第 04 讲　解三角形

目录

01
模拟基础练

题型一：正弦定理的应用

1．在$\triangle ABC$中，内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，且$b=\sqrt{2},a=2,B=30^{\circ}$，则$C=$______.

2．在$\triangle ABC$中，内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，$\cos A=\frac{4}{5}$，$\cos B=\frac{5}{13}$，$a=2$，则$c=$________.

3．已知$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，若$\frac{\sin C}{\sin A+\sin B}+\frac{b}{a+c}=1$，则角$A=$_____.

题型二：余弦定理的应用

4．在锐角三角形ABC中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c，若$\triangle ABC$的面积为$\frac{\sqrt{3}\left(bc\sin B+c^{2}\sin C-ac\sin A\right)}{4\sin C}$，则角$A=$___.

5．在$\triangle ABC$中，$\frac{\sin C}{\sin A+\sin B}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin B+\sin C}$，则角$A=$___________.

6．在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，若$a:b:c=5:7:8$，则$\triangle ABC$中角B的大小是（　）

A．135°　　B．120°　　C．90°　　D．60°

题型三：判断三角形的形状

7．（2024·高三·广东广州·开学考试）在$\triangle ABC$中，$\cos^{2}\frac{B}{2}=\frac{a+c}{2c}$，则$\triangle ABC$的形状为_______三角形.

8．在$\triangle ABC$中，有$2\sin(A+B)-1=\sqrt{\frac{1-\cos 2C}{2}}$，试判断$\triangle ABC$的形状_____（从"直角三角形"，"锐角三角形"，"钝角三角形"中选一个填入横线中）.

9．在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c，且$a-b=c\cdot(\cos B-\cos A)$，则$\triangle ABC$的形状为________.

10．对于$\triangle ABC$，有如下四个命题:

①若$\sin 2A=\sin 2B$，则$\triangle ABC$为等腰三角形，

②若$\sin B=\cos A$，则$\triangle ABC$是直角三角形

③若$\sin^{2}A+\sin^{2}B<\sin^{2}C$，则$\triangle ABC$是钝角三角形

④若$\dfrac{a}{\cos\dfrac{A}{2}}=\dfrac{b}{\cos\dfrac{B}{2}}=\dfrac{c}{\cos\dfrac{C}{2}}$，则$\triangle ABC$是等边三角形.

其中正确的命题序号是_______

11．已知ΔABC的三个内角A,B,C所对的边分别为a,b,c，满足$\cos^2 A-\cos^2 B+\cos^2 C=1+\sin A\sin C$，且$\sin A+\sin C=1$，则$\Delta ABC$的形状为

A．等边三角形　　B．等腰直角三角形

C．顶角为$150°$的等腰三角形　　D．顶角为$120°$的等腰三角形

题型四：正、余弦定理的综合运用

12．（2024·北京西城·三模）在$\triangle ABC$中，若$c=2$，$a=\sqrt{3}$，$\angle A=\dfrac{\pi}{6}$，则$\sin C=$______，$b=$______.

13．（2024·贵州六盘水·三模）在$\triangle ABC$中，$AB=2$，$AC=3$，$\angle A=\dfrac{\pi}{3}$，则$\triangle ABC$外接圆的半径为（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{7}}{3}$　　B．$\dfrac{\sqrt{21}}{3}$　　C．$\dfrac{2\sqrt{7}}{3}$　　D．$\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$

14．设ΔABC中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c，若$\sin A=\sin B$，且$c^2=2a^2(1+\sin C)$，则$C=$（　）

A．$\dfrac{\pi}{6}$　　B．$\dfrac{\pi}{4}$　　C．$\dfrac{\pi}{3}$　　D．$\dfrac{3\pi}{4}$

题型五：正、余弦定理与三角函数性质的结合应用

15．（2024·湖南·模拟预测）已知函数$f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x-2\cos^2 x$.

(1)求函数$y=\log_2 f(x)$的定义域和值域;

(2)已知锐角$\triangle ABC$的三个内角分别为A，B，C，若$f\left(\dfrac{A}{2}\right)=0$，求$\dfrac{b+c}{a}$的最大值.

16．（2024·湖南长沙·一模）已知函数$f(x)=\sqrt{3}\sin\dfrac{x}{4}\cos\dfrac{x}{4}+\cos^2\dfrac{x}{4}$.

（1）若$f(x)=1$，求$\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}-x\right)$的值.

（2）在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别是a,b,c，且满足$a\cos C+\dfrac{1}{2}c=b$，求$f(B)$的取值范围.

17．在ΔABC中，角A,B,C的对边分别为a,b,c.已知向量$\vec{a}=\left(\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right),-1\right)$，向量$\vec{b}=(1,\cos A)$，且$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}$.

（1）求角A的大小；

（2）若$b=4$，$c=5$，求$\sin 2B$的值.

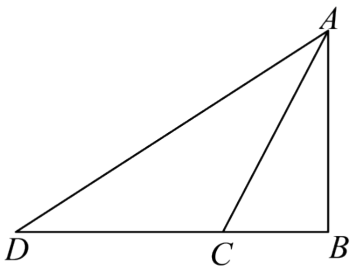
题型六：解三角形的实际应用

18．（2024·山东临沂·一模）在同一平面上有相距14公里的A,B两座炮台，A在B的正东方.某次演习时，A向西偏北θ方向发射炮弹，B则向东偏北θ方向发射炮弹，其中θ为锐角，观测回报两炮弹皆命中18公里外的同一目标，接着A改向向西偏北$\frac{\theta}{2}$方向发射炮弹，弹着点为18公里外的点M，则B炮台与弹着点M的距离为（　）

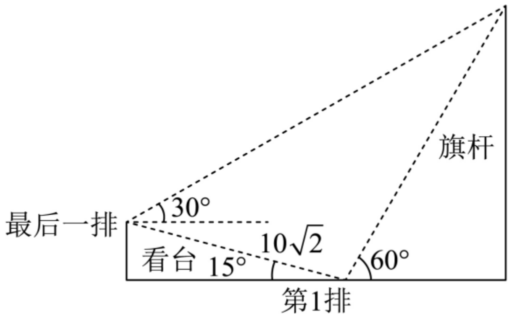
A．7公里　　B．8公里　　C．9公里　　D．10公里

19．（2024·江苏扬州·模拟预测）《海岛算经》是魏晋时期数学家刘徽所著的测量学著作，书中有一道测量山上松树高度的题目，受此题启发，小李同学打算用学到的解三角形知识测量某建筑物上面一座信号塔的高度．把塔底与塔顶分别看作点C，D，CD与地面垂直，小李先在地面上选取点A，B，测得$AB=20\sqrt{3}\text{m}$，在点A处测得点C，D的仰角分别为30°，60°，在点B处测得点D的仰角为30°，则塔高CD为_____m．

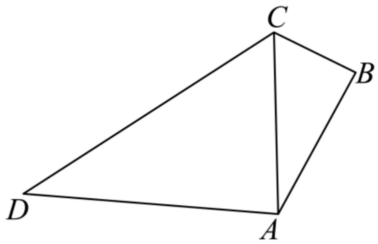
20．（2024·湖南岳阳·二模）岳阳楼地处岳阳古城西门城墙之上，下瞰洞庭，前望君山．因范仲淹的《岳阳楼记》著称于世，自古有“洞庭天下水，岳阳天下楼”之美誉．小明为了测量岳阳楼的高度AB，他首先在C处，测得楼顶A的仰角为$60°$，然后沿BC方向行走22.5米至D处，又测得楼顶A的仰角为$30°$，则楼高AB为_____米．



21．中华人民共和国国歌有 84 个字，37 小节，奏唱需要 46 秒，某校周一举行升旗仪式，旗杆正好处在坡度15°的看台的某一列的正前方，从这一列的第一排和最后一排测得旗杆顶部的仰角分别为60°和30°，第一排和最后一排的距离为$10\sqrt{2}$米（如图所示），旗杆底部与第一排在同一个水平面上.要使国歌结束时国旗刚好升到旗杆顶部，升旗手升旗的速度应为________（米/秒）



22．（2024·上海金山·二模）某临海地区为保障游客安全修建了海上救生栈道，如图，线段BC、CD是救生栈道的一部分，其中$BC=300m$，$CD=800m$，B在A的北偏东30°方向，C在A的正北方向，D在A的北偏西80°方向，且$\angle B=90^\circ$．若救生艇在A处载上遇险游客需要尽快抵达救生栈道$B-C-D$，则最短距离为__________m．(结果精确到 1 m)



题型七：倍角关系

23．（多选题）（2024·河北·三模）已知$\triangle ABC$内角A、B、C的对边分别是a、b、c，$A=2B$，则（　）

A．$a^2=c(b+c)$　　B．$\dfrac{b}{c}+\dfrac{a^2}{b^2}$的最小值为 3

C．若$\triangle ABC$为锐角三角形，则$\dfrac{c}{b}\in(1,2)$　　D．若$a=2\sqrt{6}$，$b=3$，则$c=5$

24．在锐角$\triangle ABC$中，内角A,B,C所对的边分别为a,b,c，若$a^2=b^2+bc$，则$\dfrac{c}{b}+\dfrac{2}{\cos^2 B}$的最小值为______.

25．设$\triangle ABC$的内角A,B,C所对边的长分别是a,b,c，且$A=2B,b\neq c,D$为BC边上的中点，且$AD=\sqrt{2}c$

，则 $\cos A=$_____.

26．在锐角$\triangle ABC$中，内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，满足$a^2-b^2=bc$.

(1)求证：$A=2B$；

(2)若$b=1$，求a边的范围；

(3)求$\frac{1}{\tan B}-\frac{1}{\tan A}+2\sin A$的取值范围.

题型八：三角形解的个数

27．（2024·北京朝阳·一模）在$\triangle ABC$中，$a=4\sqrt{2}$，$b=m$，$\sin A-\cos A=0$.

（1）若$m=8$，则$c=$_______；

（2）当$m=$_______（写出一个可能的值）时，满足条件的$\triangle ABC$有两个.

28．（2024·上海闵行·模拟预测）已知$\triangle ABC$中，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$的对边分别为a，b，c，若$b=4$，$c=6$，给出下列条件中：①$\angle A=30°$，②$\angle B=30°$，③$S_{\triangle ABC}=6$，能使$\triangle ABC$有两解的为________.（请写出所有正确答案的序号）

29．已知a,b,c分别是$\triangle ABC$内角A,B,C所对的边，若$b=2$，$A=\frac{\pi}{6}$，且$\triangle ABC$有唯一解，则a的取值范围为__________.

30．（2024·辽宁沈阳·模拟预测）沈阳二中北校区坐落于风景优美的辉山景区，景区内的一泓碧水蜿蜒形成了一个“秀”字，故称“秀湖”．湖畔有秀湖阁(A)和临秀亭(B)两个标志性景点，如图．若为测量隔湖相望的A、B两地之间的距离，某同学任意选定了与A、B不共线的C处，构成$\triangle ABC$，以下是测量数据的不同方案：

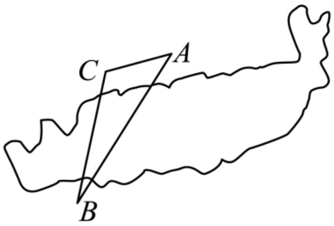
①测量$\angle A$、AC、BC；

②测量$\angle A$、$\angle B$、BC；

③测量$\angle C$、AC、BC；

④测量$\angle A$、$\angle C$、$\angle B$.

其中一定能唯一确定A、B两地之间的距离的所有方案的序号是____________.



题型九：三角形中的面积与周长问题

31．（2024·山东·模拟预测）$\triangle ABC$内角A，B，C的对边分别为a，b，c，若$b=2a\sin B$，$bc=4$，则$\triangle ABC$的面积为___________.

32．（2024·安徽滁州·模拟预测）已知$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c, $\vec{\alpha}=\left(a,c-b\right)$,

$\vec{\beta}=(\sin C+\sin B,\sin A+\sin B)$且$\vec{\alpha}\parallel\vec{\beta}$.

(1)求角C；

(2)若$c=3\sqrt{2}$,$\triangle ABC$的面积为$\frac{3\sqrt{3}}{2}$，求$\triangle ABC$的周长.

33．（2024·北京西城·二模）已知函数$f(x)=\sqrt{3}\sin x+2\cos^2\frac{x}{2}$．在$\triangle ABC$中，$f(A)=f(B)$，且$a\neq b$．

(1)求$\angle C$的大小；

(2)若$c=5$，且$\triangle ABC$的面积为$2\sqrt{3}$，求$\triangle ABC$的周长．

02

重难创新练

1．（2024·河南信阳·模拟预测）设$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$a=9,b=8,c=5$，则$\triangle ABC$的外接圆的面积为（　）

A．$\frac{225}{11}\pi$　　B．$\frac{125}{11}\pi$　　C．$\frac{123}{6}\pi$　　D．$\frac{113}{6}\pi$

2．（2024·重庆·模拟预测）记$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，若$B=\frac{2}{3}\pi,b=6,a^2+c^2=3ac$，则$\triangle ABC$的面积为（　）

A．$\frac{9\sqrt{3}}{4}$　　B．$\frac{9}{4}$　　C．$\frac{9\sqrt{3}}{2}$　　D．$\frac{9}{2}$

3．（2024·新疆喀什·三模）在$\triangle ABC$中，$AB=2$，$BC=\sqrt{7}$，$\angle BAC=120^\circ$，D是BC边一点，AD是$\angle BAC$的角平分线，则$AD=$（　）

A．$\frac{2}{3}$　　B．1　　C．2　　D．$\sqrt{3}$

4．（2024·陕西·模拟预测）在$\triangle ABC$中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c，$c(\sin A-\sin C)=(a-b)(\sin A+\sin B)$，若$\triangle ABC$的面积为$\frac{\sqrt{3}}{4}$，周长为$3b$，则$AC$边上的高为（　）

A．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$2\sqrt{3}$

5．（2024·湖南衡阳·三模）在$\triangle ABC$中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，若$b=c$，D为AC的中点，$b\sin A=2\sin\angle ABD$，则$BD=$（　）

A．1　　　　B．$\sqrt{2}$　　　　C．$\sqrt{3}$　　　　D．2

6．（2024·北京·三模）在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为正方形，$AB=4$，$PC=PD=3$，$\angle PCA=45^{\circ}$，则$\triangle PBC$的周长为（　）

A．10　　B．11　　C．$7+\sqrt{17}$　　D．12

7．（2024·陕西安康·模拟预测）在$\triangle ABC$中，三个内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，且$a\cos\left(B+\frac{\pi}{6}\right)=b\sin A$，若$a=\sqrt{3}$，$c=2$，则$b=$（　）

A．1　　B．2　　C．$2\sqrt{3}$　　D．4

8．（2024·浙江绍兴·三模）在$\triangle ABC$中，内角A，B，C所对的边分别为a，b，c．若$2b\cos(B+C)-a\cos C=c\cos A$，则$A$等于（　）

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{4}$　　C．$\frac{\pi}{3}$　　D．$\frac{2\pi}{3}$

9．**（多选题）**（2024·安徽安庆·模拟预测）在$\triangle ABC$中，面积$S=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(a^{2}+c^{2}-b^{2}\right)$，则下列说法正确的是（　）

A．$B=60^{\circ}$

B．若$\triangle ABC$是锐角三角形，则$\frac{c}{2}<a<2c$

C．若$b=2$，则$S\le\sqrt{3}$

D．若角B的平分线长为$\sqrt{3}$，则$a+4c\ge 10$

10．**（多选题）**（2024·广东佛山·一模）在$\triangle ABC$中，A,B,C所对的边为a,b,c，设BC边上的中点为M，$\triangle ABC$的面积为S，其中$a=2\sqrt{3}$，$b^{2}+c^{2}=24$，下列选项正确的是（　　）

A．若$A=\frac{\pi}{3}$，则$S=3\sqrt{3}$　　B．S的最大值为$3\sqrt{3}$

C．$AM=3$　　D．角A的最小值为$\frac{\pi}{3}$

11．**（多选题）**在$\triangle ABC$中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c，下列命题正确的是（　）

A．若$A=30^{\circ}$，$b=4$，$a=3$，则$\triangle ABC$有两解

B．若$A=60^{\circ}$，$a=2$，则$\triangle ABC$的面积最大值为$2\sqrt{3}$

C．若$a=4$，$b=5$，$c=6$，则$\triangle ABC$外接圆半径为$\frac{8\sqrt{7}}{7}$

D．若$a\cos A=b\cos B$，则$\triangle ABC$一定是等腰三角形

12．（2024·陕西铜川·模拟预测）在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别是a,b,c，已知$b=c=5$，三角形面积为12，则$a=$_____．

13．（2024·新疆·三模）在$\triangle ABC$中，$3\sin A=2\sin C$，$\cos B=\frac{1}{3}$.则$\sin A=$________．

14．（2024·四川成都·模拟预测）在$\triangle ABC$中，已知$BC=1$，$AC=2$，$\cos C=\frac{1}{4}$，则$\sin 2A=$__________.

15．（2024·湖南长沙·三模）记$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，已知$a=2,b=4$.

(1)若$\cos B+2\cos A=c\cos C$，求C的值；

(2)若D是边AB上的一点，且CD平分$\angle ACB,\cos\angle ACB=-\frac{1}{9}$，求$CD$的长.

16．（2024·江西新余·二模）在$\triangle ABC$中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，且$\triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}\left(a^2+c^2-b^2\right)\sin B$.

(1)求角B；

(2)若$\angle ABC$的平分线交AC于点D，$a=3$，$c=4$，求BD的长.

17．（2024·天津南开·二模）在$\triangle ABC$中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c.已知$c^2=a^2+b^2-4bc\cos C$，$\sin A=\cos C$.

(1)求证：$a=2c$；

(2)求$\cos C$的值；

(3)求$\cos\left(B+\frac{\pi}{3}\right)$的值.

18．（2024·天津河北·二模）在$\triangle ABC$中，角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$c=4,b=3$.

(1)若$\cos C=-\frac{1}{4}$，求a的值和$\triangle ABC$的面积；

(2)在（1）的条件下，求$\cos\left(2C+\frac{\pi}{3}\right)$的值；

(3)若$A=2B$，求a的值.

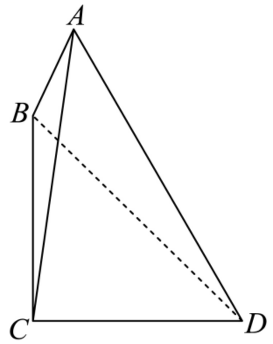
19．（2024·内蒙古呼和浩特·二模）在$\triangle ABC$中，记角A、B、C的对边分别为a、b、c，已知$\sqrt{3}a=\sqrt{3}c\cos B+c\sin B$．

(1)求角C；

(2)已知点D在AC边上，且$AD=2DC$，$BC=6$，$BD=2\sqrt{7}$，求$\triangle ABC$的面积．

03 真题实战练

1．（2024年上海高考数学真题）已知点B在点C正北方向，点D在点C的正东方向，$BC=CD$,存在点A满足$\angle BAC=16.5°,\angle DAC=37°$，则$\angle BCA=$_____(精确到0.1度)



2．（2022年高考全国甲卷数学（理）真题）已知$\triangle ABC$中，点D在边BC上，$\angle ADB=120°,AD=2,CD=2BD$．当$\dfrac{AC}{AB}$取得最小值时，$BD=$_______．

3．（2024年新课标全国Ⅰ卷数学真题）记$\triangle ABC$的内角A、B、C的对边分别为a，b，c，已知

$\sin C=\sqrt{2}\cos B$， $a^2+b^2-c^2=\sqrt{2}ab$

(1)求 B；

(2)若 $\triangle ABC$ 的面积为 $3+\sqrt{3}$，求 c.

4．（2024 年北京高考数学真题）在 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c， $\angle A$ 为钝角， $a=7$，

$\sin 2B=\frac{\sqrt{3}}{7}b\cos B$.

(1)求 $\angle A$；

(2)从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使得 $\triangle ABC$ 存在，求 $\triangle ABC$ 的面积.

条件①： $b=7$；条件②： $\cos B=\frac{13}{14}$；条件③： $c\sin A=\frac{5}{2}\sqrt{3}$.

注：如果选择的条件不符合要求，第（2）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

5．（2024 年新课标全国Ⅱ卷数学真题）记 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知

$\sin A+\sqrt{3}\cos A=2$.

(1)求 A.

(2)若 $a=2$， $\sqrt{2}b\sin C=c\sin 2B$，求 $\triangle ABC$ 的周长.

6．（2024 年天津高考数学真题）在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，已知

$\cos B=\frac{9}{16}$，$b=5,\frac{a}{c}=\frac{2}{3}$.

(1)求 a；

(2)求 $\sin A$；

(3)求 $\cos\left(B-2A\right)$ 的值.

7．（2023年高考全国甲卷数学（文）真题）记$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，已知$\frac{b^2+c^2-a^2}{\cos A}=2$.

(1)求bc；

(2)若$\frac{a\cos B-b\cos A}{a\cos B+b\cos A}-\frac{b}{c}=1$，求$\triangle ABC$面积.

8．（2023年高考全国乙卷数学（理）真题）在$\triangle ABC$中，已知$\angle BAC=120°$，$AB=2$，$AC=1$.

(1)求$\sin\angle ABC$；

(2)若D为BC上一点，且$\angle BAD=90°$，求$\triangle ADC$的面积.

9．（2023年新课标全国Ⅰ卷数学真题）已知在$\triangle ABC$中，$A+B=3C,2\sin\left(A-C\right)=\sin B$.

(1)求$\sin A$；

(2)设$AB=5$，求AB边上的高.

10．（2023年新课标全国Ⅱ卷数学真题）记$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，已知$\triangle ABC$的面积为$\sqrt{3}$，D为BC中点，且$AD=1$.

(1)若$\angle ADC=\frac{\pi}{3}$，求$\tan B$；

(2)若$b^2+c^2=8$，求b,c.

11．（2022年新高考浙江数学高考真题）在$\triangle ABC$中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c．已知

$4a=\sqrt{5}c,\cos C=\frac{3}{5}$.

(1)求$\sin A$的值；

(2)若$b=11$，求$\triangle ABC$的面积.

12．（2022年新高考全国II卷数学真题）记$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，分别以a，b，c为边长的三个正三角形的面积依次为S_1,S_2,S_3，已知$S_1-S_2+S_3=\frac{\sqrt{3}}{2},\sin B=\frac{1}{3}$.

(1)求$\triangle ABC$的面积；

(2)若$\sin A\sin C=\frac{\sqrt{2}}{3}$，求$b$.

13．（2022年高考全国乙卷数学（文）真题）记$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$\sin C\sin\left(A-B\right)=\sin B\sin\left(C-A\right)$.

(1)若$A=2B$，求C;

(2)证明：$2a^2=b^2+c^2$

14．（2022年高考全国乙卷数学（理）真题）记$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，已知$\sin C\sin(A-B)=\sin B\sin(C-A)$.

(1)证明：$2a^2=b^2+c^2$；

(2)若$a=5,\cos A=\frac{25}{31}$，求$\triangle ABC$的周长.

15．（2022年新高考北京数学高考真题）在$\triangle ABC$中，$\sin 2C=\sqrt{3}\sin C$.

(1)求$\angle C$；

(2)若$b=6$，且$\triangle ABC$的面积为$6\sqrt{3}$，求$\triangle ABC$的周长.

16．（2022年新高考全国I卷数学真题）记$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$\frac{\cos A}{1+\sin A}=\frac{\sin 2B}{1+\cos 2B}$.

(1)若$C=\frac{2\pi}{3}$，求B；

(2)求$\frac{a^2+b^2}{c^2}$的最小值.

第 04 讲　解三角形

目录

01

模拟基础练

题型一：正弦定理的应用

1．在$\triangle ABC$中，内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，且$b=\sqrt{2},a=2,B=30^{\circ}$，则$C=$______.

【答案】15°或105°

【解析】在$\triangle ABC$中，$b=\sqrt{2},a=2,B=30^{\circ}$，

则由正弦定理得$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，$\dfrac{2}{\sin A}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin 30^{\circ}}$，得$\sin A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

因为$0°<A<150°$，所以$A=45^{\circ}$或$A=135^{\circ}$，

当$A=45^{\circ}$时，$C=180^{\circ}-45^{\circ}-30^{\circ}=105^{\circ}$，

当$A=135^{\circ}$时，$C=180^{\circ}-135^{\circ}-30^{\circ}=15^{\circ}$

故答案为：15°或105°

2．在$\triangle ABC$中，内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，$\cos A=\dfrac{4}{5}$，$\cos B=\dfrac{5}{13}$，$a=2$，则$c=$________.

【答案】$\dfrac{42}{13}$/$3\dfrac{3}{13}$

【解析】在$\triangle ABC$中，由$\cos A=\dfrac{4}{5}$，$\cos B=\dfrac{5}{13}$，得$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\dfrac{3}{5},\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\dfrac{12}{13}$，

则$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{5}{13}+\dfrac{4}{5}\times\dfrac{12}{13}=\dfrac{63}{65}$，

由正弦定理理$\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{2}{\frac{3}{5}}=\dfrac{10}{3}$，所以$c=\dfrac{10}{3}\times\dfrac{63}{65}=\dfrac{42}{13}$.

故答案为：$\dfrac{42}{13}$

3．已知$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，若$\dfrac{\sin C}{\sin A+\sin B}+\dfrac{b}{a+c}=1$，则角$A=$_____.

【答案】$\dfrac{\pi}{3}$

【解析】由正弦定理角化边可知，$\dfrac{\sin C}{\sin A+\sin B}+\dfrac{b}{a+c}=\dfrac{c}{a+b}+\dfrac{b}{a+c}=1$，

整理为$b^2+c^2=a^2+bc$，即$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{bc}{2bc}=\dfrac{1}{2}$，

由于 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

故答案为：$\frac{\pi}{3}$

题型二：余弦定理的应用

4．在锐角三角形 ABC 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}\left(bc\sin B+c^2\sin C-ac\sin A\right)}{4\sin C}$，则角 $A=$____.

【答案】$\frac{\pi}{3}$

【解析】由题，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}\left(bc\sin B+c^2\sin C-ac\sin A\right)}{4\sin C}$，

故 $b\sin A=\frac{\sqrt{3}\left(b^2+c^2-a^2\right)}{2c}$，$\therefore \sin A=\frac{\sqrt{3}\left(b^2+c^2-a^2\right)}{2bc}$．$\therefore \sin A=\sqrt{3}\cos A$，

$\because 0<A<\frac{\pi}{2}$，$\therefore \tan A=\sqrt{3}$，$\therefore A=\frac{\pi}{3}$．

故答案为：$\frac{\pi}{3}$

5．在 $\triangle ABC$ 中，$\frac{\sin C}{\sin A+\sin B}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin B+\sin C}$，则角 $A=$__________.

【答案】$\frac{2\pi}{3}$

【解析】因为 $\frac{\sin C}{\sin A+\sin B}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin B+\sin C}$，由正弦定理可得 $\frac{c}{a+b}=\frac{a-b}{b+c}$，

即 $bc+c^2=a^2-b^2$，

由余弦定理 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{-bc}{2bc}=-\frac{1}{2}$，

$\because A\in(0,\pi)$，$\therefore A=\frac{2\pi}{3}$.

故答案为：$\frac{2\pi}{3}$

6．在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，若 $a:b:c=5:7:8$，则 $\triangle ABC$ 中角 B 的大小是（　）

A．135°　　B．120°　　C．90°　　D．60°

【答案】D

【解析】设 $a:b:c=5:7:8=k$，则 $a=5k,b=7k,c=8k$，

由余弦定理得 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{(5k)^2+(8k)^2-(7k)^2}{2\times 5k\cdot 8k}=\dfrac{1}{2}$，

又 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=60^\circ$.

故选：D.

题型三：判断三角形的形状

7．（2024·高三·广东广州·开学考试）在 $\triangle ABC$ 中，$\cos^2\dfrac{B}{2}=\dfrac{a+c}{2c}$，则 $\triangle ABC$ 的形状为________三角形.

【答案】直角

【解析】在 $\triangle ABC$ 中，由 $\cos^2\dfrac{B}{2}=\dfrac{a+c}{2c}$，得 $1+\cos B=1+\dfrac{a}{c}$，即 $a=c\cos B$，

由余弦定理得 $a=c\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，整理得 $a^2+b^2=c^2$，

所以 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

故答案为：直角

8．在 $\triangle ABC$ 中，有 $2\sin(A+B)-1=\sqrt{\dfrac{1-\cos 2C}{2}}$，试判断 $\triangle ABC$ 的形状_____（从“直角三角形”，“锐角三角形”，“钝角三角形”中选一个填入横线中）.

【答案】直角三角形

【解析】由二倍角公式 $\cos 2C=1-2\sin^2 C$ 可知，$\sqrt{\dfrac{1-\cos 2C}{2}}=\sqrt{\dfrac{1-(1-2\sin^2 C)}{2}}=\sqrt{\sin^2 C}=|\sin C|=\sin C$，

且注意到在 $\triangle ABC$ 中，有 $\sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C$，

因此可将已知 $2\sin(A+B)-1=\sqrt{\dfrac{1-\cos 2C}{2}}$ 转换为 $2\sin C-1=\sin C$，解得 $\sin C=1$，

因为 C 是 $\triangle ABC$ 的一个内角，所以 $C=\dfrac{\pi}{2}$，即 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

故答案为：直角三角形.

9．在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，且 $a-b=c\cdot(\cos B-\cos A)$，则 $\triangle ABC$ 的形状为________.

【答案】直角三角形或等腰三角形

【解析】用正弦定理对条件进行边角转化，结合诱导公式，两角和的正弦公式化简后进行求解.

10．对于 $\triangle ABC$，有如下四个命题:

①若 $\sin 2A=\sin 2B$，则 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，

②若 $\sin B=\cos A$，则 $\triangle ABC$ 是直角三角形

③若 $\sin^2 A+\sin^2 B<\sin^2 C$，则 $\triangle ABC$ 是钝角三角形

④若$\dfrac{a}{\cos\dfrac{A}{2}}=\dfrac{b}{\cos\dfrac{B}{2}}=\dfrac{c}{\cos\dfrac{C}{2}}$，则$\triangle ABC$是等边三角形.

其中正确的命题序号是_______

【答案】③④

【解析】对于①$\sin 2A=\sin 2B$可推出$A=B$或$A+B=\dfrac{\pi}{2}$，故不正确；

②若$B=100°, A=10°$，显然满足条件，但不是直角三角形；

③由正弦定理得$a^2+b^2-c^2<0$，所以$\cos C<0$，是钝角三角形；

④由正弦定理知$\sin\dfrac{A}{2}=\sin\dfrac{B}{2}=\sin\dfrac{C}{2}$，由于半角都是锐角，所以$\dfrac{A}{2}=\dfrac{B}{2}=\dfrac{C}{2}$，三角形是等边三角形.

故答案为：③④

11．已知ΔABC的三个内角A,B,C所对的边分别为a,b,c，满足$\cos^2 A-\cos^2 B+\cos^2 C=1+\sin A\sin C$，且$\sin A+\sin C=1$，则$\Delta ABC$的形状为

A．等边三角形

B．等腰直角三角形

C．顶角为$150°$的等腰三角形

D．顶角为$120°$的等腰三角形

【答案】D

【解析】由题$1-\sin^2 A-\left(1-\sin^2 B\right)+1-\sin^2 C=1+\sin A\sin C$

即$\sin^2 A+\sin^2 C-\sin^2 B=-\sin A\sin C$，由正弦定理及余弦定理得$\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=-\dfrac{1}{2}$

即$\cos B=-\dfrac{1}{2}$,Q $B\in(0,\pi)\therefore B=\dfrac{2}{3}\pi$

故 $\sin A+\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-A\right)=1$整理得$\sin\left(A+\dfrac{\pi}{3}\right)=1$，故$A=\dfrac{\pi}{6},\therefore B=\dfrac{\pi}{6}$

故ΔABC为顶角为$120°$的等腰三角形

故选D

题型四：正、余弦定理的综合运用

12．（2024·北京西城·三模）在$\triangle ABC$中，若$c=2$，$a=\sqrt{3}$，$\angle A=\dfrac{\pi}{6}$，则$\sin C=$_______，$b=$_______.

【答案】 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}/\dfrac{1}{3}\sqrt{3}$ $\sqrt{3}\pm\sqrt{2}$

【解析】由正弦定理$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，有$\dfrac{\sqrt{3}}{\sin\dfrac{\pi}{6}}=\dfrac{2}{\sin C}$，所以$\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

由余弦定理$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，有$\left(\sqrt{3}\right)^2=b^2+2^2-2\times 2b\cos\dfrac{\pi}{6}$，

解得$b=\sqrt{3}\pm\sqrt{2}$.

故答案为：$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\sqrt{3}\pm\sqrt{2}$.

13．（2024·贵州六盘水·三模）在$\triangle ABC$中，$AB=2$，$AC=3$，$\angle A=\dfrac{\pi}{3}$，则$\triangle ABC$外接圆的半径为（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{7}}{3}$　　　　B．$\dfrac{\sqrt{21}}{3}$　　　　C．$\dfrac{2\sqrt{7}}{3}$　　　　D．$\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$

【答案】B

【解析】因为$AB=2$，$AC=3$，$\angle A=\dfrac{\pi}{3}$，由余弦定理可得：

$BC=\sqrt{AB^2+AC^2-4AB\cdot AC\cos A}=\sqrt{4+9-2\times2\times3\times\dfrac{3}{2}}=\sqrt{7}$，

设$\triangle ABC$外接圆的半径为R，由正弦定理可得：$2R=\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{\sqrt{7}}{\dfrac{\sqrt{3}}{7}}$，则$R=\dfrac{\sqrt{21}}{3}$.

故选：B.

14．设ΔABC中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c，若$\sin A=\sin B$，且$c^2=2a^2\left(1+\sin C\right)$，则$C=$（　）

A．$\dfrac{\pi}{6}$　　　　B．$\dfrac{\pi}{4}$　　　　C．$\dfrac{\pi}{3}$　　　　D．$\dfrac{3\pi}{4}$

【答案】D

【解析】因为$\sin A=\sin B$，由正弦定理有$a=b$，

根据余弦定理有$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=2a^2-2a^2\cos C$，

且$c^2=2a^2\left(1+\sin C\right)$，故有$\sin C=-\cos C$，即$\tan C=-1$，

又$C\in\left(0,\pi\right)$，所以$C=\dfrac{3\pi}{4}$.

故选：D.

题型五：正、余弦定理与三角函数性质的结合应用

15．（2024·湖南·模拟预测）已知函数$f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x-2\cos^2x$.

(1)求函数$y=\log_2 f(x)$的定义域和值域；

(2)已知锐角$\triangle ABC$的三个内角分别为A，B，C，若$f\left(\dfrac{A}{2}\right)=0$，求$\dfrac{b+c}{a}$的最大值.

【解析】（1）$f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x-2\cos^2x=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x-1=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)-1$，

所以要使 $y=\log_2 f(x)=\log_2\left[2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-1\right]$ 有意义，

只需 $2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-1>0$，即 $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)>\frac{1}{2}$，

所以 $\frac{\pi}{6}+2k\pi<2x-\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}+2k\pi,k\in Z$，解得 $\frac{\pi}{6}+k\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z$

所以函数 $y=\log_2 f(x)$ 的定义域为 $\left(\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right),k\in Z$，

由于 $0<2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-1\le 1$，所以 $\log_2 f(x)\le\log_2 1=0$，

所以函数 $y=\log_2 f(x)$ 的值域为 $(-\infty,0]$；

（2）由于 $f\left(\frac{A}{2}\right)=2\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)-1=0$，所以 $\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，

因为 $0<A<\frac{\pi}{2}$，所以 $-\frac{\pi}{6}<A-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{3}$，所以 $A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$ 即 $A=\frac{\pi}{3}$，

由锐角 $\triangle ABC$ 可得 $\begin{cases}0<B<\frac{\pi}{2}\\0<C=\frac{2\pi}{3}-B<\frac{\pi}{2}\end{cases}$，所以 $\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{2}$，

由正弦定理可得 $\frac{b+c}{a}=\frac{\sin B+\sin C}{\sin A}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\sin B+\sin\left(\frac{\pi}{3}+B\right)\right]$

$=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{3}{2}\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B\right)=\sqrt{3}\sin B+\cos B=2\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)$，

因为 $\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{\pi}{3}<B+\frac{\pi}{6}<\frac{2\pi}{3}$，所以 $\sqrt{3}<\frac{b+c}{a}\le 2$，

所以 $\frac{b+c}{a}$ 的最大值为 2.

16．（2024·湖南长沙·一模）已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}+\cos^2\frac{x}{4}$.

（1）若 $f(x)=1$，求 $\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)$ 的值.

（2）在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别是 a,b,c，且满足 $a\cos C+\frac{1}{2}c=b$，求 $f(B)$ 的取值范围.

【解析】（1）$f(x)=\sqrt{3}\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}+\cos^2\frac{x}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}+\frac{1}{2}=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$

由 $f(x)=1$ 可得：$\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$.

$\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)=\cos\left[\pi-\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\right]=-\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=2\sin^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)-1=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$.

（2）由余弦定理得：$a\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+\frac{1}{2}c=b$，整理可得：$a^2+b^2-c^2+bc=2b^2$，

$\therefore b^2+c^2-a^2=bc$，$\therefore \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$，

又 $A\in(0,\pi)$，$\therefore A=\frac{\pi}{3}$，$\therefore B+C=\frac{2\pi}{3}$，

$\therefore 0<B<\frac{2\pi}{3}$，则 $\frac{\pi}{6}<\frac{B}{2}+\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}$，$\therefore \sin\left(\frac{B}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{1}{2},1\right)$

$\therefore f(B)=\sin\left(\frac{B}{2}+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}\in\left(1,\frac{3}{2}\right)$，即 $f(B)$ 的取值范围为 $\left(1,\frac{3}{2}\right)$.

17．在 ΔABC 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c .已知向量 $\vec{a}=\left(\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right),-1\right)$，向量 $\vec{b}=(1,\cos A)$，且 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}$.

（1）求角 A 的大小；

（2）若 $b=4$，$c=5$，求 $\sin 2B$ 的值.

【解析】（1）$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)-\cos A=\sin A\cos\frac{\pi}{6}+\cos A\sin\frac{\pi}{6}-\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A-\frac{1}{2}\cos A=\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$

$\because A\in(0,\pi)$ $\therefore A-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$ $\therefore A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，解得：$A=\frac{\pi}{3}$

（2）由余弦定理得：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=16+25-40\cos\frac{\pi}{3}=21$

$\therefore a=\sqrt{21}$

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ 得：$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{4\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{21}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$

$\because b<c$ $\therefore B<C$ $\therefore B$ 为锐角 $\therefore \cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}=\frac{\sqrt{21}}{7}$

$\therefore \sin 2B=2\sin B\cos B=2\times\frac{2\sqrt{7}}{7}\times\frac{\sqrt{21}}{7}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$

题型六：解三角形的实际应用

18．（2024·山东临沂·一模）在同一平面上有相距 14 公里的 A,B 两座炮台，A 在 B 的正东方.某次演习时，A 向西偏北 θ 方向发射炮弹，B 则向东偏北 θ 方向发射炮弹，其中 θ

为锐角，观测回报两炮弹皆命中 18 公里外的同一目标，接着 A 改向向西偏北$\frac{\theta}{2}$方向发射炮弹，弹着点为 18 公里外的点M，则B炮台与弹着点M的距离为（   ）

A．7 公里　　B．8 公里　　C．9 公里　　D．10 公里

【答案】D

【解析】依题意设炮弹第一次命中点为C，则$AB=14$，$AC=BC=AM=18$，

$\angle CBA=\angle CAB=\theta$，$\angle MAB=\frac{\theta}{2}$，

在$\triangle ABC$中$BC^2=AC^2+AB^2-2AC\cdot AB\cos\theta$，

即$18^2=14^2+18^2-2\times14\times18\cos\theta$，解得$\cos\theta=\frac{7}{18}$，

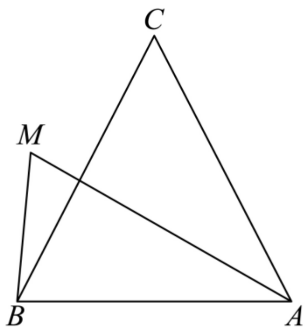
所以$\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1=\frac{7}{18}$，又$\theta$为锐角，解得$\cos\frac{\theta}{2}=\frac{5}{6}$（负值舍去），

在$\triangle ABM$中$BM^2=AM^2+AB^2-2AM\cdot AB\cos\frac{\theta}{2}$

$=18^2+14^2-2\times18\times14\times\frac{5}{6}=100$，

所以$BM=10$，即B炮台与弹着点M的距离为10公里.

故选：D



19．（2024·江苏扬州·模拟预测）《海岛算经》是魏晋时期数学家刘徽所著的测量学著作，书中有一道测量山上松树高度的题目，受此题启发，小李同学打算用学到的解三角形知识测量某建筑物上面一座信号塔的高度．把塔底与塔顶分别看作点C，D，CD与地面垂直，小李先在地面上选取点A，B，测得$AB=20\sqrt{3}$m，在点A处测得点C，D的仰角分别为30°，60°，在点B处测得点D的仰角为30°，则塔高CD为_____m．

【答案】20

【解析】在$\triangle ACD$中，延长DC与BA的延长线交于点E，如图所示.

由题意可知，$\angle CAE=30^\circ,\angle DAE=60^\circ,\angle DBA=30^\circ$，

因为小李同学根据课本书中有一道测量山上松树高度的题目受此题启发，

所以A,B,E三点在同一条直线上.

所以$\angle DAC=30^\circ,\angle DCA=120^\circ,\angle ADC=30^\circ,\angle BDA=30^\circ$，

所以$\triangle ACD,\triangle BAD$为等腰三角形，

即$|CD|=|CA|,|AD|=|AB|$.

设$|CD|=x$，即$|CA|=x$，$\angle DCA=120^{\circ}$，

在$\triangle ACD$中，由余弦定理得

$|AD|^2=|CD|^2+|CA|^2-2|CD||CA|\cos\angle DCA$，

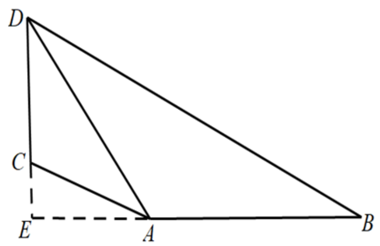
即$|AD|^2=x^2+x^2-2x\cdot x\cdot(-\dfrac{1}{2})$，$|AD|=\sqrt{3}x$，

所以$|AB|=\sqrt{3}x$，

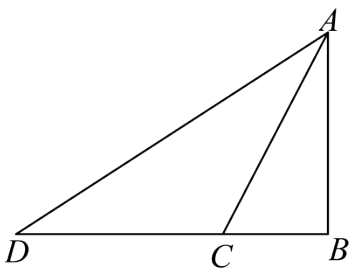
又因为$|AB|=20\sqrt{3}$，

所以$x=20$.

故答案为：20.



20．（2024·湖南岳阳·二模）岳阳楼地处岳阳古城西门城墙之上，下瞰洞庭，前望君山．因范仲淹的《岳阳楼记》著称于世，自古有“洞庭天下水，岳阳天下楼”之美誉．小明为了测量岳阳楼的高度AB，他首先在C处，测得楼顶A的仰角为$60°$，然后沿BC方向行走22.5米至D处，又测得楼顶A的仰角为$30°$，则楼高AB为_____米．



【答案】$\dfrac{45\sqrt{3}}{4}$

【解析】Rt△ABC中，$\angle ACB=60°$，$\dfrac{AB}{BC}=\tan 60°=\sqrt{3}$，$BC=\dfrac{\sqrt{3}AB}{3}$，

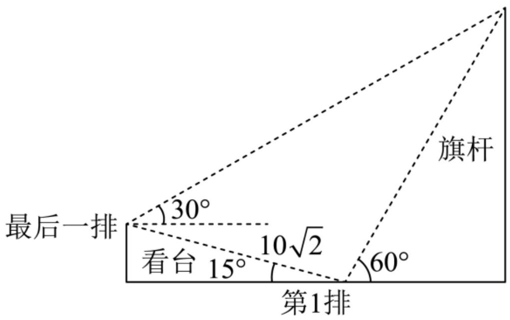
Rt△ABD中，$\angle ADB=30°$，$\dfrac{AB}{BD}=\tan 30°=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$BD=\sqrt{3}AB$，

因为$CD=22.5$米，所以$BD-BC=\sqrt{3}AB-\frac{\sqrt{3}AB}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}AB=22.5$，

解得：$AB=\frac{45\sqrt{3}}{4}$

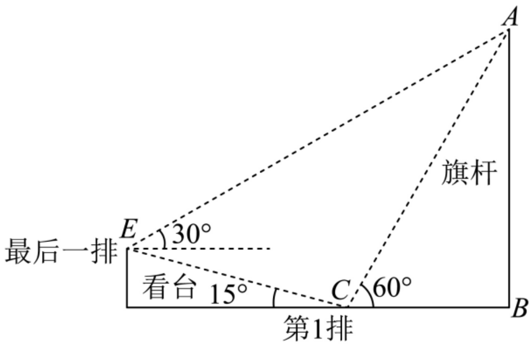
故答案为：$\frac{45\sqrt{3}}{4}$

21．中华人民共和国国歌有 84 个字，37 小节，奏唱需要 46 秒，某校周一举行升旗仪式，旗杆正好处在坡度$15°$的看台的某一列的正前方，从这一列的第一排和最后一排测得旗杆顶部的仰角分别为$60°$和$30°$，第一排和最后一排的距离为$10\sqrt{2}$米（如图所示），旗杆底部与第一排在同一个水平面上.要使国歌结束时国旗刚好升到旗杆顶部，升旗手升旗的速度应为________（米/秒）



【答案】$\frac{5\sqrt{3}}{23}$/$\frac{5}{23}\sqrt{3}$

【解析】



如图所示，依题意知$\angle AEC=45°,\angle ACE=180°-60°-15°=105°$，

$\therefore\angle EAC=180°-45°-105°=30°$，

由正弦定理知$\frac{CE}{\sin\angle EAC}=\frac{AC}{\sin\angle AEC},\therefore AC=\frac{10\sqrt{2}}{\sin 30°}\times\sin 45°=20$（米），

∴在$\text{Rt}\triangle ABC$中，$AB=AC\cdot\sin\angle ACB=20\times\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$（米），

∵国歌长度约为 46 秒，

∴升旗手升旗的速度应为$\frac{10\sqrt{3}}{46}=\frac{5\sqrt{3}}{23}$（米/秒）.

故答案为：$\frac{5\sqrt{3}}{23}$.