　　C. 2^{17}　　D. 2^{18}

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 已知函数 $f\left(x\right)=2^{\left|\sin x\right|\cos x}$，则（　　）

A. $f\left(x\right)$ 是偶函数；　　　　B. $f\left(x\right)$ 是周期为 π 的周期函数；

C. $f\left(x\right)$ 在 $\left[\pi,\frac{5\pi}{4}\right]$ 上单调递增；　　　　D. $f\left(x\right)$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

10. 设 l_1，l_2 是双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0,a\neq b\right)$ 的两条渐近线，若直线 l_1 与直线 $y=x$ 关于直线 l_2 对称，则双曲线 C 的离心率的平方可能为（　　）

A. $5+2\sqrt{3}$　　B. $5-2\sqrt{3}$　　C. $8+4\sqrt{3}$　　D. $8-4\sqrt{3}$

11. 在长方形 $ABCD$ 中，$AB=6$，$AD=1$，点 E 在线段 AB 上（不包含端点），沿 DE 将 $\triangle ADE$ 折起，使二面角 $A-DE-C$ 的大小为 θ，$\theta\in\left(0,\pi\right)$，则（　　）

A. 存在某个位置，使得 $AE\perp DC$

B. 存在某个位置，使得直线 $BC//$ 平面 ADE

C. 四棱锥 $A-BCDE$ 体积的最大值为 $\frac{2\sqrt{5}}{3}$

D. 当 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 时，线段 AC 长度的最小值为 $2\sqrt{7}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.把答案填在答题卡中的横线上.

12. $\left(x^2-y^2\right)\left(2x+y\right)^6$ 的展开式中 x^4y^4 的系数为__________.

13. 已知奇函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f\left(x+3\right)=-f\left(-x\right)$，且 $f\left(2\right)=0$，则 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,6\right]$ 上的零点个数的最小值为__________.

14. 设 $a,b,c>0$，则 $\dfrac{a+2\sqrt{ab}+4\sqrt{ac}}{a+b+4c}$ 的最大值为__________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 已知 $m>0$，函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^x-2x+m$ 的图象在点 $\left(0,f\left(0\right)\right)$ 处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积为 2.

（1）求 m 的值；

（2）求 $f\left(x\right)$ 在 $\left[-1,2\right]$ 上的值域.

16. 教练统计了甲 12 次投篮训练的投篮次数和乙 8 次投篮训练的投篮次数，得到如下数据：

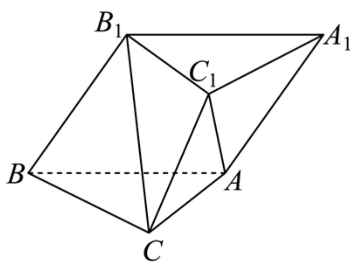
甲	77	73	77	81	85	81	77	85	93	73	77	81
乙	71	81	73	73	71	73	85	73				

已知甲 12 次投篮次数的方差 $s_1^2=\dfrac{89}{3}$，乙 8 次投篮次数的方差 $s_2^2=23$.

（1）求这 20 次投篮次数的平均数 $\overline{x}$ 与方差 s^2.

（2）甲、乙两人投篮，每次由其中一人投篮，规则如下：若命中则此人继续投篮，若未命中则换为对方投篮.无论之前投篮情况如何，甲每次投篮的命中率均为 $\dfrac{4}{5}$，乙每次投篮的命中率均为 $\dfrac{3}{4}$.已知第一次投篮的人是甲，且甲、乙总共投篮了 3 次，X 表示甲投篮的次数，求 X 的分布列与期望.

17. 如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$CA=CB$，四边形 ABB_1A_1 为菱形，$\angle ABB_1=\dfrac{\pi}{3}$，$AC_1\perp B_1C$.



（1）证明：$BC=BB_1$.

（2）已知平面 $ABC\perp$ 平面 ABB_1A_1，求二面角 $B-CC_1-A$ 的正弦值.

18. "完全数"是一类特殊的自然数，它的所有正因数的和等于它自身的两倍.寻找"完全数"需要用到函数 $\sigma\left(n\right)$，记函数 $\sigma\left(n\right):\forall n\in\mathbf{N}_{+}$，$\sigma\left(n\right)$ 为 n 的所有正因数之和.

（1）判断 28 是否为完全数，并说明理由.

（2）已知 $n\in\mathbf{N}_{+}$，若 $2^{n+1}-1$ 为质数，证明：$2^{n}\left(2^{n+1}-1\right)$ 为完全数.

（3）已知 $n\in\mathbf{N}_{+}$，求 $\sigma\left(10^{n}\right)$，$\sigma\left(30^{n}\right)$ 的值.

19. 已知 O 为坐标原点，经过点 $\left(4,0\right)$ 的直线 l 与抛物线 $C:y^{2}=2px\left(p>0\right)$ 交于 A，B（A，B 异于点 O）两点，且以 AB 为直径的圆过点 O.

（1）求 C 的方程；

（2）已知 M，N，P 是 C 上的三点，若 $\triangle MNP$ 为正三角形，Q 为 $\triangle MNP$ 的中心，求直线 OQ 斜率的最大值.

参考答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知复数 z 满足 $\mathrm{i}z+4\overline{z}-15=0$，则复数 z 在复平面内对应的点位于（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

【答案】A

【解析】

【分析】设 $z=a+b\mathrm{i}\left(a,b\in\mathbf{R}\right)$，根据共轭复数结合复数运算可得 $\begin{cases}a=4\\b=1\end{cases}$，再结合复数的几何意义分析判断.

【详解】设 $z=a+b\mathrm{i}\left(a,b\in\mathbf{R}\right)$，则 $\overline{z}=a-b\mathrm{i}\left(a,b\in\mathbf{R}\right)$.

因为 $\mathrm{i}z+4\overline{z}-15=0$，则 $\mathrm{i}\left(a+b\mathrm{i}\right)+4\left(a-b\mathrm{i}\right)-15=4a-b-15+\left(a-4b\right)\mathrm{i}=0$，

可得 $\begin{cases}4a-b-15=0\\a-4b=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=4\\b=1\end{cases}$，

即 $z=4+\mathrm{i}$，所以复数 z 在复平面内对应的点为 $\left(4,1\right)$，位于第一象限.

故选：A.

2. 已知椭圆$\dfrac{y^2}{m^2+2}+\dfrac{x^2}{m^2}=1$的离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，则$m=$（　　）

A. $\pm\sqrt{2}$　　　　B. ±2　　　　C. $\pm2\sqrt{2}$　　　　D. ±4

【答案】B

【解析】

【分析】根据椭圆的方程，结合离心率的定义和求法，列出方程，即可求解.

【详解】由椭圆$\dfrac{y^2}{m^2+2}+\dfrac{x^2}{m^2}=1$，可得$a^2=m^2+2$，$b^2=m^2$，则$c^2=a^2-b^2=2$，

所以$e^2=\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{2}{m^2+2}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$，解得$m=\pm2$.

故选：B.

3. 若集合$A=\left\{x\mid\sqrt{x}\le a\right\}$，$B=\left\{x\mid x^2-2x-3\le0\right\}$，且$A\subseteq B$，则$a$的取值范围为（　　）

A. $\left[0,1\right]$　　　　B. $\left[0,\sqrt{3}\right]$　　　　C. $\left(-\infty,1\right]$　　　　D. $\left(-\infty,\sqrt{3}\right]$

【答案】D

【解析】

【分析】首先解一元二次不等式求出集合B，再分$a<0$、$a\ge0$两种情况讨论，确定集合A，再根据集合的包含关系得到不等式，解得即可.

【详解】由$x^2-2x-3\le0$，即$\left(x+1\right)\left(x-3\right)\le0$，解得$-1\le x\le3$，

所以$B=\left\{x\mid x^2-2x-3\le0\right\}=\left[-1,3\right]$，

当$a<0$时，$A=\left\{x\mid\sqrt{x}\le a\right\}=\varnothing$，符合$A\subseteq B$，

当$a\ge0$时，由$\sqrt{x}\le a$，解得$0\le x\le a^2$，

所以$A=\left\{x\mid\sqrt{x}\le a\right\}=\left\{x\mid0\le x\le a^2\right\}$，

因为$A\subseteq B$，所以$\begin{cases}a^2\le3\\a\ge0\end{cases}$，解得$0\le a\le\sqrt{3}$.

综上可得a的取值范围为$\left(-\infty,\sqrt{3}\right]$.

故选：D

4. 设α，β是两个不同的平面，m，l是两条不同的直线，且$\alpha \cap \beta = l$则“$m//l$”是“$m//\beta$且$m//\alpha$”的（　　）

A. 充分不必要条件　　　　B. 充分必要条件

C. 必要不充分条件　　　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】C

【解析】

【分析】根据题意，利用线面平行的判定定理与性质定理，结合充分条件、必要条件的判定方法，即可求解.

【详解】当$m//l$时，m可能在α内或者β内，故不能推出$m//\beta$且$m//\alpha$，所以充分性不成立；

当$m//\beta$且$m//\alpha$时，设存在直线$n \subset \alpha$，$n \not\subset \beta$，且$n//m$，

因为$m//\beta$，所以$n//\beta$，根据直线与平面平行的性质定理，可知$n//l$，

所以$m//l$，即必要性成立，故“$m//l$”是“$m//\beta$且$m//\alpha$”的必要不充分条件.

故选：C.

5. 三人被邀请参加同一个时间段的两个晚会，若两个晚会都必须有人去，去几人自行决定，且每人最多参加一个晚会，则不同的去法有（　　）

A. 8 种　　　　B. 12 种　　　　C. 16 种　　　　D. 24 种

【答案】B

【解析】

【分析】根据参加晚会的人数分类讨论，利用排列组合数求解即可.

【详解】第一种情况，只有两人参加晚会，有$A_3^2 = 6$种去法；

第二种情况，三人参加晚会，有$C_3^2 A_2^2 = 6$种去法，共 12 种去法.

故选：B

6. 在$\triangle ABC$中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，且$B = 2C$，$b = \sqrt{2}a$，则（　　）

A. $\triangle ABC$为直角三角形　　　　B. $\triangle ABC$为锐角三角形

C. $\triangle ABC$为钝角三角形　　　　D. $\triangle ABC$的形状无法确定

【答案】A

【解析】

【分析】由正弦定理得$\sin B=\sqrt{2}\sin A$，利用正余弦的二倍角公式、两角和与差的正弦展开式化简可得$4\sqrt{2}\cos^2 C-2\cos C-\sqrt{2}=0$，解方程可得答案.

【详解】由$b=\sqrt{2}a$，可得$\sin B=\sqrt{2}\sin A$，

则$\sin 2C=\sqrt{2}\sin\left(\pi-3C\right)=\sqrt{2}\sin 3C$，

$\sin 2C=\sqrt{2}\sin 2C\cos C+\sqrt{2}\cos 2C\cdot\sin C$，

$2\cos C=2\sqrt{2}\cos^2 C+\sqrt{2}\left(2\cos^2 C-1\right)$，

即$4\sqrt{2}\cos^2 C-2\cos C-\sqrt{2}=0$，

由$B=2C>C$，故C只能为锐角，可得$\cos C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

因为$0<C<\dfrac{\pi}{2}$，所以$C=\dfrac{\pi}{4}$，$B=\dfrac{\pi}{2}$.

故选：A.

7. 已知 0 是函数$f\left(x\right)=x^3+ax^2+1$的极大值点，则$a$的取值范围为（　　）

A. $\left(-\infty,0\right)$　　B. $\left(0,+\infty\right)$　　C. $\left(-\infty,-\dfrac{2}{3}\right)$　　D. $\left(-\dfrac{2}{3},+\infty\right)$

【答案】A

【解析】

【分析】分类讨论$a<0$、$a=0$与$a>0$三种情况，结合导数与极值点的定义即可得解.

【详解】因为$f\left(x\right)=x^3+ax^2+1$，所以$f'\left(x\right)=3x^2+2ax=x\left(3x+2a\right)$，

令$f'\left(x\right)=0$，可得$x=0$或$x=-\dfrac{2a}{3}$，

当$-\dfrac{2a}{3}>0$，即$a<0$时，

令$f'\left(x\right)>0$，得$x<0$或$x>-\dfrac{2a}{3}$；令$f'\left(x\right)<0$，得$0<x<-\dfrac{2a}{3}$；

所以$f\left(x\right)$在$\left(-\infty,0\right)$，$\left(-\dfrac{2a}{3},+\infty\right)$上单调递增，在$\left(0,-\dfrac{2a}{3}\right)$上单调递减，

所以$x=0$是函数$f\left(x\right)$的极大值点，满足题意；

当$-\frac{2a}{3}=0$，即$a=0$时，$f'(x)=x(3x+0)\geq 0$恒成立，

则$f(x)$在R上单调递增，没有极值点，不满足题意；

当$-\frac{2a}{3}<0$，即$a>0$时，

令$f'(x)>0$，得$x<-\frac{2a}{3}$或$x>0$；令$f'(x)<0$，得$-\frac{2a}{3}<x<0$；

所以$f(x)$在$\left(-\infty,-\frac{2a}{3}\right)$，$(0,+\infty)$上单调递增，在$\left(-\frac{2a}{3},0\right)$上单调递减，

所以$x=0$是函数$f(x)$的极小值点，不满足题意；

综上，$a<0$，即a的取值范围为$(-\infty,0)$.

故选：A.

8. 假设在某种细菌培养过程中，正常细菌每小时分裂1次（1个正常细菌分裂成2个正常细菌和1个非正常细菌），非正常细菌每小时分裂1次（1个非正常细菌分裂成2个非正常细菌）.若1个正常细菌经过14小时的培养，则可分裂成的细菌的个数为（　　）

A. $2^{15}+2$　　B. $2^{16}-2$　　C. 2^{17}　　D. 2^{18}

【答案】C

【解析】

【分析】经过n小时，有a_n个正常细菌，b_n个非正常细菌，由题意可得$a_{n+1}=2a_n$，$b_{n+1}=a_n+2b_n$，进一步求出a_n，b_n的通项公式，即可得出答案.

【详解】设经过n小时，有a_n个正常细菌，b_n个非正常细菌，

则$a_{n+1}=2a_n$，$b_{n+1}=a_n+2b_n$.

又$a_1=2$，$b_1=1$，所以$a_n=2^n$，$b_{n+1}=2b_n+2^n$，

则$\frac{b_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{b_n}{2^n}+\frac{1}{2}$，则$\frac{b_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{b_n}{2^n}=\frac{1}{2}$，

所以$\left\{\frac{b_n}{2^n}\right\}$是首项为和公差均为$\frac{1}{2}$的等差数列，

所以$\frac{b_n}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{n}{2}$，

所以$b_n=n\cdot 2^{n-1}$，所以$a_{14}+b_{14}=2^{14}+14\times 2^{13}=16\times 2^{13}=2^{17}$.

故选：C.

【点睛】关键点点睛：本题解决的关键是找到a_n, b_n的相关推递式，从而得解.

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分.

9. 已知函数$f\left(x\right)=2^{|\sin x|\cos x}$，则（　　）

A. $f\left(x\right)$是偶函数；

B. $f\left(x\right)$是周期为π的周期函数；

C. $f\left(x\right)$在$\left[\pi,\dfrac{5\pi}{4}\right]$上单调递增；

D. $f\left(x\right)$的最小值为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

【答案】AD

【解析】

【分析】利用偶函数的定义可判定A，利用周期的定义可判定B，利用复合函数的单调性可判定C，根据周期性及单调性可判定D.

【详解】因为$f\left(-x\right)=2^{|\sin(-x)|\cos(-x)}=2^{|\sin x|\cos x}=f\left(x\right)$，所以$f\left(x\right)$是偶函数，故A正确；

易知$f\left(x+\pi\right)=2^{|\sin(x+\pi)|\cos(x+\pi)}=2^{-|\sin x|\cos x}\neq f\left(x\right)$，故B错误；

当$x\in\left[\pi,\dfrac{5\pi}{4}\right]$时，$f\left(x\right)=2^{|\sin x|\cos x}=2^{-\sin x\cos x}=2^{-\frac{1}{2}\sin 2x}$，

因为$2x\in\left[2\pi,\dfrac{5\pi}{2}\right]$，所以$y=-\dfrac{1}{2}\cdot\sin 2x$在$\left[\pi,\dfrac{5\pi}{4}\right]$上单调递减，

又$y=2^x$单调递增，所以$f\left(x\right)$在$\left[\pi,\dfrac{5\pi}{4}\right]$上单调递减，故C错误；

易知$f\left(x+2\pi\right)=f\left(x\right)$，所以$f\left(x\right)$是周期为$2\pi$的周期函数，

当$x\in\left[0,2\pi\right]$时，$f\left(x\right)=2^{|\sin x|\cos x}=\begin{cases}2^{\frac{1}{2}\sin 2x}, x\in\left[0,\pi\right]\\ 2^{-\frac{1}{2}\sin 2x}, x\in\left(\pi,2\pi\right]\end{cases}$，

显然$x\in\left[0,\pi\right]$时$\dfrac{1}{2}\sin 2x\in\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$，$x\in\left(\pi,2\pi\right]$时$-\dfrac{1}{2}\sin 2x\in\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$，

则$f\left(x\right)$的最小值为$2^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故D正确.