2024 中考数学新定义及探究题专题 《二次函数及新定义》 （学生版）

【类型 1　二次函数问题中的新定义问题】

1．（2023 春·山东济南·九年级统考期末）新定义：若一个点的纵坐标是横坐标的 2 倍，则称这个点为二倍点．若二次函数 $y=x^2-2x+c$（c 为常数）在 $-1<x<4$ 的图象上存在两个二倍点，则 c 的取值范围是（　）

A．$-5<c<4$　B．$0<c<1$　C．$-5<c<1$　D．$0<c<4$

2．（2023 春·湖北咸宁·九年级统考期中）定义：我们将顶点的横坐标和纵坐标互为相反数的二次函数称为“互异二次函数”．若互异二次函数的对称轴为直线 $x=1$ 且图象经过点（﹣1，0），则这个互异二次函数的二次项系数是（　）

A．$\frac{1}{2}$　B．$\frac{1}{4}$　C．1　D．﹣1

3．（2023 春·广西南宁·九年级统考期中）新定义：在平面直角坐标系中，对于点 P（m，n）和点 P'（m，n'），若满足 $m\geq0$ 时，$n'=n-4$；$m<0$ 时，$n'=-n$，则称点 P'（m，n'）是点 P（m，n）的限变点．例如：点 P_1（2，5）的限变点是 P_1'（2，1），点 P_2（-2，3）的限变点是 P_2'（-2，-3）．若点 P（m，n）在二次函数 $y=-x^2+4x+2$ 的图象上，则当 $-1\leq m\leq3$ 时，其限变点 P' 的纵坐标 n' 的取值范围是（　）

A．$-2\leq n'\leq2$　B．$1\leq n'\leq3$　C．$1\leq n'\leq2$　D．$-2\leq n'\leq3$

4．（2023 春·湖南长沙·九年级长沙市开福区青竹湖湘一外国语学校校考期末）定义：我们不妨把纵坐标是横坐标 2 倍的点称为“青竹点”．例如：点 $(1,2)$、$(-2.5,-5)$……都是“青竹点”．显然，函数 $y=x^2$ 的图象上有两个“青竹点”：$(0,0)$ 和 $(2,4)$．

(1)下列函数中，函数图象上存在“青竹点”的，请在横线上打“√”，不存在“青竹点”的，请打“×”．

①$y=2x-1$ ________；　②$y=-x^2+1$ ________；　③$y=x^2+2$ ________．

(2)若抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2-m+1$（m 为常数）上存在两个不同的“青竹点”，求 m 的取值范围；

(3)若函数 $y=\frac{1}{4}x^2+(b-c+2)x+a+c-3$ 的图象上存在唯一的一个“青竹点”，且当 $-1\leq b\leq2$ 时，a 的最小值为 c，求 c 的值．

5．（2023春·江苏泰州·九年级统考期中）定义：两个二次项系数之和为1，对称轴相同，且图像与y轴交点也相同的二次函数互为友好同轴二次函数.例如：$y=2x^2+4x-5$的友好同轴二次函数为$y=-x^2-2x-5$.

(1)函数$y=\frac{1}{4}x^2-2x+3$的友好同轴二次函数为_.

(2)当$-1\le x\le 4$时，函数$y=(1-a)x^2-2(1-a)x+3\ (a\ne 0且a\ne 1)$的友好同轴二次函数有最大值为$5$，求$a$的值.

(3)已知点$(m,p),(m,q)$分别在二次函数$y_1=ax^2+4ax+c(a>\frac{1}{2}且a\ne 1)$及其友好同轴二次函数$y_2$的图像上，比较$p,q$的大小，并说明理由.

6．（2023 春·浙江金华·九年级校考期中）定义：若抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴两交点间的距离为 4，称此抛物线为定弦抛物线．

(1)判断抛物线 $y=x^2+2x-3$ 是否是定弦抛物线，请说明理由；

(2)当一定弦抛物线的对称轴为直线 $x=1$，且它的图像与坐标轴的交点间的连线所围成的图形是直角三角形，求该抛物线的表达式；

(3)若定弦抛物线 $y=x^2+bx+c$（$b<0$）与 x 轴交于 A、B 两点（A 在 B 左边），当 $2\le x\le 4$ 时，该抛物线的最大值与最小值之差等于 OB 之间的距离，求 b 的值．

7．（2023 春·浙江·九年级期末）定义：若抛物线 $y_1=a_1(x+h)^2+k_1$ 与抛物线 $y_2=a_2(x+h)^2+k_2$．同时满足 $a_2=-4a_1$ 且 $k_2=-\frac{1}{4}k_1$，则称这两条抛物线是一对“共轭抛物线”．

(1)已知抛物线 $y_1=-\frac{1}{4}x^2+bx+c$ 与 $y_2=x^2-2x-3$ 是一对共轭抛物线，求 y_1 的解析式；

(2)如图 1，将一副边长为 $4\sqrt{2}$ 的正方形七巧板拼成图 2 的形式，若以 BC 中点为原点，直线 BC 为 x 轴建立平面直角坐标系，设经过点 A，E，D 的抛物线为 y_1，经过 A、B、C 的抛物线为 y_2，请立接写出 y_1、y_2 的解析式并判断它们是否为一对共轭抛物线．

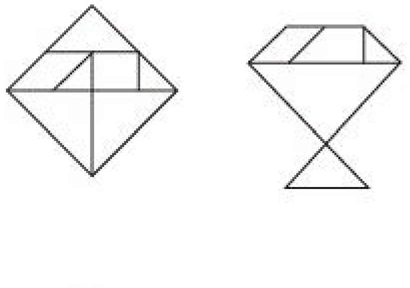


图1

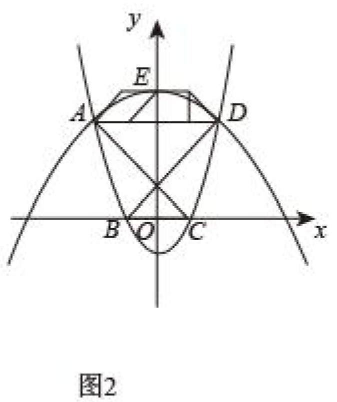


图2

8．（2023春·湖南长沙·九年级校联考期末）定义：如果抛物线$y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$与x轴交于点$A(x_1,0)$，$B(x_2,0)$，那么我们把线段AB叫做雅礼弦，AB两点之间的距离l称为抛物线的雅礼弦长．

(1)求抛物线$y=x^2-2x-3$的雅礼弦长；

(2)求抛物线$y=x^2+(n+1)x-1(1\leq n<3)$的雅礼弦长的取值范围；

(3)设m，n为正整数，且$m\neq 1$，抛物线$y=x^2+(4-mt)x-4mt$的雅礼弦长为l_1，抛物线$y=-x^2+(t-n)x+nt$的雅礼弦长为l_2，$s=l_1^2-l_2^2$，试求出s与t之间的函数关系式，若不论t为何值，$s\geq 0$恒成立，求m，n的值．

9．（2023春·河南濮阳·九年级统考期中）小明在课外学习时遇到这样一个问题：定义：如果二次函数$y=a_1x^2+b_1x+c_1$（$a_1\neq 0$）与$y=a_2x^2+b_2x+c_2$（$a_2\neq 0$）满足$a_1+a_2=0$，$b_1=b_2$，$c_1+c_2=0$，则称这两个函数互为“旋转函数”．求函数$y=x^2$-3x-2的“旋转函数”．

小明是这样思考的：由函数$y=x^2$-3x-2可知，$a_1=1$，$b_1=-3$，$c_1=-2$，根据$a_1+a_2=0$，$b_1=b_2$，$c_1+c_2=0$，求出a_2，b_2，c_2，就能确定这个函数的“旋转函数”．

请参考小明的方法解决下面问题：

(1)直接写出函数$y=x^2$-3x-2的“旋转函数”__；

(2)若函数$y=-x^2+\frac{4}{3}mx-2$与$y=x^2-2nx+n$互为“旋转函数”，求$(m+n)^{2020}$的值；

(3)已知函数$y=\frac{1}{2}(x-1)(x+4)$的图象与x轴交于点A、B两点（A在B的左边），与y轴交于点C，点A、B、C关于原点的对称点分别是A_1，B_1，C_1，试证明经过点A_1，B_1，C_1的二次函数与函数$y=\frac{1}{2}(x-1)(x+4)$互为“旋转函数”

10．（2023春·山西大同·九年级统考期中）请阅读下列材料，并完成相应的任务：

定义：我们把自变量为x的二次函数$y=ax^2+bx+c$与$y=ax^2-bx+c$（$a\neq 0$，$b\neq 0$）称为一对“亲密函数”，如$y=5x^2-3x+2$的“亲密函数”是$y=5x^2+3x+2$.

任务：

（1）写出二次函数$y=x^2+3x-4$的“亲密函数”：______；

（2）二次函数$y=x^2+3x-4$的图像与x轴交点的横坐标为1和-4，它的“亲密函数”的图像与x轴交点的横坐标为______，猜想二次函数$y=ax^2+bx+c$（$b^2-4ac>0$）的图像与x轴交点的横坐标与其“亲密函数”的图像与x轴交点的横坐标之间的关系是______；

（3）二次函数$y=x^2+bx-2021$的图像与x轴交点的横坐标为1和-2021，请利用（2）中的结论直接写出二次函数$y=4x^2-2bx-2021$的图像与x轴交点的横坐标.

【类型 2 二次函数与一次函数综合问题中的新定义问题】

1．（2023 春·九年级课时练习）定义：由 a，b 构造的二次函数 $y=ax^2+(a+b)x+b$ 叫做一次函数 $y=ax+b$ 的“滋生函数”，一次函数 $y=ax+b$ 叫做二次函数 $y=ax^2+(a+b)x+b$ 的“本源函数”（a，b 为常数，且 $a\neq 0$）．若一次函数 $y=ax+b$ 的“滋生函数”是 $y=ax^2-3x+a+1$，那么二次函数 $y=ax^2-3x+a+1$ 的“本源函数”是______．

2．（2023 春·浙江湖州·九年级统考期中）定义：如果函数图象上存在横、纵坐标相等的点，则称该点为函数的不动点．例如，点 $(1,1)$ 是函数 $y=-2x+3$ 的不动点．已知二次函数 $y=x^2+2(b+2)x+b^2$（b 是实数）．

(1)若点 $(-1,-1)$ 是该二次函数的一个不动点，求 b 的值；

(2)若该二次函数始终存在不动点，求 b 的取值范围．

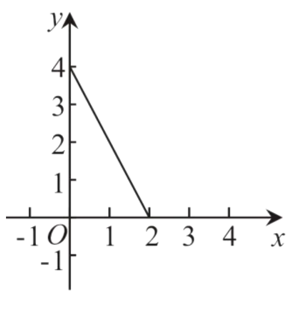
3．（2023·安徽·模拟预测）已知函数$y_1=2kx+k$与函数$y_2=x^2-2x+3$，定义"和函数"$y=y_1+y_2$.

(1)若$k=2$，则"和函数"$y=$____；

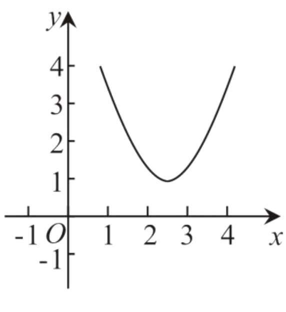
(2)若"和函数"y为$y=x^2+bx-2$，则$k=$____，$b=$____；

(3)若该"和函数"y的顶点在直线$y=-x$上，求k.

4．（2023·北京·模拟预测）城市的许多街道是相互垂直或平行的，因此，往往不能沿直线行走到达目的地，只能按直角拐弯的方式行走．可以按照街道的垂直和平行方向建立平面直角坐标系xOy，对两点$A(x_1,y_1)$和$B(x_2,y_2)$，用以下方式定义两点间距离：$d(A,B)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$.



图①



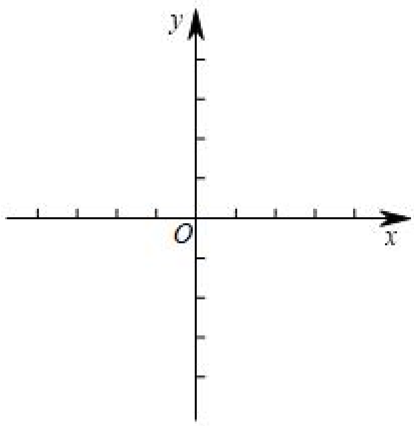
图②

(1)①已知点$A(-2,1)$，则$d(O,A)=$______.

②函数$y=-2x+4(0\le x\le 2)$的图象如图①所示，B是图象上一点，$d(O,B)=3$，求点B的坐标．

(2) 函数$y=x^2-5x+7(x\ge 0)$的图象如图②所示，D是图象上一点，求$d(O,D)$的最小值及对应的点D的坐标．

5．（2023春·上海·九年级上海市民办新复兴初级中学校考期中）我们定义【a，b，c】为函数$y=ax^2+bx+c$的“特征数”，如：函数$y=2x^2-3x+5$的“特征数”是【2，-3，5】，函数$y=x+2$的“特征数”是【0，1，2】



(1)若一个函数的“特征数”是【1，-4，1】，将此函数图像先向左平移2个单位，再向上平移1个单位，得到一个图像对应的函数“特征数”是______；

(2)将“特征数”是【0，$-\frac{\sqrt{3}}{3}$，-1】的图像向上平移2个单位，得到一个新函数，这个函数的解析式是______；

(3)在（2）中，平移前后的两个函数图像分别与y轴交于A、B两点，与直线$x=-\sqrt{3}$分别交于D、C两点，在给出的平面直角坐标系中画出图形，并求出以A、B、C、D四点为顶点的四边形的面积；

(4)若（3）中的四边形与“特征数”是【1，$-2b$，$b^2+\frac{1}{2}$】的函数图像有交点，求满足条件的实数b的取值范围．

6．（2023春·福建龙岩·九年级校考期末）定义：对于给定的两个函数，任取自变量 x 的一个值，当 $x<0$ 时，它们对应的函数值互为相反数；当 $x\geq 0$ 时，它们对应的函数值相等．我们称这样的两个函数互为相关函数．例如：一次函数 $y=x-1$，它的相关函数为 $y=\begin{cases}-x+1(x<0)\\ x-1(x\geq 0)\end{cases}$

(1)已知点 A（-2，1）在一次函数 $y=ax-3$ 的相关函数的图象上时，求 a 的值．

(2)已知二次函数 $y=-x^2+4x-\frac{1}{2}$．当点 B（m，$\frac{5}{2}$）在这个函数的相关函数的图象上时，求 m 的值．

7．（2023春·江苏南通·九年级统考期末）定义：若图形 M 与图形 N 有且只有两个公共点，则称图形 M 与图形 N 互为“双联图形”，即图形 M 是图形 N 的“双联图形”，图形 N 是图形 M 的“双联图形”．

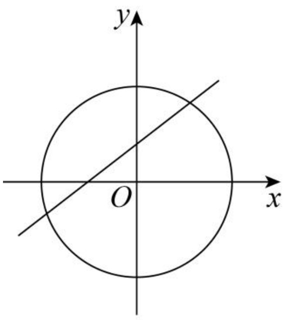


图1

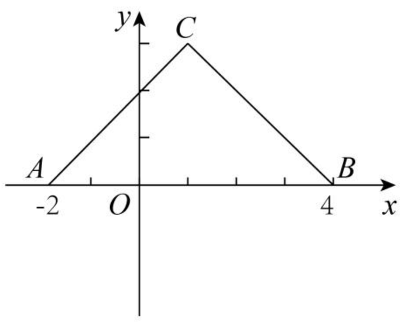
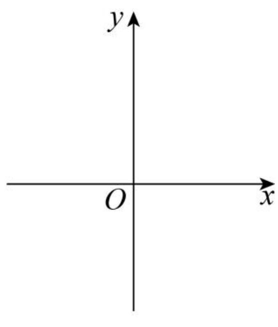


图2



备用图

(1)若直线 $y=-x+b$ 与抛物线 $y=x^2+1$ 互为“双联图形”，且直线 $y=-x+b$ 不是双曲线 $y=\frac{1}{x}$ 的“双联图形”，求实数 b 的取值范围；

(2)如图2，已知 $A(-2,0)$，$B(4,0)$，$C(1,3)$ 三点．若二次函数 $y=a(x+1)^2+3$ 的图象与 $\triangle ABC$ 互为“双联图形”，直接写出 a 的取值范围．

8．（2023春·北京·九年级北京市第三中学校考期中）定义：在平面直角坐标系中，图形 G 上点 P（x，y）的纵坐标 y 与其横坐标 x 的差 $y-x$ 称为 P 点的“坐标差”，而图形 G 上所有点的“坐标差”中的最大值称为图形 G 的“特征值”．

（1）①点 A（1，3）的“坐标差”为 _____；

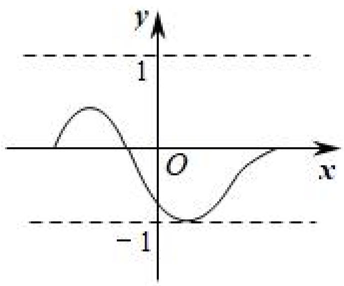
②抛物线 $y=-x^2+3x+3$ 的“特征值”为 _____；

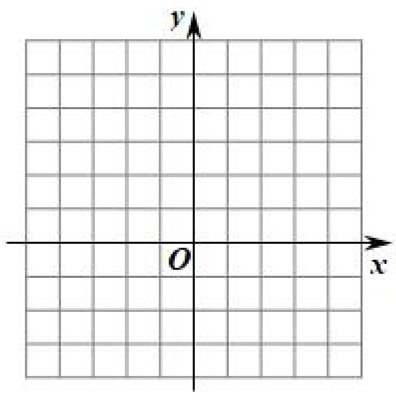
（2）某二次函数 $y=-x^2+bx+c$（$c\neq0$）的“特征值”为1，点 B（m，0）与点 C 分别是此二次函数的图象与 x 轴和 y 轴的交点，且点 B 与点 C 的“坐标差”相等．

①直接写出 $m=$_____；（用含 c 的式子表示）

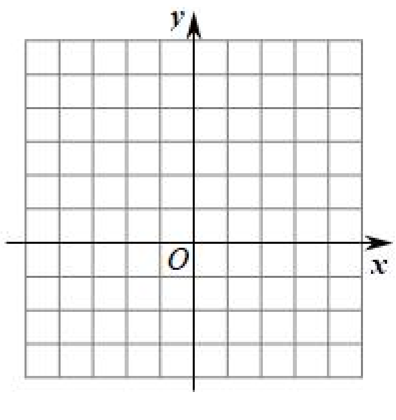
②求 b 的值．

9．（2023春·北京·九年级人大附中校考期中）对某一个函数给出如下定义：若存在实数 $M>0$，对于任意的函数值 y，都满足 $-M\leq y\leq M$，则称这个函数是有界函数，在所有满足条件的 M 中，其最小值称为这个函数的边界值．例如，如图中的函数是有界函数，其边界值是 1．





备用图



备用图

(1)直接写出有界函数$y=2x+1(-4<x\le 2)$的边界值；

(2)已知函数$y=2x^2+bx+c(m\le x\le n,m<n)$是有界函数，且边界值为3，直接写出$n-m$的最大值；

(3)将函数$y=2x^2(-1\le x\le k,k\ge 0)$的图象向下平移$k$个单位，得到的函数的边界值是$t$，直接写出$k$的取值范围，使得$\frac{3}{2}\le t\le 2$.

10．（2023春·湖南长沙·九年级校考期中）若定义：若一个函数图像上存在纵坐标是横坐标2倍的点，则把该函数称为“明德函数”，该点称为“明德点”，例如：“明德函数”$y=x+1$，其“明德点”为（1，2）.

(1)①判断：函数$y=2x+3$ __________“明德函数”（填“是”或“不是”）；

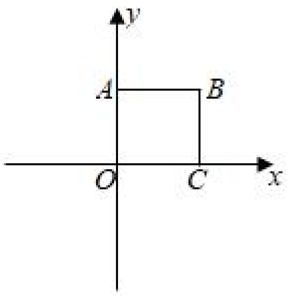
②函数$y=x^2$的图像上的明德点是 ___________；

(2)若抛物线$y=(m-1)x^2+mx+\frac{1}{4}m$上有两个“明德点”，求 m 的取值范围；

(3)若函数$y=x^2+(m-k+2)x+\frac{n}{4}-\frac{k}{2}$的图像上存在唯一的一个“明德点”，且当$-1\le m\le 3$时，$n$的最小值为$k$，求$k$的值.

【类型 3　二次函数与几何图形综合问题中的新定义问题】

1．（2023 春·四川绵阳·九年级统考期末）定义：我们将顶点的横坐标和纵坐标互为相反数的二次函数称为“互异二次函数”．如图，在正方形$OABC$中，点$A(0,2)$，点$C(2,0)$，则互异二次函数$y=(x-m)^2-m$与正方形$OABC$有交点时m的最大值和最小值分别是（　）



A．4，-1　　B．$\frac{5-\sqrt{17}}{2}$，-1　　C．4，0　　D．$\frac{5+\sqrt{17}}{2}$，-1

2．（2023 春·山东济南·九年级统考期末）定义：关于 x 轴对称且对称轴相同的两条抛物线叫作“同轴对称抛物线”．例如：$y_1=(x-1)^2-2$ 的“同轴对称抛物线”为 $y_2=-(x-1)^2+2$．

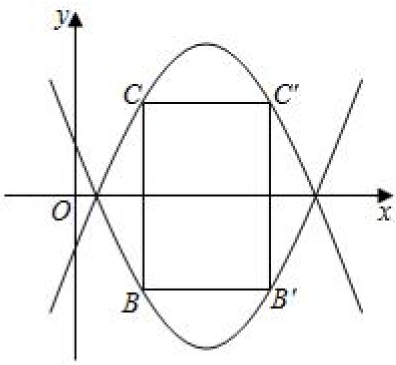
（1）请写出抛物线 $y_1=(x-1)^2-2$ 的顶点坐标_；及其“同轴对称抛物线”$y_2=-(x-1)^2+2$ 的顶点坐标_；

（2）求抛物线 $y=-2x^2+4x+3$ 的“同轴对称抛物线”的解析式．

（3）如图，在平面直角坐标系中，点 B 是抛物线 L：$y=ax^2-4ax+1$ 上一点，点 B 的横坐标为 1，过点 B 作 x 轴的垂线，交抛物线 L 的“同轴对称抛物线”于点 C，分别作点 B、C 关于抛物线对称轴对称的点B'、C'，连接 BC、CC'、$B'C'$、BB'．

①当四边形$BB'C'C$为正方形时，求 a 的值．

②当抛物线 L 与其“同轴对称抛物线”围成的封闭区域内（不包括边界）共有 11 个横、纵坐标均为整数的点时，直接写出 a 的取值范围．



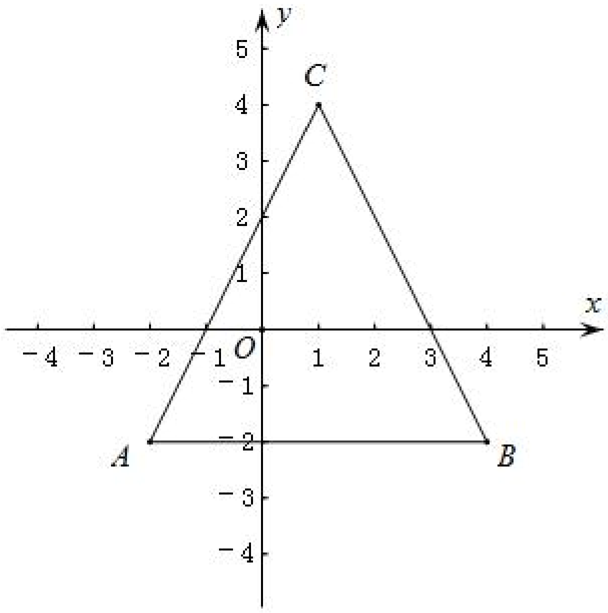
3．（2023春·北京门头沟·九年级大峪中学校考期中）定义：对于平面直角坐标系xOy上的点$P(a,b)$和抛物线$y=x^2+ax+b$，我们称$P(a,b)$是抛物线$y=x^2+ax+b$的相伴点，抛物线$y=x^2+ax+b$是点$P(a,b)$的相伴抛物线．如图，已知点$A(-2,-2)$，$B(4,-2)$，$C(1,4)$．

（1）点A的相伴抛物线的解析式为______；过A，B两点的抛物线$y=x^2+ax+b$的相伴点坐标为______；

（2）设点 $P(a,b)$在直线AC上运动：

①点$P(a,b)$的相伴抛物线的顶点都在同一条抛物线Ω上，求抛物线Ω的解析式．

②当点$P(a,b)$的相伴抛物线的顶点落在$\triangle ABC$内部时，请直接写出a的取值范围．



4．（2023春·浙江绍兴·九年级校联考期中）定义：如图1，抛物线$y=ax^2+bx+c(a\neq0)$与x轴交于A，B两点，点P在该抛物线上(P点与A． B两点不重合)，如果△ABP中PA与PB两条边的三边满足其中一边是另一边$2\sqrt{2}$倍，则称点P为抛物线$y=ax^2+bx+c(a\neq0)$的“好”点．

（1）命题：P(0，3)是抛物线$y=-x^2+2x+3$的“好”点．该命题是_____（ 真或假）命题．

（2）如图2，已知抛物线C:$y=ax^2+bx(a<0)$与x轴交于A，B两点，点P(1，2)是抛物线C的“好”点，求抛物线C的函数表达式．

（3）在（2）的条件下，点Q在抛物线C上，求满足条件$S_{\triangle ABQ}=S_{\triangle AB}P$的Q点(异于点P)的坐标．

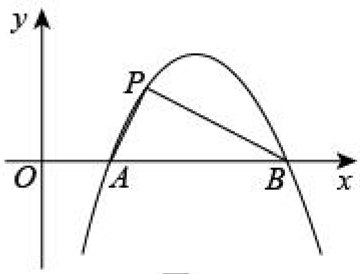


图1

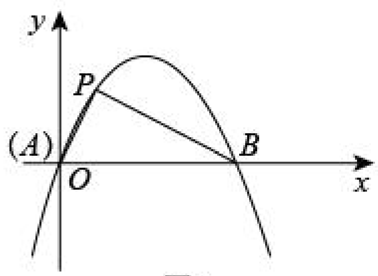
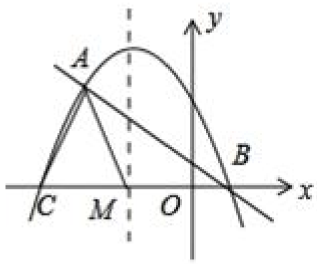


图2

5．（2023·安徽安庆·九年级统考期末）在平面直角坐标系中，我们定义直线 y=ax-a 为抛物线 $y=ax^2+bx+c$（a、b、c 为常数，a≠0）的“梦想直线”；有一个顶点在抛物线上，另有一个顶点在 y 轴上的三角形为其“梦想三角形”．已知抛物线 $y=-\frac{2\sqrt{3}}{3}x^2-\frac{4\sqrt{3}}{3}x+2\sqrt{3}$ 与其“梦想直线”交于 A、B 两点（点 A 在点 B 的左侧），与 x 轴负半轴交于点 C．

（1）填空：该抛物线的“梦想直线”的解析式为______，点 A 的坐标为______，点 B 的坐标为______．

（2）如图，点 M 为线段 CB 上一动点，将△ACM 以 AM 所在直线为对称轴翻折，点 C 的对称点为 N，若△AMN 为该抛物线的“梦想三角形”，求点 M 的坐标．



6.（2023春·湖南长沙·九年级统考期中）定义：在线段MN上存在点P、Q将线段MN分为相等的三部分，则称P、Q为线段MN的三等分点.

已知一次函数y＝﹣x+3的图象与x、y轴分别交于点M、N，且A、C为线段MN的三等分点（点A在点C的左边）.

（1）直接写出点A、C的坐标；

（2）①二次函数的图象恰好经过点O、A、C，试求此二次函数的解析式；

②过点A、C分别作AB、CD垂直x轴于B、D两点，在此抛物线O、C之间取一点P（点P不与O、C重合）作PF⊥x轴于点F，PF交OC于点E，是否存在点P使得AP＝BE？若存在，求出点P的坐标？若不存在，试说明理由；

（3）在（2）的条件下，将△OAB沿AC方向移动到△O'A'B'（点A'在线段AC上，且不与C重合），△O'A'B'与△OCD重叠部分的面积为S，试求当S＝$\frac{3}{8}$时点A'的坐标.

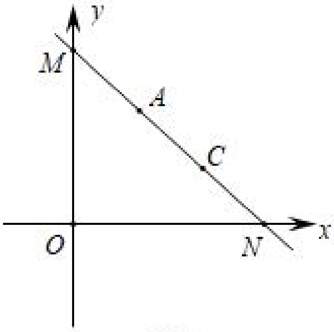


图1

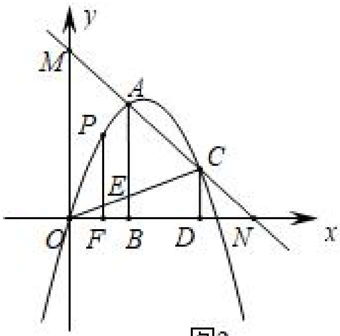


图2

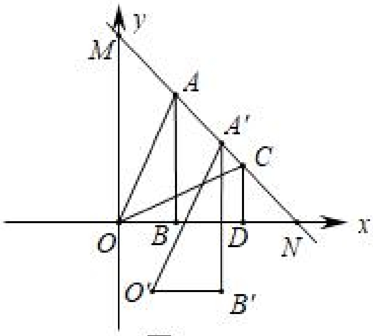


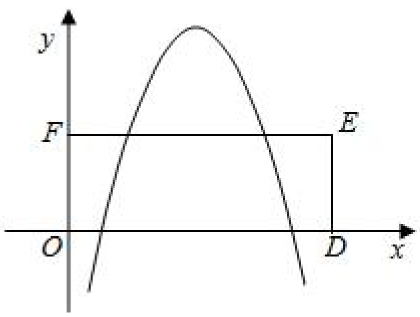
图3

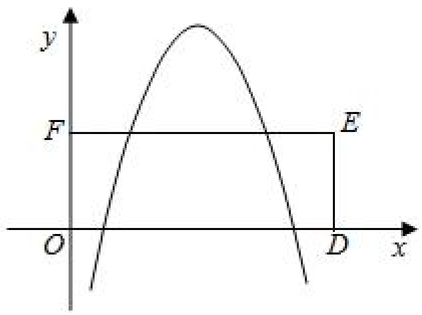
7.（2023 春·安徽合肥·九年级统考期中）定义：在平面直角坐标系中，图形 G 上点 P（x，y）的纵坐标 y 与其横坐标 x 的差 y﹣x 称为点 P 的“坐标差”，而图形 G 上所有点的“坐标差”中的最大值称为图形 G 的“特征值”.

（1）求点 A（2，1）的“坐标差”和抛物线 $y=-x^2+3x+4$ 的“特征值”.

（2）某二次函数＝$-x^2+bx+c$（$c\neq0$）的“特征值”为﹣1，点 B 与点 C 分别是此二次函数的图象与 x 轴和 y 轴的交点，且点 B 与点 C 的“坐标差”相等，求此二次函数的解析式.

（3）如图所示，二次函数 $y=-x^2+px+q$ 的图象顶点在“坐标差”为 2 的一次函数的图象上，四边形 DEFO 是矩形，点 E 的坐标为（7，3），点 O 为坐标原点，点 D 在 x 轴上，当二次函数 $y=-x^2+px+q$ 的图象与矩形的边有四个交点时，求 p 的取值范围.





8．（2023·浙江杭州·九年级统考期中）新定义：我们把两个面积相等但不全等的三角形叫做偏等积三角形．

（1）**初步尝试**

如图 1，已知等腰直角△ABC，∠ACB=90°，请将它分成两个三角形，使它们成为偏等积三角形．

（2）**理解运用**

如图 2，已知△ACD 为直角三角形，∠ADC=90°，以 AC，AD 为边向外作正方向 ACFB 和正方形 ADGE，连接 BE，求证：△ACD 与△ABE 为偏等积三角形．

（3）**综合探究**

如图 3，二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-5$ 的图象与 x 轴交于 A，B 两点，与 y 轴交于点 C，在二次函数的图象上是否存在一点 D，使△ABC 与△ABD 是偏等积三角形？若存在，请求出点 D 的坐标；若不存在，请说明理由．

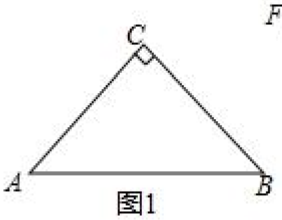


图1

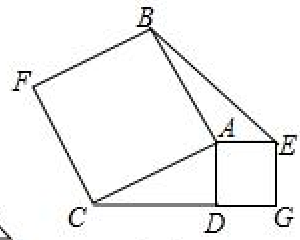


图2

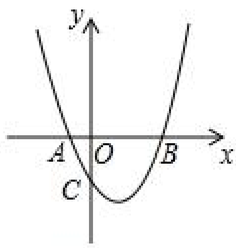


图3

9．（2023春·江西赣州·九年级统考期末）我们给出如下定义：在平面直角坐标系 xOy 中，如果一条抛物线平移后得到的抛物线经过原抛物线的顶点，那么这条抛物线叫做原抛物线的过顶抛物线．

如下图，抛物线 F_2 都是抛物线 F_1 的过顶抛物线，设 F_1 的顶点为 A，F_2 的对称轴分别交 F_1、F_2 于点 D、B，点 C 是点 A 关于直线 BD 的对称点．

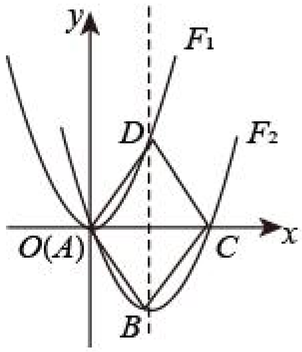


图1

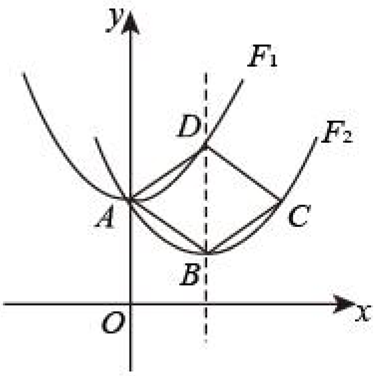


图2

（1）如图 1，如果抛物线 $y=x^2$ 的过顶抛物线为 $y=ax^2+bx$，C（2，0），那么

①a=_，b=_．

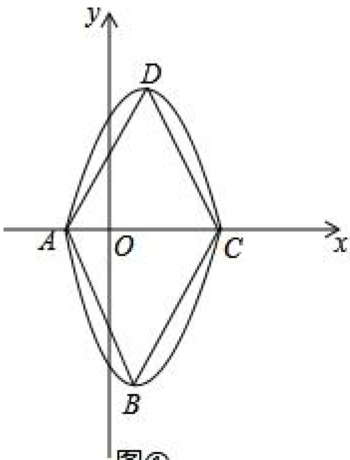
②如果顺次连接 A、B、C、D 四点，那么四边形 ABCD 为（ ）

A．平行四边形 B．矩形 C．菱形 D．正方形

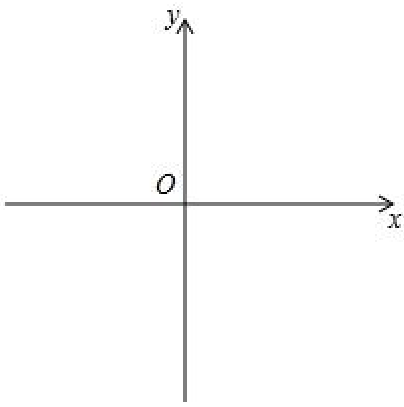
（2）如图 2，抛物线 $y=ax^2+c$ 的过顶抛物线为 F_2，B（2，c－1）．求四边形 ABCD 的面积．

（3）如果抛物线 $y=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x+\frac{7}{3}$ 的过顶抛物线是 F_2，四边形 ABCD 的面积为 $2\sqrt{3}$，请直接写出点 B 的坐标．

10．（2023春·江西赣州·九年级校考期末）定义：在平面直角坐标系中，抛物线 $y=ax^{2}+bx+c$（$a\neq0$）与直线 $y=m$ 交于点A、C（点C在点A右边）将抛物线 $y=ax^{2}+bx+c$ 沿直线 $y=m$ 翻折，翻折前后两抛物线的顶点分别为点B、D．我们将两抛物线之间形成的封闭图形称为惊喜线，四边形ABCD称为惊喜四边形，对角线BD与AC之比称为惊喜度（Degreeofsurprise），记作 $|D|=\frac{BD}{AC}$．



图①



图②

（1）图①是抛物线 $y=x^{2}-2x-3$ 沿直线 $y=0$ 翻折后得到惊喜线．则点A坐标_____，点B坐标_____，惊喜四边形ABCD属于所学过的哪种特殊平行四边形_____，$|D|$为_____．

（2）如果抛物线 $y=m(x-1)^{2}-6m$（$m>0$）沿直线 $y=m$ 翻折后所得惊喜线的惊喜度为1，求m的值．

（3）如果抛物线 $y=(x-1)^{2}-6m$ 沿直线 $y=m$ 翻折后所得的惊喜线在 $m-1\le x\le m+3$ 时，其最高点的纵坐标为16，求m的值并直接写出惊喜度 $|D|$

2024 中考数学新定义及探究题专题 《二次函数及新定义》 （解析版）

【类型 1　二次函数问题中的新定义问题】

1.（2023 春·山东济南·九年级统考期末）新定义：若一个点的纵坐标是横坐标的 2 倍，则称这个点为二倍点．若二次函数$y=x^2-2x+c$（c 为常数）在$-1<x<4$的图象上存在两个二倍点，则 c 的取值范围是（　）

A．$-5<c<4$　B．$0<c<1$　C．$-5<c<1$　D．$0<c<4$

【答案】D

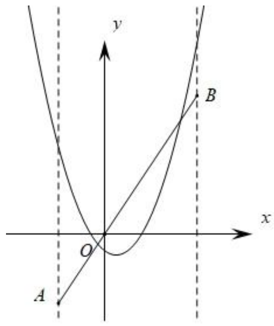
【分析】由点的纵坐标是横坐标的 2 倍可得二倍点在直线$y=2x$上，由$-1<x<4$可得二倍点所在线段AB的端点坐标，结合图象，通过求抛物线与线段的交点求解．

【详解】解：由题意可得二倍点所在直线为$y=2x$，

将$x=-1$代入$y=2x$得$y=-2$，

将$x=4$代入$y=2x$得$y=8$，

设$A(-1,-2)$，$B(4,8)$，如图，



联立$y=2x$与$y=x^2-2x+c$，得方程$x^2-2x+c=2x$，

即$x^2-4x+c=0$

∵抛物线与直线$y=2x$有两个交点，

∴ $\Delta=4^2-4c>0$，

解得$c<4$，

当直线$x=-1$和直线$x=4$与抛物线交点在点 A，B上方时，抛物线与线段AB有两个交点，

把$x=-1$代入$y=x^2-2x+c$，得$y=3+c$，

把$x=4$代入$y=x^2-2x+c$得$y=8+c$，

$\therefore \begin{cases}3+c>-2\\8+c>8\end{cases}$，

解得$c>0$，

$\therefore 0<c<4$.

故选 D.

【点睛】本题考查二次函数图象与正比例函数图象的交点问题，解题关键掌握函数与方程及不等式的关系，将代数问题转化为图形问题求解.

2.（2023 春·湖北咸宁·九年级统考期中）定义：我们将顶点的横坐标和纵坐标互为相反数的二次函数称为“互异二次函数”．若互异二次函数的对称轴为直线 $x=1$ 且图象经过点（－1，0），则这个互异二次函数的二次项系数是（　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{4}$　　C．1　　D．－1

【答案】B

【分析】根据函数的对称轴和互异二次函数的特点计算即可；

【详解】由题可知：此函数的横坐标与纵坐标互为相反数，且对称轴为直线 $x=1$ 且图象经过点（－1，0），设此函数为$y=ax^2+bx+c$，

$\therefore \begin{cases}-\frac{b}{2a}=1\\0=a-b+c\\-1=a+b+c\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a=\frac{1}{4}\\b=-\frac{1}{2}\\c=-\frac{3}{4}\end{cases}$，

∴此函数的二次项系数为$\frac{1}{4}$；

故选 B.

【点睛】本题主要考查了二次函数的性质，准确计算是解题的关键.

3.（2023 春·广西南宁·九年级统考期中）新定义：在平面直角坐标系中，对于点 P（m，n）和点 P'（m，n'），若满足 $m\geq 0$ 时，$n'=n-4$；$m<0$ 时，$n'=-n$，则称点 P'（m，n'）是点 P（m，n）的限变点．例如：点 P_1（2，5）的限变点是 P_1'（2，1），点 P_2（-2，3）的限变点是 P_2'

(-2，-3)．若点 P（m，n）在二次函数 y=-x^2+4x+2 的图象上，则当-1≤m≤3 时，其限变点 P' 的纵坐标 n'的取值范围是（　）

A．$-2 \le n' \le 2$ B．$1 \le n' \le 3$ C．$1 \le n' \le 2$ D．$-2 \le n' \le 3$

【答案】D

【分析】根据新定义得到当 m≥0 时，n'=-m^2+4m+2-4=-（m-2）^{2}+2，在 0≤m≤3 时，得到-2≤n'≤2；当 m＜0 时，n'=m^2-4m-2=（m-2）^{2}-6，在-1≤m＜0 时，得到-2≤n'≤3，即可得到限变点 P'的纵坐标 n'的取值范围是-2≤n'≤3．

【详解】解：由题意可知，

当 m≥0 时，n'=-m^2+4m+2-4=-（m-2）^{2}+2，

∴当 0≤m≤3 时，-2≤n'≤2，

当 m＜0 时，n'=m^2-4m-2=（m-2）^{2}-6，

∴当-1≤m＜0 时，-2＜n'≤3，

综上，当-1≤m≤3 时，其限变点 P'的纵坐标 n'的取值范围是-2≤n'≤3，

故选：D．

【点睛】本题主要考查了二次函数图象上点的坐标特征，解题的关键是根据限变点的定义得到 n'关于 m 的函数．

4．(2023 春·湖南长沙·九年级长沙市开福区青竹湖湘一外国语学校校考期末）定义：我们不妨把纵坐标是横坐标 2 倍的点称为“青竹点”．例如：点 $(1,2)$、$(-2.5,-5)$……都是“青竹点”．显然，函数 $y=x^2$ 的图象上有两个“青竹点”：$(0,0)$ 和 $(2,4)$．

(1)下列函数中，函数图象上存在“青竹点”的，请在横线上打“√”，不存在“青竹点”的，请打“×”．

①$y=2x-1$________；②$y=-x^2+1$________；③$y=x^2+2$________．

(2)若抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2-m+1$（m 为常数）上存在两个不同的“青竹点”，求 m 的取值范围；

(3)若函数 $y=\frac{1}{4}x^2+(b-c+2)x+a+c-3$ 的图象上存在唯一的一个“青竹点”，且当 $-1 \le b \le 2$ 时，a 的最小值为 c，求 c 的值．

【答案】(1)×；√；×

(2) $m<3$

(3) $c=\frac{3}{2}$

【分析】(1）根据“青一函数”的定义直接判断即可；

（2）根据题意得出关于x的一元二次方程，再根据根的判别式得出关于 m 的不等式，即可求解；

（3）根据题意得出关于x的一元二次方程，再根据根的判别式得出关于 a 的二次函数，利用二次函数最值求解即可．

【详解】(1）解：①令$2x-1=2x$，方程无解，

∴函数$y=2x-1$图像上不存在“青竹点”，故答案为：×；

②令$-x^2+1=2x$，

解得：$x_1=-1+\sqrt{2}$，$x_2=-1-\sqrt{2}$，

∴函数$y=-x^2+1$图像上存在“青竹点”$(-1+\sqrt{2},-2+2\sqrt{2})$和$(-1-\sqrt{2},-2-2\sqrt{2})$，故答案为：√；

③令$x^2+2=2x$，方程无解，

∴函数$y=x^2+2$图像上不存在“青竹点”，故答案为：×；

（2）解：由题意得$-\frac{1}{2}x^2-m+1=2x$，

整理，得$x^2+4x+2m-2=0$，

∵抛物线$y=-\frac{1}{2}x^2-m+1$（m 为常数）上存在两个不同的“青竹点”，

∴$\Delta=4^2-4(2m-2)>0$，

解得$m<3$；

（3）解：由题意得$\frac{1}{4}x^2+(b-c+2)x+a+c-3=2x$

整理，得$x^2+4(b-c)x+4(a+c-3)=0$

∵函数$y=\frac{1}{4}x^2+(b-c+2)x+a+c-3$的图像上存在唯一的一个“青竹点”，

∴$\Delta=[4(b-c)]^2-4\times1\times4(a+c-3)=0$

整理，得$a=(b-c)^2-c+3$

∴当$b=c$时，a的最小值为$3-c$，

∵当$-1\le b\le2$时，a的最小值为c，

∴$3-c=c$

∴$c=\frac{3}{2}$，

【点睛】本题属于函数背景下新定义问题，主要考查二次函数的性质，二次函数与一元二次方程的关系，解题关键是掌握二次函数图象与系数的关系，掌握二次函数与方程的关系，一元二次方程根的判别式.

5．（2023春·江苏泰州·九年级统考期中）定义：两个二次项系数之和为1，对称轴相同，且图像与y轴交点也相同的二次函数互为友好同轴二次函数.例如：$y=2x^2+4x-5$的友好同轴二次函数为$y=-x^2-2x-5$.

(1)函数$y=\frac{1}{4}x^2-2x+3$的友好同轴二次函数为_.

(2)当$-1\le x\le4$时，函数$y=(1-a)x^2-2(1-a)x+3\ (a\ne0$且$a\ne1)$的友好同轴二次函数有最大值为$5$，求$a$的值.

(3)已知点$(m,p),(m,q)$分别在二次函数$y_1=ax^2+4ax+c(a>\frac{1}{2}$且$a\ne1)$及其友好同轴二次函数$y_2$的图像上，比较$p,q$的大小，并说明理由.

【答案】(1) $y=\frac{3}{4}x^2-6x+3$；

(2) $a=\frac{1}{4}$或-2；

(3)当$m=-4$或$m=0$时，$p=q$；当$m<-4$或$m>0$时，$p>q$；当$-4<m<0$时，$p<q$

【分析】(1) 根据友好同轴二次函数的定义，找出$y=\frac{1}{4}x^2-2x+3$的友好同轴二次函数即可；

（2）根据友好同轴二次函数的定义，找出$y=(1-a)x^2-2(1-a)x+3$的友好同轴二次函数，判断函数图像开口方向，利用函数的对称轴和自变量范围进行最大值讨论；

（3）先根据友好同轴二次函数的定义，找出$y_1=ax^2+4ax+c$的友好同轴二次函数，再把两点代入p,q，作差后比较大小，为含参数a的二次不等式，求解m的范围即可．

【详解】（1）设友好同轴二次函数为$y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，

由函数$y=\frac{1}{4}x^2-2x+3$可知，

对称轴为直线$x=-\frac{-2}{2\times\frac{1}{4}}=4$，与$y$轴交点为$(0,3)$，

$\therefore a=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$，$c=3$，对称轴为直线$x=-\frac{b}{2\times\frac{3}{4}}=4$，

$\therefore b=-6$，

$\therefore$友好同轴二次函数为$y=\frac{3}{4}x^2-6x+3$；

（2）由函数$y=(1-a)x^2-2(1-a)x+3\ (a\neq 0$ 且$a\neq 1)$可求得，

该函数的友好同轴二次函数为$y=ax^2-2ax+3=a(x-1)^2+3-a$；

①当$a>0$时，$x=4$时，$y_{\max}=a(4-1)^2+3-a=8a+3=5$，

解得：$a=\frac{1}{4}$；

②当$a<0$时，$x=1$时，$y_{\max}=a(1-1)^2+3-a=3-a=5$，

解得：$a=-2$；

综上所述，$a=\frac{1}{4}$或-2；

（3）由函数$y_1=ax^2+4ax+c(a>\frac{1}{2}$且$a\neq 1)$可求得，

该函数的友好同轴二次函数为$y_2=(1-a)x^2+4(1-a)x+c$，

把$(m,p),(m,q)$分别代入y_1,y_2可得，

$p=am^2+4am+c$，$q=(1-a)m^2+4(1-a)m+c$，

则$p-q=am^2+4am+c-[(1-a)m^2+4(1-a)m+c]=(2a-1)m^2+4(2a-1)m$，

$\because a>\frac{1}{2}$，

$\therefore (2a-1)>0$，

①当$p-q>0$时，$p>q$，即$(2a-1)m^2+4(2a-1)m>0$，

$m^2+4m>0$，

解得：$m<-4$或$m>0$；

②当$p-q<0$时，$p<q$，即$(2a-1)m^2+4(2a-1)m<0$，

$m^2+4m<0$，

解得：$-4<m<0$；

③当$p-q=0$时，$p=q$，即$(2a-1)m^2+4(2a-1)m=0$，

$m^2+4m=0$，

解得：$m=-4$或$m=0$；

综上所述，当$m=-4$或$m=0$时，$p=q$；

当$m<-4$或$m>0$时，$p>q$；

当$-4<m<0$时，$p<q$.

【点睛】本题考查二次函数的性质以及新定义问题，掌握二次函数的基本性质以及研究手段，准确根据题意求出符合要求的友好同轴二次函数是解题关键.

6.（2023春·浙江金华·九年级校考期中）定义：若抛物线$y=ax^2+bx+c$与x轴两交点间的距离为4，称此抛物线为定弦抛物线.

(1)判断抛物线$y=x^2+2x-3$是否是定弦抛物线，请说明理由；

(2)当一定弦抛物线的对称轴为直线$x=1$，且它的图像与坐标轴的交点间的连线所围成的图形是直角三角形，求该抛物线的表达式；

(3)若定弦抛物线$y=x^2+bx+c$（$b<0$）与x轴交于A、B两点（A在B左边），当$2\le x\le 4$时，该抛物线的最大值与最小值之差等于OB之间的距离，求b的值.

【答案】(1)是定弦抛物线，理由见解析

(2)$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)(x-3)$或$y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)(x-3)$

(3)$b=-4$或$-\frac{28}{3}$

【分析】（1）令$y=0$，求出与x轴的交点坐标，可判断；

（2）分开口向上向下讨论，利用定弦抛物线的定义和对称轴可求出与x轴交点坐标，用相似求出与y轴交点坐标，代入可得答案；

（3）根据对称轴和所给范围分情况讨论即可.

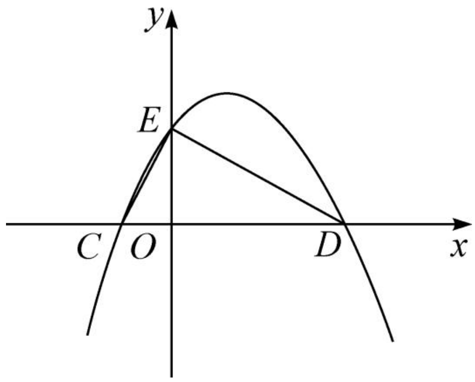
【详解】（1）解：当$y=0$时，$x^2+2x-3=0$，

解得：$x_1=1$，$x_2=-3$，

则$|x_1-x_2|=4$，

即该抛物线是定弦抛物线；

(2)：当该抛物线开口向下时，如图所示.



∵该定弦抛物线的对称轴为直线 $x=1$，

设 $C(m,0),D(n,0)$

则 $\begin{cases} n-m=4 \\ n+m=2 \end{cases}$

解得：$\begin{cases} m=-1 \\ n=3 \end{cases}$

∴ C（﹣1，0），D（3，0），

∵△CED 为直角三角形

∴由题意可得∠CED＝90°，

∵EO⊥CD，

∴△CEO∽△EDO，

∴OE^2＝$OC\cdot OD$＝3，

∴E（0，$\sqrt{3}$）

设该定弦抛物线表达式为 $y=a(x+1)(x-3)$，

把 E（0，$\sqrt{3}$）代入求得 $a=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

∴该定弦抛物线表达式为 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)(x-3)$，

当该抛物线开口向上时，

同理可得该定弦抛物线表达式为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)(x-3)$，

∴综上所述，该定弦抛物线表达式为$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)(x-3)$或$y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)(x-3)$；

（3）解：若$-\frac{b}{2}\le 2$，则在 $2\le x\le 4$ 中，

当 $x=4$ 时该定弦抛物线取最大值，当 $x=2$ 时该定弦抛物线取最小值．

∴$16+4b+c-(4+2b+c)=-\frac{b}{2}+2$，

解得：$b=-4$，

∵$-\frac{b}{2}\le 2$，

∴$b\ge -4$，即 $b=-4$，

若$2\le -\frac{b}{2}\le 3$，则在 $2\le x\le 4$ 中，

当 $x=4$ 时该定弦抛物线取最大值，当 $x=-\frac{b}{2}$时该定弦抛物线取最小值．

∴$16+4b+c-\frac{4c-b^2}{4}=-\frac{b}{2}+2$，

解得：$b_1=-4$，$b_2=-14$，

∵$2\le -\frac{b}{2}\le 3$，

∴$-6\le b\le -4$，

∴$b_1=-4$，$b_2=-14$（舍去），

若$3<-\frac{b}{2}\le 4$，则在 $2\le x\le 4$ 中，

当 $x=2$ 时该定弦抛物线取最大值，当 $x=-\frac{b}{2}$时该定弦抛物线取最小值．

∴$4+2b+c-\frac{4c-b^2}{4}=-\frac{b}{2}+2$，

解得：$b=-5\pm\sqrt{17}$，

∵$3<-\frac{b}{2}\leq 4$，

∴﹣8≤b<﹣6，

∴b=﹣5$\pm\sqrt{17}$不合题意，舍去，

若$-\frac{b}{2}$>4，则在2≤x≤4中，

当x=2时该定弦抛物线取最大值，当x=4时该定弦抛物线取最小值.

∴4+2b+c-(16+4b+c)=$-\frac{b}{2}$+2，

解得：b=-$\frac{28}{3}$，

∵$-\frac{b}{2}$>4，

∴b<﹣8，

∴ b=﹣$\frac{28}{3}$，

∴综上所述b=﹣4或$-\frac{28}{3}$.

【点睛】本题考查了二次函数的综合性质，包括与x轴交点问题，最值问题，以及和相似的结合，准确地理解定弦抛物线的定义以及分类讨论是解决本题的关键.

7.（2023春·浙江·九年级期末）定义：若抛物线$y_1=a_1(x+h)^2+k_1$与抛物线$y_2=a_2(x+h)^2+k_2$. 同时满足$a_2=-4a_1$且$k_2=-\frac{1}{4}k_1$，则称这两条抛物线是一对“共轭抛物线”.

(1)已知抛物线$y_1=-\frac{1}{4}x^2+bx+c$与$y_2=x^2-2x-3$是一对共轭抛物线，求y_1的解析式；

(2)如图1，将一副边长为$4\sqrt{2}$的正方形七巧板拼成图2的形式，若以BC中点为原点，直线BC为x轴建立平面直角坐标系，设经过点A，E，D的抛物线为y_1，经过A、B、C的抛物

线为y_2，请立接写出y_1、y_2的解析式并判断它们是否为一对共轭抛物线.

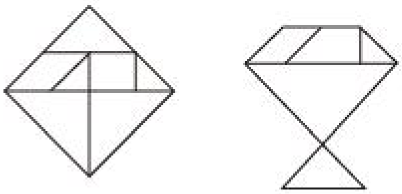


图1

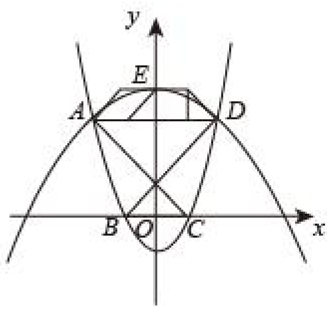


图2

【答案】(1) $y_1=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{63}{4}$

(2) $y_1=-\frac{1}{8}x^2+8$，$y_2=\frac{1}{2}x^2-2$，y_1、y_2是一对共轭抛物线

【分析】（1）将$y_2=x^2-2x-3$化作顶点式，可求出a_2，h和k_2的值，根据“共轭抛物线”的定义可求出a_1，h和k_1的值，进而求出y_1的解析式；

（2）根据七巧板各个图形之间的关系可求出各个图形的边长，进而可表示点A，B，C，D，E的坐标，分别求出y_1和y_2的解析式，再根据“共轭抛物线”的定义可求解.

【详解】（1）解：$y_2=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$，

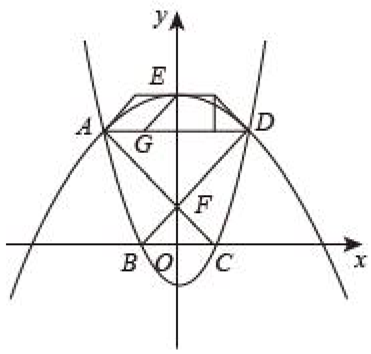
$\therefore a_2=1$，$h=-1$，$k_2=-4$，

$\because$抛物线$y_1=-\frac{1}{4}x^2+bx+c$与$y_2=x^2-2x-3$是一对共轭抛物线，

$\therefore a_1=\frac{a_2}{-4}=-\frac{1}{4}$，$h=-1$且$k_1=-4k_1=16$，

$y_1=-\frac{1}{4}(x-1)^2+16=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{63}{4}$.

（2）解：如图，



由题意得，$DF=AF=4\sqrt{2}$，则$AG=GF=DG=GF=4$，$EG=2$，$HG=2$，$BC=4$，$OF=2$，

∵点O为BC的中点，∴$BO=OC=2$，

∴$B(-2,0)$，$C(2,0)$，$A(-4,6)$，$D(4,6)$，$E(0,8)$，

∴可设抛物线$y_1=a_1(x+4)(x-4)+6$，与抛物线$y_2=a_2(x+2)(x-2)$，

∴$-16a_1+6=8$，$(-4+2)(-4-2)a_2=6$，解得：$a_1=-\frac{1}{8}$，$a_2=\frac{1}{2}$，

∴抛物线$y_1=\frac{1}{8}(x+4)(x-4)+6=-\frac{1}{8}x^2+8$，

抛物线$y_2=\frac{1}{2}(x+2)(x-2)=\frac{1}{2}x^2-2$，

∴$a_1=-\frac{1}{8}$，$h=0$，$k_1=8$，$a_2=\frac{1}{2}$，$h=0$，$k_2=-2$，

∵$-\frac{1}{8}\times(-4)=\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{4}\times 8=-2$，

∴满足$a_2=-4a_1$且$k_2=-\frac{1}{4}k_1$，

∴y_1、y_2是一对共轭抛物线．

【点睛】本题属于二次函数的新定义类问题，主要考查利用待定系数法求函数表达式，二次函数的顶点式，一般式及交点式三种方式的变换，熟知相关运算是解题关键．

8．（2023春·湖南长沙·九年级校联考期末）定义：如果抛物线$y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$与x轴交于点$A(x_1,0)$，$B(x_2,0)$，那么我们把线段AB叫做雅礼弦，AB两点之间的距离l称为抛物线

的雅礼弦长.

(1)求抛物线$y=x^2-2x-3$的雅礼弦长;

(2)求抛物线$y=x^2+(n+1)x-1(1\le n<3)$的雅礼弦长的取值范围;

(3)设m,n为正整数,且$m\ne 1$,抛物线$y=x^2+(4-mt)x-4mt$的雅礼弦长为l_1,抛物线$y=-x^2+(t-n)x+nt$的雅礼弦长为l_2,$s=l_1^2-l_2^2$,试求出s与t之间的函数关系式,若不论t为何值,$s\ge 0$恒成立,求m,n的值.

【答案】(1)4

(2)$2\sqrt{2}\le AB<2\sqrt{5}$

(3)$m=2$,$n=2$或$m=4$,$n=1$

【分析】(1)根据定义求得抛物线与 x 轴的交点坐标即可求解;

(2)根据(1)的方法求得$AB=\sqrt{(n+1)^2+4}$,根据n的范围,即可求解.

(3)根据题意,分别求得l_1,l_2,根据$s=l_1^2-l_2^2$,求得出s与t之间的函数关系式,根据$s\ge 0$恒成立,可得$mn=4$,根据m,n为正整数,且$m\ne 1$,即可求解.

【详解】(1)解:$x^2-2x-3=0$,

$(x-3)(x+1)=0$,

$\therefore x_1=3$,$x_2=-1$,

$\therefore$雅礼弦长$AB=4$;

(2)$x^2+(n+1)x-1=0$,$A(x_1,0)B(x_1,0)$,

$\therefore AB=|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$,

$\because \varDelta=(n+1)^2+4>0$,$\begin{cases}x_1+x_2=-(n+1)\\ x_1x_2=-1\end{cases}$,

$\therefore AB=\sqrt{(n+1)^2+4}$,

$\because 1 \le n < 3$,

$\therefore$当$n = 1$时，AB最小值为$2\sqrt{2}$，

当$n = 3$时，AB最大值小于$2\sqrt{5}$，

$\therefore 2\sqrt{2} \le AB < 2\sqrt{5}$;

（3）由题意，令$y = x^2 + (4 - mt)x - 4mt = 0$,

$\therefore x_1 + x_2 = mt - 4$, $x_1x_2 = -4mt$,

则$l_1^2 = (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = (mt + 4)^2$,

同理$l_2^2 = (n + t)^2$,

$s = (mt + 4)^2 - (n + t)^2 = (m^2 - 1)t^2 + (8m - 2n)t + (16 - n^2)$,

$\because m^2 - 1 \ne 0$,

$\therefore$要不论t为何值，$S \ge 0$恒成立，

即：$(m^2 - 1)t^2 + (8m - 2n)t + (16 - n^2) \ge 0$恒成立，

由题意得：$m^2 - 1 > 0$, $\Delta = (8m - 2n)^2 - 4(m^2 - 1)(16 - n^2) \le 0$,

解得：$(mn - 4)^2 \le 0$, $mn = 4$

$\because m$, n为正整数，且$m \ne 1$,

则$m = 2$, $n = 2$或$m = 4$, $n = 1$.

【点睛】本题考查了抛物线与坐标轴交点问题，一元二次方程根与系数的关系，综合运用以上知识是解题的关键．

9．（2023 春·河南濮阳·九年级统考期中）小明在课外学习时遇到这样一个问题：定义：如果二次函数 $y=a_1x^2+b_1x+c_1$（$a_1\neq0$）与 $y=a_2x^2+b_2x+c_2$（$a_2\neq0$）满足 $a_1+a_2=0$，$b_1=b_2$，$c_1+c_2=0$，则称这两个函数互为“旋转函数”．求函数 $y=x^2-3x-2$ 的“旋转函数”．

小明是这样思考的：由函数 $y=x^2-3x-2$ 可知，$a_1=1$，$b_1=-3$，$c_1=-2$，根据 $a_1+a_2=0$，$b_1=b_2$，$c_1+c_2=0$，求出 a_2，b_2，c_2，就能确定这个函数的“旋转函数”．

请参考小明的方法解决下面问题：

(1)直接写出函数 $y=x^2-3x-2$ 的“旋转函数”__；

(2)若函数 $y=-x^2+\frac{4}{3}mx-2$ 与 $y=x^2-2nx+n$ 互为“旋转函数”，求$(m+n)^{2020}$的值；

(3)已知函数 $y=\frac{1}{2}(x-1)(x+4)$ 的图象与 x 轴交于点 A、B 两点（A 在 B 的左边），与 y 轴交于点 C，点 A、B、C 关于原点的对称点分别是 A_1，B_1，C_1，试证明经过点 A_1，B_1，C_1 的二次函数与函数 $y=\frac{1}{2}(x-1)(x+4)$ 互为“旋转函数”

【答案】(1)$y=-x^2-3x+2$；

(2)1

(3)见解析

【分析】（1）根据 $y=a_1x^2+b_1x+c_1$（$a_1\neq0$，a_1，b_1，c_1 是常数）与 $y=a_2x^2+b_2x+c_2$（$a_2\neq0$，a_2，b_2，c_2 是常数）满足 $a_1+a_2=0$，$b_1=b_2$，$c_1+c_2=0$，则称这两个函数互为“旋转函数”，可得 a_2，b_2，c_2，可得旋转函数；

（2）根据 $y=a_1x^2+b_1x+c_1$（$a_1\neq0$，a_1，b_1，c_1 是常数）与 $y=a_2x^2+b_2x+c_2$（$a_2\neq0$，a_2，b_2，c_2 是常数）满足 $a_1+a_2=0$，$b_1=b_2$，$c_1+c_2=0$，则称这两个函数互为“旋转函数”，可得 a_2，b_2，c_2，根据负数奇数次幂是负数，可得答案；

（3）根据自变量与函数值的对应关系，可得 A、B、C 的坐标，根据关于原点对称的点横坐标互为相反数，纵坐标互为相反数，可得 A_1，B_1，C_1，根据待定系数法，可得函数解析式；根据 $y=a_1x^2+b_1x+c_1$（$a_1\neq0$，a_1，b_1，c_1 是常数）与 $y=a_2x^2+b_2x+c_2$（$a_2\neq0$，a_2，b_2，c_2 是常数）满足 $a_1+a_2=0$，$b_1=b_2$，$c_1+c_2=0$，则称这两个函数互为“旋转函数”，可得 a_2，b_2，c_2，可得旋转函数.

【详解】（1）解：由 $y=x^2-3x-2$ 函数可知 $a_1=1$，$b_1=-3$，$c_1=-2$.

由 $a_1+a_2=0$，$b_1=b_2$，$c_1+c_2=0$，得

$a_2=-1$，$b_2=-3$，$c_2=2$.

函数 $y=x^2+3x-2$ 的“旋转函数”为 $y=-x^2-3x+2$；

（2）由 $y=-x^2+\frac{4}{3}mx-2$ 与 $y=x^2-2nx+n$ 互为“旋转函数“，

得$-2n=\frac{4}{3}m$，$-2+n=0$.

解得 $n=2$，$m=-3$.

当 $m=2$，$n=-3$ 时，$(m+n)^{2020}=(2-3)^{2020}=(-1)^{2020}=1$；

（3）∵当 $y=0$ 时，$\frac{1}{2}(x-1)(x+4)=0$，解得 $x=-1$，$x=4$，

∴$A(-1,0)$，$B(4,0)$.

当 $x=0$ 时，$y=\frac{1}{2}\times(-4)=-2$，即 $C(0,-2)$.

由点 A，B，C 关于原点的对称点分别是 A_1，B_1，C_1，

得 $A_1(1,0)$，$B_1(-4,0)$，$C_1(0,2)$.

设过点 A_1，B_1，C_1 的二次函数 $y=a(x+1)(x-4)$，将 $C_1(0,2)$ 代入，

解得$a=-\frac{1}{2}$，

∴过点 A_1，B_1，C_1 的二次函数$y=-\frac{1}{2}(x+1)(x-4)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2$

而$y=\frac{1}{2}(x-1)(x+4)=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x-2$

∴$a_1+a_2=0$，$b_1=b_2$，$c_1+c_2=0$，

∴经过点 A_1、B_1、C_1 的二次函数与函数$y=\frac{1}{2}(x-1)(x+4)$互为“旋转函数”.

【点睛】本题考查了二次函数的综合题：熟练掌握关于原点对称的两点的坐标特征；会求二次函数图象与坐标轴的交点和待定系数法求二次函数解析式；对新定义的理解能力.

10.（2023 春·山西大同·九年级统考期中）请阅读下列材料，并完成相应的任务：

定义：我们把自变量为x的二次函数$y=ax^2+bx+c$与$y=ax^2-bx+c$（$a\neq0$，$b\neq0$）称为一对“亲密函数”，如$y=5x^2-3x+2$的“亲密函数”是$y=5x^2+3x+2$.

任务：

（1）写出二次函数$y=x^2+3x-4$的“亲密函数”：______；

（2）二次函数$y=x^2+3x-4$的图像与x轴交点的横坐标为 1 和-4，它的"亲密函数"的图像与x轴交点的横坐标为______，猜想二次函数$y=ax^2+bx+c$（$b^2-4ac>0$）的图像与x轴交点的横坐标与其"亲密函数"的图像与x轴交点的横坐标之间的关系是______；

（3）二次函数$y=x^2+bx-2021$的图像与x轴交点的横坐标为 1 和-2021，请利用（2）中的结论直接写出二次函数$y=4x^2-2bx-2021$的图像与x轴交点的横坐标.

【答案】（1）$y=x^2-3x-4$；（2）4 和-1；互为相反数；（3）二次函数$y=4x^2-2bx-2021$的图像与x轴交点的横坐标为$-\frac{1}{2}$和$\frac{2021}{2}$

【分析】（1）根据二次函数$y=x^2+3x-4$的"亲密函数"定义把一次项系数变为相反数即可；
（2）利用"亲密函数"建立 $y=0$ 时方程，解方程，得出"亲密函数"与 x 轴交点横坐标，与原函数与 x 轴交点横坐标比较，得出规律即可；
（3）先将函数变形，发现与"亲密函数"类似，根据原函数与 x 轴交点横坐标得出"亲密函数"与 x 轴交点横坐标，利用 $2x$ 等于交点横坐标，求出 x 得出所求函数与 x 轴的交点横坐标即可.

【详解】解：（1）二次函数$y=x^2+3x-4$的"亲密函数"为$y=x^2-3x-4$，

故答案为：$y=x^2-3x-4$；

（2）$x^2-3x-4=0$，解得$x=4, x=-1$，

它的"亲密函数"的图像与x轴交点的横坐标为 4 和-1，

∴二次函数$y=ax^2+bx+c$（$b^2-4ac>0$）的图像与x轴交点的横坐标与其"亲密函数"的图像与x轴交点的横坐标之间的关系是互为相反数；

故答案为 4 和-1；互为相反数；

（3）$y=4x^2-2bx-2021=(2x)^2-b(2x)-2021$，

∵二次函数$y=x^2+bx-2021$的图像与x轴交点的横坐标为 1 和-2021，

∴二次函数$y=x^2-bx-2021$的图像与x轴交点的横坐标为-1 和2021，

∴$y=4x^2-2bx-2021=(2x)^2-b(2x)-2021$图像与$x$轴交点的横坐标为-1 和$2021$，

∴2*x*=-1,2*x*=2021，

∴$x=-\frac{1}{2}$，$x=\frac{2021}{2}$，

∴二次函数$y=4x^2-2bx-2021$的图像与x轴交点的横坐标为$-\frac{1}{2}$和$\frac{2021}{2}$.

【点睛】本题考查新定义函数，仔细阅读题目，抓住实质，抛物线与 *x* 轴交点横坐标和一元二次方程的根，利用“亲密函数”变形得出新函数图像与 *x* 轴的交点横坐标是解题关键.

【类型 2 二次函数与一次函数综合问题中的新定义问题】

1．(2023 春·九年级课时练习）定义：由 *a*，*b* 构造的二次函数$y=ax^2+(a+b)x+b$叫做一次函数 *y*＝*ax*＋*b* 的“滋生函数”，一次函数 *y*＝*ax*＋*b* 叫做二次函数$y=ax^2+(a+b)x+b$的“本源函数”（*a*，*b* 为常数，且$a\neq 0$）．若一次函数 *y*＝*ax*＋*b* 的“滋生函数”是$y=ax^2-3x+a+1$，那么二次函数$y=ax^2-3x+a+1$的“本源函数”是______．

【答案】$y=-2x-1$

【分析】由“滋生函数”和“本源函数”的定义，运用待定系数法求出函数$y=ax^2-3x+a+1$的本源函数．

【详解】解：由题意得$\begin{cases}-3=a+b\\ a+1=b\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=-2\\ b=-1\end{cases}$

∴函数$y=ax^2-3x+a+1$的本源函数是$y=-2x-1$.

故答案为：$y=-2x-1$.

【点睛】本题考查新定义运算下的一次函数和二次函数的应用，解题关键是充分理解新定义“本源函数”.

2．(2023 春·浙江湖州·九年级统考期中）定义：如果函数图象上存在横、纵坐标相等的点，

则称该点为函数的不动点．例如，点$(1,1)$是函数$y=-2x+3$的不动点．已知二次函数$y=x^2+2(b+2)x+b^2$（b是实数）．

(1)若点$(-1,-1)$是该二次函数的一个不动点，求b的值；

(2)若该二次函数始终存在不动点，求b的取值范围．

【答案】(1)$1+\sqrt{3}$或$1-\sqrt{3}$

(2)$b\geq-\frac{3}{4}$

【分析】（1）根据“不动点”定义，建立方程求解即可；

（2）根据不动点的定义求出函数，再根据判别式计算即可．

【详解】（1）解：依题意把点$(-1,-1)$代入解析式$y=x^2+2(b+2)x+b^2$，

得$-1=1-2(b+2)+b^2$，化简得：$b^2-2b-2=0$，解得：$b_1=1+\sqrt{3},b_2=1-\sqrt{3}$；

（2）解：设点(t,t)是函数$y=x^2+2(b+2)x+b^2$的一个不动点，

则有$t=t^2+2(b+2)t+b^2$，化简得，$t^2+(2b+3)t+b^2=0$，

∵关于t的方程有实数解，

∴$\Delta=(2b+3)^2-4b^2\geq0$，解得：$b\geq-\frac{3}{4}$．

【点睛】本题考查了二次函数与新定义“不动点”应用，涉及解一元二次方程、一元二次方程根的情况与判别式等知识，解题的关键是理解并利用新定义解决问题．

3．（2023·安徽·模拟预测）已知函数$y_1=2kx+k$与函数$y_2=x^2-2x+3$，定义“和函数”$y=y_1+y_2$．

(1)若$k=2$，则“和函数”$y=$____；

(2)若“和函数”y为$y=x^2+bx-2$，则$k=$____，$b=$____；

(3)若该“和函数”y的顶点在直线$y=-x$上，求k．

【答案】(1) x^2+2x+5.

(2) -5，-12.

(3) $k=3$ 或 -1.

【分析】(1) 将 $k=2$ 代入函数 $y_1=2kx+k$ 中得出函数 $y_1=4x+2$，再利用 $y=y_1+y_2$ 即可得出结论；

(2) y 的解析式为 $y=y_1+y_2=x^2+(2k-2)x+k+3$，又 $y=x^2+bx-2$，利用两者相等即可得出结论；

(3) 先得出和函数 $y=y_1+y_2=x^2+(2k-2)x+k+3=(x+k-1)^2-k^2+3k+2$，进而根据顶点在直线 $y=-x$ 上得出 $-k^2+3k+2=-(k-1)$，即可得出结论.

【详解】(1) 解：当 $k=2$ 时，$y_1=2kx+k=4x+2$，

∵函数 $y_2=x^2-2x+3$，此时和函数 $y=y_1+y_2$，

∴ $y=4x+2+x^2-2x+3=x^2+2x+5$，

故答案为：x^2+2x+5.

(2) 解：∵函数 $y_1=2kx+k$ 与函数 $y_2=x^2-2x+3$，和函数 $y=y_1+y_2$，

∴和函数 y 的解析式为 $y=y_1+y_2=x^2+(2k-2)x+k+3$，

∵和函数 y 的解析式为 $y=x^2+bx-2$，

∴ $b=2k-2$，$k+3=-2$，

∴ $k=-5$，$b=-12$，

故答案为：-5，-12.

(3) 解：由题意得和函数为

$y=y_1+y_2=x^2+(2k-2)x+k+3$，