2023-2024学年湖南省永州市高一下学期期末数学试题

一、单选题：本题共 **8** 小题，每小题 **5** 分，共 **40** 分。在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 复数$2-i$的共轭复数是(　)

A. $2+i$　　B. $1+2i$　　C. $-2-i$　　D. $-2+i$

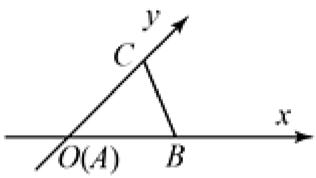
2. 已知$\overrightarrow{a}=(1,-1)$，$\overrightarrow{b}=(2,4)$，则$\overrightarrow{a}\cdot(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})=$(　)

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

3. $\triangle ABC$的内角 *A*，*B*，*C* 的对边分别为 *a*，*b*，*c*，若$a=\sqrt{2},A=\frac{\pi}{4},\sin B=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则$b=$(　)

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{3}$

4. 已知某平面图形用斜二测画法画出的直观图为如图所示的三角形，其中$AB=AC=2$，则该平面图形的面积为(　)



A. $\sqrt{3}$　　B. 2　　C. $2\sqrt{3}$　　D. 4

5. 在$\triangle ABC$中，$BC=4$，$AC=5$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=10$，则$AB=$(　)

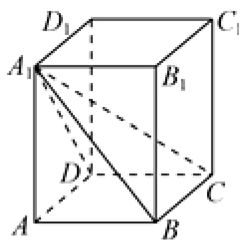
A. $2\sqrt{5}$　　B. $\sqrt{21}$　　C. 5　　D. $\sqrt{41}$

6. 已知一组数据为 30，40，50，50，55，60，70，80，90，则其极差、第 50 百分位数和众数的大小关系是(　)

A. 极差>第 50 百分位数>众数　　B. 众数>第 50 百分位数>极差

C. 极差>众数>第 50 百分位数　　D. 极差=第 50 百分位数=众数

7. 《九章算术》中，将底面为矩形且有一侧棱垂直于底面的四棱锥称为阳马．如图所示，在直四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，棱锥A_1-ABCD即为阳马，已知$AA_1=2AB=2BC=2$，则阳马A_1-ABCD的表面积为(　)



A. $2+\sqrt{5}$　　B. $3+\sqrt{5}$　　C. $3+2\sqrt{5}$　　D. $4+2\sqrt{5}$

8. 已知$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$，点 P 是边 BC 上的一点，$|\overrightarrow{AP}|=3$，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=2$，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=1$，则$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AP}|$的最小值为(　)

A. $2\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. 4　　D. 16

二、多选题：本题共 **4** 小题，共 **20** 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 **5** 分，部分选对的得 **2** 分，有选错的得 **0** 分。

9. 若复数$z_1=2i-3$，$z_2=1-i$，其中 i 是虚数单位，则下列说法正确的是(　)

A. z_1在复平面内对应的点位于第三象限

B. 若$z_1+a(a\in R)$是纯虚数，那么$a=3$

C. $z_1 \cdot z_2=-1+5i$

D. 若z_1、z_2在复平面内对应的向量分别为$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$(O为坐标原点)，则$|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{5}$

10. 在下列关于概率的命题中，正确的有(　)

A. 若事件 A，B 满足$P(A)+P(B)=1$，则 A，B 为对立事件

B. 若事件 A 与 B 是互斥事件，则 A 与$\bar{B}$也是互斥事件

C. 若事件 A 与 B 是相互独立事件，则 A 与$\bar{B}$也是相互独立事件

D. 若事件 A，B 满足$P(A)=\frac{1}{3}$，$P(B)=\frac{3}{4}$，$P(AB)=\frac{1}{4}$，则 A，B 相互独立

11. $\triangle ABC$的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，下列说法正确的是(　)

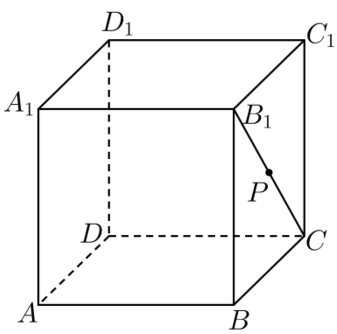
A. 若$\frac{a}{\cos A}=\frac{b}{\sin B}$，则$A=\frac{\pi}{4}$

B. 若$\sin 2A=\sin 2B$，则此三角形为等腰三角形

C. 若$a=1$，$b=2$，$A=30^\circ$，则解此三角形必有两解

D. 若$\triangle ABC$是锐角三角形，则$\sin A+\sin B>\cos A+\cos B$

12. 如图，在棱长为 a 的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点 P 为线段B_1C上的动点，则(　)



A. 三棱锥$P-A_1BD$的体积为定值

B. 过 *P* 作直线$l//AD_1$，则$l\perp DP$

C. 过 *A*，*P*，D_1三点的平面截此正方体所得的截面图形可能为五边形

D. 三棱锥$P-A_1DD_1$的外接球的半径的取值范围是$\left[\dfrac{3a}{4},\dfrac{\sqrt{3}a}{2}\right]$

三、填空题：本题共 **4** 小题，每小题 **5** 分，共 **20** 分。

13. 在中国共产主义青年团建团 100 周年之际，某高中学校计划选派 60 名团员参加“文明劝导”志愿活动，高一、高二、高三年级的团员人数分别为 100，200，300，若按分层抽样的方法选派，则高一年级需要选派的人数为______.

14. 在直角三角形 *ABC* 中，$AB=BC=\sqrt{2}$，$\angle B=90^\circ$，将此三角形绕直线 *AC* 旋转一周，所得几何体的体积为__________.

15. 定义平面非零向量之间的一种运算“*”，记$\overrightarrow{a}*\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}\cos\theta+\overrightarrow{b}\sin\theta$(其中$\theta$是非零向量$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$的夹角).若$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$均为单位向量，且$\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}=\dfrac{1}{2}$，则$|\overrightarrow{e_1}*(\sqrt{3}\overrightarrow{e_2})|=$__________.

16. 在$\triangle ABC$中，角 *A*，*B*，*C* 的对边分别为 *a*，*b*，*c*，若$\sin^2B-\sin^2C=\sin A\sin C$，则$2\tan\dfrac{B}{2}+\dfrac{1}{\tan C}$的最小值为______.

四、解答题：本题共 **6** 小题，共 **70** 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17.（本小题 10 分）

在平行四边形 *ABCD* 中，*E* 为 *CD* 中点，记$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{b}$.

(1) 试用$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$表示$\overrightarrow{AE}$；

(2) 若$\angle DAB=60^\circ$，$|\overrightarrow{AB}|=6$，$|\overrightarrow{AD}|=3$，求$\overrightarrow{AE}$与$\overrightarrow{BE}$的夹角.

18.（本小题 12 分）

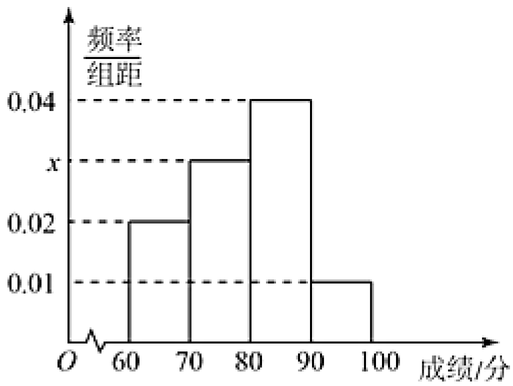
中国神舟十三号载人飞船于 2022 年 4 月 16 日圆满完成飞行任务，神州十三号的成功又一次激发了广大中学生对于航天的极大兴趣．某校举行了一次主题为“航天梦，强国梦”的知识竞赛活动，用简单随机抽样的方法，在全校选取 100 名同学，按年龄大小分为大龄组甲和小龄组乙两组，每组各 50 人，所有学生竞赛成绩均在$60\sim100$之间，甲组竞赛成绩的频率分布表和乙组竞赛成绩的频率分布直方图，如图所示.

组号	组	频数	频率
第一组	$[60,70)$	5	0.1
第二组	$[70,80)$	a	b
第三组	$[80,90)$	15	0.3
第四组	$[90,100]$	10	0.2

(1) 求 a，b，x 的值；

(2) 若以平均分为依据确定小组成绩的优劣，你认为哪个小组成绩更优？请说明理由$($同一组中的数据用该组区间的中点值作代表$)$；

(3) 若成绩不低于 90 分的同学称为"航天追梦者"，以选取的 100 名同学作为样本，试估计该校 2000 名学生中"航天追梦者"的人数．



19.（本小题 12 分）

如图 1，在边长为 $2\sqrt{3}$ 的菱形 ABCD 中，$\angle ABC=60^{\circ}$，O 为线段 CD 的中点；将 $\triangle AOD$ 沿 AO 折起到 $\triangle AOD_1$ 的位置，使得平面 $AOD_1\perp$ 平面 ABCO，连接 D_1B，D_1C，如图 2.

(1) 证明：$OD_1\perp BC$；

(2) 求点 O 到平面 ABD_1 的距离．

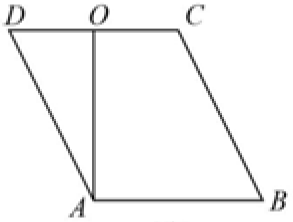


图1

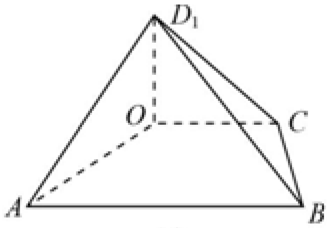


图2

20.（本小题 12 分）

某品牌电脑售后保修期为一年，根据 1000 台电脑的维修记录资料$($保修期内所有电脑维修次数均不超 2

次），这 1000 台电脑在保修期内需要维修 1 次的有 300 台，需要维修 2 次的占 20%. 以这 1000 台电脑维修次数的频率代替 1 台电脑维修次数的概率.

(1) 求 1 台电脑保修期内不需要维修的概率；

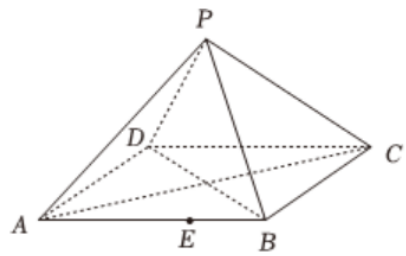
(2) 若某人购买 2 台这个品牌的电脑，2 台电脑在保修期内是否需要维修互不影响，如果 2 台电脑保修期内需要维修的次数总和不超过 2 次的概率大于 0.8，则认为该品牌电脑“值得信赖”，请判断该品牌电脑是否“值得信赖”，并说明理由.

21.（本小题 12 分）

如图所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，已知底面 ABCD 是边长为 6 的菱形，$\angle ABC=120^\circ$，$PA=PC$，$\angle PBD=\angle PDB=60^\circ$，E 为线段 AB 上的点，且 $\dfrac{BE}{AE}=\dfrac{1}{2}$.

(1) 证明：平面 $PAC\perp$ 平面 PBD；

(2) F 为线段 PD 上的一点，且 $EF//$ 平面 PBC，求 $\dfrac{PF}{PD}$ 的值及直线 EF 与平面 ABCD 的夹角.

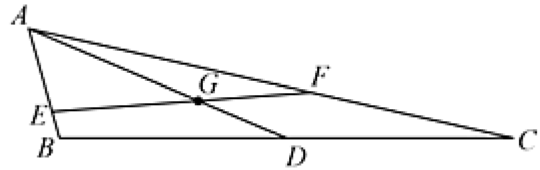


22.（本小题 12 分）

如图，设 $\triangle ABC$ 中角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，D 为 BC 的中点，已知 $c=1$，$S_{\triangle ABC}=2c^2\sin\angle BAC$.

(1) 若 $AD=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$，求 $\angle BAC$；

(2) 点 E，F 分别为边 AB，AC 上的动点，线段 EF 交 AD 于 G，且 $0<FC\leqslant 2$，$\sin\angle BAD=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$，$\sqrt{3}\lambda S_{\triangle AEF}=\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{EF}$，求 λ 的最小值.



答案和解析

1.【答案】A

【解析】【分析】

本题考查了共轭复数的定义，属于基础题．

利用共轭复数的定义即可得出．

【解答】

解：复数$2-i$的共轭复数为$2+i$.

故选：A.

2.【答案】B

【解析】【分析】

本题考查平面向量数量积的坐标运算性质，属于基础题．

根据平面向量数量积的坐标运算性质代入计算即可求得答案．

【解答】

解：$\overrightarrow{a}=(1,-1)$，$\overrightarrow{b}=(2,4)$，则$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=(3,3)$，

则$\overrightarrow{a}\cdot(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})=(1,-1)\cdot(3,3)=3-3=0$，

故选：B.

3.【答案】A

【解析】【分析】

本题考查的知识要点：正弦定理的应用，主要考查学生的运算能力和数学思维能力，属于基础题．

直接利用正弦定理求出结果．

【解答】

解：由于$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，当$a=\sqrt{2}, A=\frac{\pi}{4}, \sin B=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

利用正弦定理可得：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，即$\frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{b}{\frac{\sqrt{3}}{3}}$，

整理得$b=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

故选：A.

4.【答案】D

【解析】【分析】

本题考查斜二测画法，注意直观图的面积与原图面积的关系，属于基础题.

根据题意，求出直观图的面积，由直观图的面积与原图面积的关系，分析可得答案.

【解答】

解：根据题意，直观图中，$AB=AC=2$，$\angle BAC=45^{\circ}$，

则其面积$S'=\dfrac{1}{2}\times AB\times AC\times\sin 45^{\circ}=\sqrt{2}$，

则该平面图形的面积$S=2\sqrt{2}S'=4$；

故选：D.

5.【答案】B

【解析】【分析】

本题考查平面向量数量积的运用，利用余弦定理解三角形，考查学生计算能力，属于基础题.

根据$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=10$求得$\cos C$，再利用余弦定理即可求得答案.

【解答】

解：因为$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=10$，即得$|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\cos C=5\times 4\cos C=10$，

所以$\cos C=\dfrac{1}{2}$，

在$\triangle ABC$中，由余弦定理可得$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos C$，

代入可得$AB^2=25+16-2\times 4\times 5\times\dfrac{1}{2}=21$，

解得$AB=\sqrt{21}$，

故选：B.

6.【答案】A

【解析】【分析】

本题考查极差，众数，百分位数，属于基础题.

分别算出极差，第 50 百分位数和众数即可比较大小.

【解答】

解：极差为$90-30=60$，

因为$9\times 50\%=4.5$，所以第 5 个数 55 即为第 50 百分位数，

又众数为 50，

所以它们大小关系是极差>第 50 百分位数>众数.

故选：A.

7.【答案】*B*

【解析】【分析】

本题考查了四棱锥表面积的计算，属于中档题.

结合线面垂直的判定与性质可得到$\triangle A_1AD$，$\triangle A_1AB$，$\triangle A_1BC$，$\triangle A_1DC$均为直角三角形，分别求得各面的面积，相加即可得到所求的阳马的表面积.

【解答】

解：由题意知：$AA_1\perp$平面*ABCD*，

$\because BC\subset$平面*ABCD*，$\therefore A_1A\perp BC$，

又$AB\perp BC$，A_1A，$AB\subset$平面A_1AB，$A_1A\cap AB=A$，$\therefore BC\perp$平面A_1AB，

$\because A_1B\subset$平面A_1AB，$\therefore BC\perp A_1B$；同理可得：$CD\perp A_1D$；

则可知$\triangle A_1AD$，$\triangle A_1AB$，$\triangle A_1BC$，$\triangle A_1DC$均为直角三角形，

$\because S_{\triangle A_1AD}=\dfrac{1}{2}AA_1\cdot AD=\dfrac{1}{2}\times 2\times 1=1,S_{\triangle A_1AB}=\dfrac{1}{2}AA_1\cdot AB=\dfrac{1}{2}\times 2\times 1=1$，

$S_{\triangle A_1BC}=\dfrac{1}{2}BC\cdot A_1B=\dfrac{1}{2}\times 1\times\sqrt{2^2+1^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，

$S_{\triangle A_1DC}=\dfrac{1}{2}CD\cdot A_1D=\dfrac{1}{2}\times 1\times\sqrt{2^2+1^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2},S_{矩形ABCD}=AB\cdot BC=1\times 1=1$，

$\therefore$阳马A_1-ABCD的表面积$S=1+1+\dfrac{\sqrt{5}}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{2}+1=3+\sqrt{5}$.

故选：B.

8.【答案】*C*

【解析】【分析】

本题考查平面向量数量积的运算性质，涉及向量模的运算公式，模的最值求解，转化思想，属于中档题.

设$\angle CAP=\alpha$，$\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，则$\angle BAP=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$，则由已知可得$|\overrightarrow{AC}|=\dfrac{2}{3\cos\alpha}$，$|\overrightarrow{AB}|=\dfrac{1}{3\sin\alpha}$，化简$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AP}|^2$，再利用基本不等式即可求得结果.

【解答】

解：因为$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$，不妨设$\angle CAP=\alpha$，$\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，

所以$\angle BAP=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$，

又因为$|\overrightarrow{AP}|=3$，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=2$，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=1$，

即有 $3|\overrightarrow{AC}|\cos\alpha=2$，$3|\overrightarrow{AB}|\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=1$，

所以 $|\overrightarrow{AC}|=\frac{2}{3\cos\alpha}$，$|\overrightarrow{AB}|=\frac{1}{3\sin\alpha}$，

则 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AP}|^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AP}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}$

$$=\frac{1}{9\sin^2\alpha}+\frac{4}{9\cos^2\alpha}+9+0+2+4$$
$$=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{9\sin^2\alpha}+\frac{4\sin^2\alpha+4\cos^2\alpha}{9\cos^2\alpha}+15$$
$$=\frac{\cos^2\alpha}{9\sin^2\alpha}+\frac{1}{9}+\frac{4\sin^2\alpha}{9\cos^2\alpha}+\frac{4}{9}+15$$

$$\geqslant 2\sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{9\sin^2\alpha}\cdot\frac{4\sin^2\alpha}{9\cos^2\alpha}}+15+\frac{5}{9}$$

$$=2\times\frac{2}{9}+15+\frac{5}{9}$$

$=16$，当且仅当 $\frac{\cos^2\alpha}{9\sin^2\alpha}=\frac{4\sin^2\alpha}{9\cos^2\alpha}$，即 $\tan\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取等号，

所以 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AP}|^2$ 的最小值为 16，

则 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AP}|$ 最小值为 4.

故选：C.

9.【答案】*BC*

【解析】【分析】

本题主要考查复数的几何意义，纯虚数的定义，复数的四则运算，属于中档题.

对于 *A*，结合复数的几何意义，即可求解，

对于 *B*，结合纯虚数的定义，即可求解，

对于 *C*，结合复数的四则运算，即可求解，

对于 *D*，结合向量模公式，即可求解.

【解答】

解：对于 *A*，$\because$ 复数 $z_1=2i-3$，

$\therefore z_1$ 在复平面内对应的点 $(-3,2)$ 位于第二象限，故 *A* 错误;

对于 *B*，$z_1+a=-3+2i+a$ 是纯虚数，

则 $-3+a=0$，解得 $a=3$，故 *B* 正确;

对于 *C*，$\because z_1=2i-3$，$z_2=1-i$，

$\therefore z_1 \cdot z_2 = (-3+2i)\cdot(1-i) = -1+5i$，故 *C* 正确;

对于 *D*，z_1、z_2 在复平面内对应的向量分别为 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$(O 为坐标原点)，

则 $A(-3,2)$，$B(1,-1)$，

$\therefore \overrightarrow{AB}=(4,-3)$，$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$，故 *D* 错误.

故选：BC.

10.【答案】*CD*

【解析】【分析】

本题主要考查了独立事件和互斥事件的定义，属于基础题.

对于 *A*，举反例判断命题不成立；对于 *B*，由互斥事件的定义直接判断；对于 *C*，由相互独立事件的性质直接判断；对于 *D*，利用独立事件的定义直接判断.

【解答】

解：对于 *A*，若事件 *A*、*B* 不互斥，但是恰好 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.5$，满足 $P(A)+P(B)=1$，但是 *A*，*B* 不是对立事件，故 *A* 错误；

对于 *B*，由互斥事件的定义可知，事件 *A*、*B* 互斥，但是 *A* 与 $\bar{B}$ 也是互斥事件不成立，故 *B* 错误；

对于 *C*，由相互独立事件的性质可知：若事件 *A* 与 *B* 是相互独立事件，则 *A* 与 $\bar{B}$ 也是相互独立事件，故 *C* 正确；

对于 *D*，因为事件 *A*，*B* 满足 $P(A)=\frac{1}{3}$，$P(B)=\frac{3}{4}$，$P(AB)=\frac{1}{4}$，

所以 $P(AB)=P(A)P(B)$，所以事件 *A*，*B* 相互独立，故 *D* 正确，

故选：CD.

11.【答案】*AD*

【解析】【分析】

本题考查正弦定理的应用，考查诱导公式以及正弦函数的性质，属于较难题.

由正弦定理可判断 *A*；根据角的范围直接求解可判断 *B*；利用正弦定理直接求解可判断 *C*；利用诱导公式和正弦函数单调性可判断 D.

【解答】

解：由正弦定理可知 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，又 $\frac{a}{\cos A}=\frac{b}{\sin B}$，

所以 $\frac{a}{\cos A}=\frac{a}{\sin A}$，可得 $\tan A=1$，因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{4}$，*A* 正确；