湖北省武汉市重点中学5G联合体2024-2025学年高二上学期期中考试数学试卷

考试时间：2024年11月8日　　试卷满分：150分

祝考试顺利

注意事项：

1.答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.

2.选择题的作答：每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.

3.非选择题的作答：用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内．写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.

4.考试结束后，请将本试卷和答题卡一并上交.

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．直线$y=\tan\frac{\pi}{4}$的倾斜角为（　）

A．0　　B．$\frac{\pi}{4}$　　C．$\frac{\pi}{2}$　　D．π

2．已知空间向量$\vec{a}=(1,-3,5),\vec{b}=(2,x,y)$，且$\vec{a}\parallel\vec{b}$，则$x+y=$（　）

A．10　　B．6　　C．4　　D．-4

3．已知直线$l_1:a^2x+y+1=0$与直线$l_2:x-3ay+7=0$，则“$a=3$”是“$l_1\perp l_2$”的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

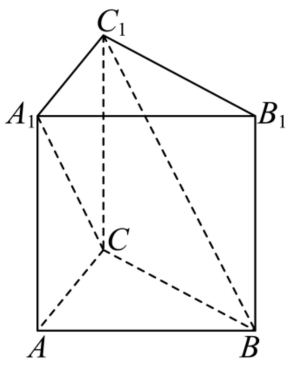
4．已知向量$\vec{a}=(0,0,2)$，$\vec{b}=(-1,1,1)$，向量$\vec{a}+\vec{b}$在向量$\vec{a}$上的投影向量为（　　）.

A．$(0,0,3)$　　B．$(0,0,6)$

C．$(-3,3,9)$　　D．$(3,-3,-9)$

5．如图，在直三棱柱$ABC-AB_1C_1$中，$AC=2$，$BC=3$，$CC_1=4$，$\angle ACB=90°$，则

BC_1与A_1C所成的角的余弦值为（　）



A．$\dfrac{3\sqrt{2}}{10}$　　B．$\dfrac{\sqrt{82}}{10}$　　C．$\dfrac{\sqrt{305}}{25}$　　D．$\dfrac{8\sqrt{5}}{25}$

6．已知椭圆$C:x^2+4y^2=16$的左、右焦点分别为F_1,F_2,P是C上的任意一点，则错误的是（　）

A．C的离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$|PF_1|+|PF_2|=8$

C．$|PF_1|$的最大值为$4+2\sqrt{3}$　　D．使$\angle F_1PF_2$为直角的点P有 2 个

7．已知互不相同的 20 个样本数据，若去掉其中最大和最小的数据，设剩下的 18 个样本数据的方差为s_1^2，平均数为$\overline{x_1}$；去掉的两个数据的方差为s_2^2，平均数为$\overline{x_2}$；原样本数据的方差为s^2，平均数为$\overline{x}$，若$\overline{x_1}=\overline{x_2}$，则下列选项错误的是（　）

A．$\overline{x}=\overline{x_1}$

B．剩下的 18 个样本数据与原样本数据的中位数不变

C．$10s^2=9s_1^2+s_2^2$

D．剩下 18 个数据的 22%分位数大于原样本数据的 22%分位数

8．已知P为棱长为 1 的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的内切球表面一动点，且$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}+z\overrightarrow{AA_1}$，则$x+y+z$的取值范围是（　）

A．$\left[\dfrac{3-\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}\right]$　　B．$\left[\dfrac{3-\sqrt{3}}{2},\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}\right]$

C．$[\sqrt{3},2\sqrt{3}]$　　D．$\left[\dfrac{3+\sqrt{3}}{2},2\sqrt{3}\right]$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，有选错的得 0 分，部分选对的得部分分．

9．已知事件 A，B 满足 $P\left(A\right)=0.5$， $P\left(B\right)=0.2$，则（　）

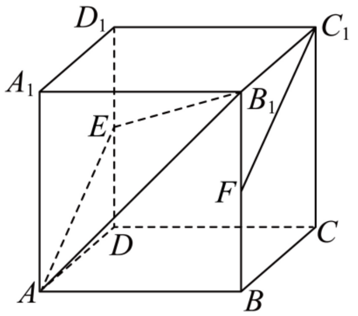
A．若 $B\subseteq A$，则 $P\left(AB\right)=0.5$

B．若 A 与 B 互斥，则 $P\left(A+B\right)=0.7$

C．若 $P(AB)$=0.1，则 A 与 B 相互独立

D．若 A 与 B 相互独立，则 $P\left(A\overline{B}\right)=0.9$

10．（多选）如图，在边长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E 为线段 DD_1 的中点，点 F 为线段 BB_1 的中点，则（　）



A．点 A_1 到直线 B_1E 的距离为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$　　B．直线 FC_1 到直线 AE 的距离为 $\frac{\sqrt{30}}{5}$

C．点 A_1 到平面 AB_1E 的距离为 $\frac{1}{3}$　　D．直线 FC_1 到平面 AB_1E 的距离为 $\frac{1}{3}$

11．数学美的表现形式不同于自然美或艺术美那样直观，它蕴藏于特有的抽象概念、公式符号、推理论证、思维方法等之中，揭示了规律性，是一种科学的真实美.在平面直角坐标系中，曲线 $C:x^2+y^2=2\left|x\right|+2\left|y\right|$ 就是一条形状优美的曲线，对于此曲线，下列说法正确的有（　）

A．曲线 C 围成的图形有 6 条对称轴

B．曲线 C 围成的图形的周长是 $4\sqrt{2}\pi$

C．若 $T\left(a,b\right)$ 是曲线 C 上任意一点，$\left|4a+3b-18\right|$ 的最小值是 $11-5\sqrt{2}$

D．曲线 C 上的任意两点间的距离不超过 6

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分．

12．同时抛掷两颗质地均匀的骰子，则两颗骰子出现的点数之和为 4 的概率为______；

13．过点 $P(3,-1)$ 且与圆 C： $x^2+y^2-2x-6y+6=0$ 相切的直线方程为________

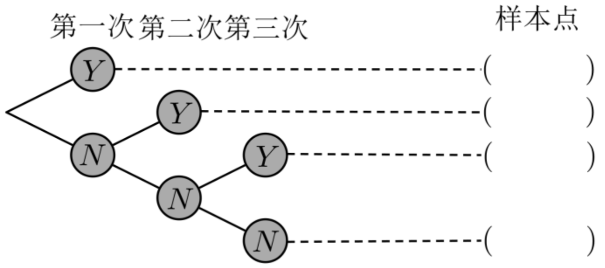
14．已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是平行四边形 $ABCD$，过棱 PC 的中点 M 和点 A 作一平面，分别交棱 PB 和 PD 于点 E 和 F．

①设 $\overrightarrow{PB}=\vec{a},\overrightarrow{PC}=\vec{b},\overrightarrow{PD}=\vec{c}$，则 $\overrightarrow{PA}=$______．（用向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 表示）

②记四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 V，四棱锥 $P-AEMF$ 的体积为 V_1，则 $\frac{V_1}{V}$ 的取值范围是______．

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15．某高校的入学面试中有 3 道难度相当的题目，李明答对每道题目的概率都是 0.6．若每位面试者共有三次机会，一旦某次答对抽到的题目，则面试通过，否则就一直抽题到第 3 次为止．用 Y 表示答对题目，用 N 表示没有答对题目，假设对抽到的不同题目能否答对是独立的，那么

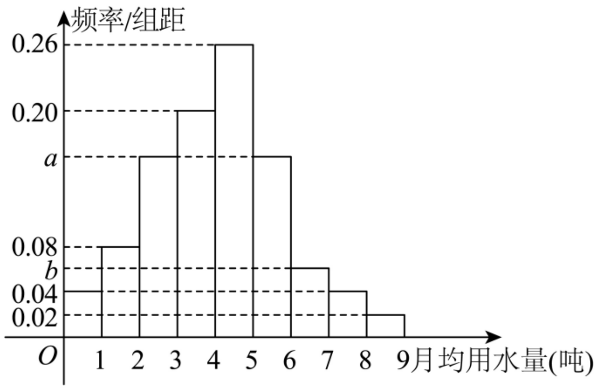


(1)在树状图中填写样本点，并写出样本空间；

(2)求李明第二次答题通过面试的概率；

(3)求李明最终通过面试的概率．

16．为了落实习主席提出“绿水青山就是金山银山”的环境治理要求，某市政府积极鼓励居民节约用水，计划调整居民生活用水收费方案，拟确定一个合理的月用水量标准 x（吨），使居民的月用水量不超过 x 的部分按平价收费，超出 x 的部分按议价收费.为了了解居民用水情况，通过抽样，获得了某年 200 位居民每人的月均用水量（单位：吨），将数据按照 $[0,1),[1,2),\cdots,[8,9)$ 分成 9 组，制成了如图所示的频率分布直方图，其中 $0.4a=b$．



(1)求直方图中 a，b 的值；

(2)由频率分布直方图估计该市居民用水的平均数（每组数据用该组区间中点值作为代表）；

(3)若该市政府希望使85%的居民每月的用水量不超过标准 x（吨），估计 x 的值，并说明理由.

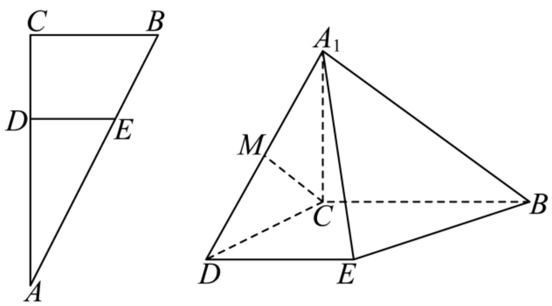
17．已知$\triangle ABC$中，$A(-1,1),B(3,-1),C(-4,0)$；

(1)求边 AB 的中线所在直线的方程；

(2)求经过 A，B，C 三点的圆 O_1 的标准方程；

(3)已知圆 O_2: $x^2+y^2-4x-4y-2=0$ 与（2）中圆 O_1 相交于 A,B，求直线 AB 的方程，并求 $|AB|$.

18．在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$BC=3$，$AC=6$，D,E 分别是 AC,AB 上的点，满足 $DE\,/\!/\,BC$ 且 DE 经过$\triangle ABC$的重心，将$\triangle ADE$沿 DE 折起到$\triangle A_1DE$的位置，使 $A_1C\perp CD$，M 是 A_1D 的中点，如图所示.



(1)求证：$A_1C\perp$平面 $BCDE$；

(2)求 CM 与平面 A_1BE 所成角的大小；

(3)在线段A_1C上是否存在点N，使平面CBM与平面BMN成角余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{4}$？若存在，求出CN的长度；若不存在，请说明理由.

19．有一个半径为4的圆形纸片，设纸片上一定点F到纸片圆心E的距离为$2\sqrt{3}$，将纸片折叠，使圆周上一点M与点F重合，以点F，E所在的直线为x轴，线段EF中点为原点O，建立平面直角坐标系.

(1)记折痕与ME的交点P的轨迹为曲线C，求曲线C的方程.

(2)若直线$l: y = kx + m\left(m > 0\right)$与曲线$C$交于$A$，$B$两点.

（i）当k为何值时，$\left|OA\right|^2 + \left|OB\right|^2$为常数$d$，并求出$d$的值.

（ii）以A，B为切点，作曲线C的两条切线，设其交点为Q，当$\left|OQ\right|^2 = d$时，证明：$QA \perp QB$

1．A

【分析】由题及倾斜角定义可得答案.

【详解】$y=\tan\frac{\pi}{4}$斜率为0，则倾斜角为0.

故选：A

2．C

【分析】运用空间向量平行的坐标结论计算.

【详解】因为$\vec{a}\ /\!/\ \vec{b}$，所以$\frac{1}{2}=\frac{-3}{x}=\frac{5}{y}$,

即$x=-6,y=10$，则$x+y=4$.

故选：C.

3．A

【分析】由垂直关系求出a的值，再结合充分、必要条件的概念即可得答案.

【详解】若$l_1\perp l_2$，则$a^2-3a=0$，解得$a=0$或$a=3$，

所以“$a=3$”是“$l_1\perp l_2$”的充分不必要条件.

故选：A.

4．A

【分析】根据空间向量的坐标运算及投影向量的公式计算即可.

【详解】由题意可知$\vec{a}+\vec{b}=(-1,1,3)$，$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}=6,|\vec{a}|=2$，

所以向量$\vec{a}+\vec{b}$在向量$\vec{a}$上的投影向量为$\frac{(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|}\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{6}{2\times 2}\cdot(0,0,2)=(0,0,3)$.

故选：A

5．D

【分析】建立空间直角坐标系，写出点的坐标，利用$\left|\cos\left\langle\overrightarrow{BC_1},\overrightarrow{CA_1}\right\rangle\right|=\frac{\left|\overrightarrow{BC_1}\cdot\overrightarrow{CA_1}\right|}{\left|\overrightarrow{BC_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CA_1}\right|}$计算出$BC_1$与$A_1C$所成的角的余弦值.

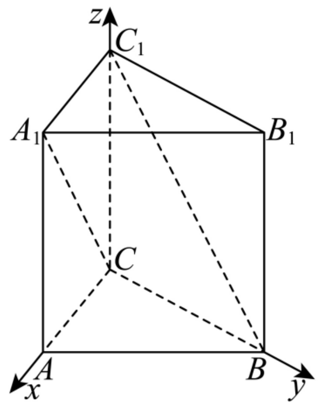
【详解】以C为坐标原点，CA,CB,CC_1所在直线分别为x,y,z轴，建立空间直角坐标系，

则$C(0,0,0),A_1(2,0,4),B(0,3,0),C_1(0,0,4)$,

则 $\overrightarrow{BC_1}=(0,-3,4),\overrightarrow{CA_1}=(2,0,4)$,

则 BC_1 与 A_1C 所成的角的余弦值为

$$\left|\cos\left\langle\overrightarrow{BC_1},\overrightarrow{CA_1}\right\rangle\right|=\frac{\left|\overrightarrow{BC_1}\cdot\overrightarrow{CA_1}\right|}{\left|\overrightarrow{BC_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CA_1}\right|}=\frac{|(0,-3,4)\cdot(2,0,4)|}{\sqrt{9+16}\times\sqrt{4+16}}=\frac{16}{10\sqrt{5}}=\frac{8\sqrt{5}}{25}.$$



故选：D

6．D

【分析】AB 选项，由题可得 a，b，c，后由离心率计算式，椭圆定义可判断选项正误；C 选项，由椭圆方程结合两点间距离公式可判断选项正误；D 选项，即判断以原点为圆心，半焦距为半径的圆与椭圆是否有两个交点.

【详解】$C:x^2+4y^2=16\Leftrightarrow\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$，则 $a=4$，$b=2$ $c=2\sqrt{3}$.

AB 选项，$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故 A 正确；$|PF_1|+|PF_2|=2a=8$，故 B 正确；

C 选项，由题可知，$F_1\left(-2\sqrt{3},0\right)$，设 $P(x,y)$，

则 $|PF_1|=\sqrt{\left(x+2\sqrt{3}\right)^2+y^2}=\sqrt{\left(x+2\sqrt{3}\right)^2+4-\frac{x^2}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left|x+\frac{8\sqrt{3}}{3}\right|$,

由题可得 $x\in[-4,4]$，则 $|PF_1|\le\frac{\sqrt{3}}{2}\left|4+\frac{8\sqrt{3}}{3}\right|=4+2\sqrt{3}$，故 C 错误；

D 选项，因 $\angle F_1PF_2$ 为直角，则 P 在以原点为圆心，半焦距为半径的圆上，

则 $x^2+y^2=12$，与 $C:x^2+4y^2=16$ 联立，可得 $\begin{cases}x^2=\frac{32}{3}\\y^2=\frac{4}{3}\end{cases}$.

则满足条件的点 P 为 $\left(\frac{4\sqrt{6}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right),\left(-\frac{4\sqrt{6}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\left(\frac{4\sqrt{6}}{3},-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\left(-\frac{4\sqrt{6}}{3},-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，

共 4 个，故 D 错误.

故选：D

7．D

【分析】设 20 个样本数据从小到大排列分别为 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_{20}$，再根据中位数、平均数、第 22 百分位数与方差的定义与公式推导即可.

【详解】设 20 个样本数据从小到大排列分别为 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_{20}$，则剩下的 18 个样本数据为 $x_2,x_3,\cdots,x_{19}$，

对于 A，依题意，$\overline{x_1}=\frac{1}{18}\left(x_2+x_3+\cdots+x_{19}\right)$，$\overline{x_2}=\frac{1}{2}(x_1+x_{20})$，$\overline{x}=\frac{1}{20}\left(x_1+x_2+\cdots+x_{20}\right)$，

由 $\overline{x_1}=\overline{x_2}$，得 $\overline{x_1}=\frac{1}{18}\left(x_2+x_3+\cdots+x_{19}\right)=\frac{1}{2}\left(x_1+x_{20}\right)$，即 $x_2+x_3+\cdots+x_{19}=18\overline{x_1},x_1+x_{20}=2\overline{x_1}$，

于是 $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{19}+x_{20}=20\overline{x_1}$，因此 $\frac{1}{20}\left(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{19}+x_{20}\right)=\overline{x_1}$，即 $\overline{x}=\overline{x_1}$，A 正确；

对于 B，原样本数据的中位数为 $\frac{x_{10}+x_{11}}{2}$，剩下的 18 个样本数据的中位数为 $\frac{x_{10}+x_{11}}{2}$，B 正确；

对于 C，因为 $\overline{x}=\overline{x_1}=\overline{x_2}$，则 $s_1^2=\frac{1}{18}(x_2^2+x_3^2+\cdots+x_{19}^2)-\overline{x}^2$，$s_2^2=\frac{1}{2}(x_1^2+x_{20}^2)-\overline{x}^2$，

$s^2=\frac{1}{20}\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{20}^2\right)-\overline{x}^2$，

于是 $x_2^2+x_3^2+\cdots+x_{19}^2=18s_1^2+18\overline{x}^2$，$x_1^2+x_{20}^2=2s_2^2+2\overline{x}^2$，

因此 $s^2=\frac{1}{20}\left(18s_1^2+18\overline{x}^2+2s_2^2+2\overline{x}^2\right)-\overline{x}^2=\frac{9}{10}s_1^2+\frac{1}{10}s_2^2$，即 $10s^2=9s_1^2+s_2^2$，C 正确；

对于 D，因为 $18\times22\%=3.96$，则剩下 18 个数据的 22% 分位数为 x_5，

又 $20\times22\%=4.4$，则原样本数据的 22% 分位数为 x_5，D 错误.

故选：D

8．B

【分析】如图建立坐标系，可将 $x+y+z$ 转化为 $\overrightarrow{AP}$ 在 $\overrightarrow{AC_1}$ 方向上的投影向量长度的 $\sqrt{3}$ 倍，

结合图形可得答案

【详解】如图以 A 为原点，AB,AD,AA_1 分别为 $x,\ y,\ z$ 轴建系，

则 $B\left(1,0,0\right)$，$A_1\left(0,0,1\right)$ $D\left(0,1,0\right)$，$\overrightarrow{AB}=\left(1,0,0\right),\overrightarrow{AA_1}=\left(0,0,1\right)$ $\overrightarrow{AD}=\left(0,1,0\right)$

则 $\overrightarrow{AP}=(x,y,z)$，又 $C_1\left(1,1,1\right)$，$\overrightarrow{AC_1}=\left(1,1,1\right)$

则 $x+y+z=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC_1}=\left|\overrightarrow{AP}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC_1}\right|\cos\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AC_1}=\sqrt{3}\left|\overrightarrow{AP}\right|\cos\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AC_1}$.

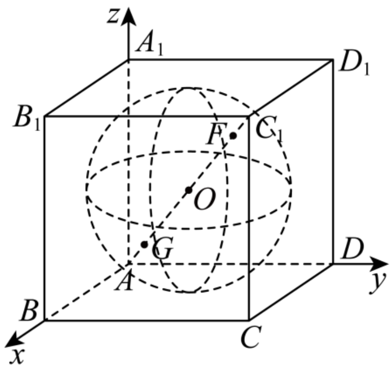
$\left|\overrightarrow{AP}\right|\cos\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AC_1}$ 表示 $\overrightarrow{AP}$ 在 $\overrightarrow{AC_1}$ 方向上的投影向量的长度.

如图当 P 在 G 或 F 时，即当 A，O，P 共线时，$\left|\overrightarrow{AP}\right|\cos\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AC_1}$ 取最值.

因 $O\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，内切球半径为 $\frac{1}{2}$.则 $AO-\frac{1}{2}\le\left|\overrightarrow{AP}\right|\cos\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AC_1}\le AO+\frac{1}{2}$，

则 $\left|\overrightarrow{AP}\right|\cos\theta\in\left[\frac{\sqrt{3}-1}{2},\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right]$，则 $x+y+z\in\left[\frac{3-\sqrt{3}}{2},\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right]$.

故选：B



9．BC

【分析】根据给定条件，结合概率的性质、互斥事件、相互独立事件的概率公式，逐项分析判断即可.

【详解】对于 A，由 $B\subseteq A$，得 $P\left(AB\right)=P(B)=0.2$，A 错误；

对于 B，由 A 与 B 互斥，得 $P\left(A+B\right)=0.5+0.2=0.7$，B 正确；

对于 C，由 $P\left(AB\right)=0.1=0.5\times0.2$，得 $P(AB)=P(A)P(B)$，则 A 与 B 相互独立，C 正确；

对于 D，由 A 与 B 相互独立，得 $A,\overline{B}$ 相互独立，则 $P\left(A\overline{B}\right)=P(A)P(\overline{B})=0.5\times0.8=0.4$，D 错误.