2025 年 01 月 10 日数学作业

一、单选题

1．若$-5<a<-3$，$1<b<4$，则$\dfrac{a}{b}$的取值范围为（　）

A．$\left(-5,-\dfrac{3}{4}\right)$　　B．$\left(-\dfrac{4}{3},-\dfrac{1}{5}\right)$

C．$\left(-\dfrac{11}{3},+\infty\right)$　　D．$\left(-\dfrac{11}{3},0\right)\cup(0,+\infty)$

【答案】A

【分析】由题意得$\dfrac{1}{4}<\dfrac{1}{b}<1$，$3<-a<5$，进一步根据不等式的性质即可求解.

【详解】因为$-5<a<-3$，$1<b<4$，所以$\dfrac{1}{4}<\dfrac{1}{b}<1$，$3<-a<5$，

所以$\dfrac{3}{4}<\dfrac{-a}{b}<5\Rightarrow -5<\dfrac{a}{b}<-\dfrac{3}{4}$，

所以$\dfrac{a}{b}$的取值范围为$\left(-5,-\dfrac{3}{4}\right)$.

故选：A.

2．已知函数$f(x)=\begin{cases}3x+1,x\geq 4\\ f\left(x^2\right),x<4\end{cases}$，则$f(3)+f(4)=$（　）

A．37　　B．41　　C．19　　D．23

【答案】B

【分析】利用函数$f(x)$的解析式计算出$f(3)$、$f(4)$的值，即可计算出$f(3)+f(4)$的值.

【详解】因为$f(x)=\begin{cases}3x+1,x\geq 4\\ f\left(x^2\right),x<4\end{cases}$，则$f(3)=f(9)=3\times 9+1=28$，$f(4)=3\times 4+1=13$，

因此，$f(3)+f(4)=41$.

故选：B.

3．若M ¹ Æ，则“$M\cap N=\varnothing$”是“$N=\varnothing$”的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

【答案】B

【分析】利用必要非充分的定义判断即得解.

【详解】解："$M\cap N=\varnothing$"成立，"$N=\varnothing$"不一定成立，如：$M=(1,2),N=(3,4)$,所以"$M\cap N=\varnothing$"是"$N=\varnothing$"的不充分条件；

"$N=\varnothing$"成立时，"$M\cap N=\varnothing$"一定成立，

所以"$M\cap N=\varnothing$"是"$N=\varnothing$"的必要条件.

所以"$M\cap N=\varnothing$"是"$N=\varnothing$"的必要非充分条件.

故选：B

4．函数$y=\sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(2x-3)}$的定义域是

A．$[\frac{3}{2},+\infty)$　　B．$[2,+\infty)$　　C．$[\frac{3}{2},2]$　　D．$(\frac{3}{2},2]$

【答案】D

【解析】根据函数定义域的求法，求得函数的定义域.

【详解】依题意$0<2x-3\le 1$，解得$\frac{3}{2}<x\le 2$，所以函数的定义域为$(\frac{3}{2},2]$.

故选：D

【点睛】本小题主要考查函数定义域的求法，属于基础题.

5．设$a\in R,i$是虚数单位，则"$a=1$"是"$\frac{a+i}{a-i}$为纯虚数"的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分又不必要条件

【答案】A

【详解】试题分析：$\frac{a+i}{a-i}=\frac{(a+i)(a+i)}{(a-i)(a+i)}=\frac{a^2-1+2ai}{a^2+1}=\frac{a^2-1}{a^2+1}+\frac{2a}{a^2+1}i$，$\because\frac{a+i}{a-i}$为纯虚数，

$\therefore\frac{a^2-1}{a^2+1}=0$且$\frac{2a}{a^2+1}\ne 0$，$\therefore a=\pm 1$，$\therefore$"$a=1$"是"$\frac{a+i}{a-i}$为纯虚数"的充分不必要条件.

考点：充分必要条件、复数的运算、纯虚数的概念.

6．已知集合$M=\{1,2,3\}$，$N=\{3,4\}$，全集$I=\{1,2,3,4,5\}$，则$M\cup\left(\complement_I N\right)=$（　　）

A．$\{1,2,4\}$　　B．$\{1,2,3,5\}$　　C．$\{1,2,4,5\}$　　D．I

【答案】B

【分析】根据并集、补集的概念，计算即可得答案.

【详解】由题意得$\complement_I N=\{1,2,5\}$，所以$M\cup\left(\complement_I N\right)=\{1,2,3,5\}$.

故选：B

7．已知集合 $A=\{x|\ y=\sqrt{x-1}\}$，$B=\left\{x|\ y=\log_2\left(x^2-x\right)\right\}$，则 $A\cap B=$（　）

A．$\{x|0<x<1\}$　　B．$\{x|\ x\geq 1\}$　　C．$\{x|\ x>0\}$　　D．$\{x|\ x>1\}$

【答案】D

【分析】先化简得到 $A=\{x|\ x\geq 1\}$ 和 $B=\left\{x|\ x<0\text{或}x>1\right\}$，再求 $A\cap B$ 即可.

【详解】解：因为 $A=\{x|\ y=\sqrt{x-1}\}$，所以 $A=\{x|\ x-1\geq 0\}$，即 $A=\{x|\ x\geq 1\}$

因为 $B=\left\{x|\ y=\log_2\left(x^2-x\right)\right\}$，所以 $B=\left\{x|\ x^2-x>0\right\}$，即 $B=\left\{x|\ x<0\text{或}x>1\right\}$，

所以 $A\cap B=\{x|\ x>1\}$

故选：D

【点睛】本题考查函数的定义域，集合的交集运算，是基础题.

8．下列选项中的两个函数表示同一函数的是（　）

A．$f(x)=x$ 与 $g(x)=e^{\ln x}$

B．$f(x)=2|x|$ 与 $g(x)=\dfrac{2x^2}{|x|}$

C．$f(x)=\sqrt{(x-1)^2}$ 与 $g(x)=\begin{cases}x-1, & x\geq 1\\ 1-x, & x<1\end{cases}$

D．$f(x)=x^0$ 与 $g(x)=1$

【答案】C

【分析】由函数的定义域和解析式逐一判断即可.

【详解】A：$f\left(x\right)$ 定义域为R，$g(x)=e^{\ln x}$ 的定义域为 $\left(0,+\infty\right)$，故 A 错误；

B：$f(x)=2|x|$ 定义域为R，$g(x)=\dfrac{2x^2}{|x|}$ 的定义域为 $\{x\,|\,x\neq 0\}$，故 B 错误；

C：两函数的定义域都为R，又 $f(x)=\sqrt{(x-1)^2}=\begin{cases}x-1, x\geq 1\\ 1-x, x<1\end{cases}$，所以两个函数表示同一函数，

故 C 正确；

D：当 $x=0$ 时，$f\left(x\right)$ 无意义，而 $g\left(0\right)=1$,故 D 错误；

故选：C

9．若 $2<x<4$，则（　）

A．$2^x>x^2>\log_2 x$　　　　B．$2^x>\log_2 x>x^2$

C． $x^2>2^x>\log_2 x$　　　　D． $x^2>\log_2 x>2^x$

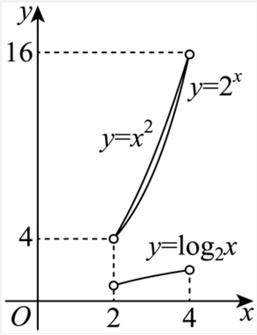
【答案】C

【分析】结合 $y=2^x, y=x^2, y=\log_2 x$ 在区间 $(2,4)$ 上的图象来确定正确选项.

【详解】画出 $y=2^x, y=x^2, y=\log_2 x$ 在区间 $(2,4)$ 上的图象如下图所示，

由图可知 $x^2>2^x>\log_2 x$.

故选：C



10． $m<n<0$ 是 $\frac{1}{m}>\frac{1}{n}$ 成立的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件　C．充要条件　D．既不充分也不必要条件

【答案】A

【分析】根据充分条件和必要条件的定义结合不等式的关系进行判断即可.

【详解】当 $m<n<0$ 时， $\frac{1}{m}>\frac{1}{n}$ 成立，

当 $m>0, n<0$ 时，满足 $\frac{1}{m}>\frac{1}{n}$，但 m＜n＜0 不成立，

即 $m<n<0$ 是 $\frac{1}{m}>\frac{1}{n}$ 成立的充分不必要条件，

故选 A.

【点睛】本题主要考查充分条件和必要条件的判断，根据不等式的关系结合充分条件和必要条件的定义是解决本题的关键，属于基础题.

11． $\cos 75°\cos 15°-\sin 255°\sin 165°$ 的值是（ ）

A． $-\frac{1}{2}$　　B． $\frac{1}{2}$　　C． $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D． 0

【答案】B

【分析】根据两角和的余弦公式即可合并求解.

【详解】因为$\cos 75°\cos 15° - \sin 255°\sin 165° = \cos 75°\cos 15° - \sin(180° + 75°)\sin(180° - 15°)$

$= \cos 75°\cos 15° + \sin 75°\sin 15° = \cos(75° - 15°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$,

故选：B.

12．已知$x > 0, y > 0$，则“$x + y \geq 1$”是“$x^2 + y^2 \geq 1$”的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件　　C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

【答案】B

【分析】根据给定条件，利用充分条件、必要条件的定义分析判断即得.

【详解】$x > 0, y > 0$，取$x = y = \frac{2}{3}$，此时$x + y = \frac{4}{3} \geq 1$，而$x^2 + y^2 = \frac{8}{9} < 1$，

反之，若$x^2 + y^2 \geq 1$，则$x + y = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy} > \sqrt{x^2 + y^2} \geq 1$，

所以“$x + y \geq 1$”是“$x^2 + y^2 \geq 1$”的必要不充分条件.

故选：B

13．下列各函数在其定义域内，既为奇函数又为减函数的是

A．$y = -|x|$　　B．$y = x^{-1}$　　C．$y = -x^2$　　D．$y = -x^3$

【答案】D

【分析】按照初等函数的常见性质，奇偶性和单调性逐一判断即可.

【详解】A．函数$y = -|x|$是偶函数，故A错误；

B．函数是奇函数，在$(-\infty, 0)$内单调递减，在$(0, +\infty)$内单调递减，在整个定义域内不具有单调性，故B错误；

C．函数$y = -x^2$是偶函数，故C错误；

D．根据幂函数的性质可得$y = -x^3$在其定义域内，既为奇函数又为减函数，故D正确；

故选D.

【点睛】本题主要考查函数奇偶性和单调性的判断，要求熟练掌握常见函数的单调性和奇偶性，属于中档题.

14．若函数$f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{6})$的图像向左平移$\varphi$（$\varphi > 0$）个单位，所得的图像关于$y$轴对称，则当$\varphi$最小时，$\tan\varphi =$

A．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　　B．$\sqrt{3}$　　　C．$-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　　D．$-\sqrt{3}$

【答案】B

【分析】根据平移变换得到解析式后,利用所得的图像关于y轴对称列式,再求最小值.

【详解】将函数$f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{6})$的图像向左平移$\varphi$（$\varphi>0$）个单位后,得到函数

$y=\sin[2(x+\varphi)-\frac{\pi}{6}]=\sin(2x+2\varphi-\frac{\pi}{6})$,

因为其图像关于y轴对称,所以$2\varphi-\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$,即$\varphi=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3},k\in Z$,

因为$\varphi>0$,所以$k=0$时,φ取得最小值$\frac{\pi}{3}$,此时$\tan\varphi=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$.

故选B.

【点睛】本题考查了三角函数图像的平移变换,以及对称轴,属于中档题.

15．已知$a>b>0>c$，则下列不等式正确的是（　）

A．$\frac{1}{a}<\frac{1}{c}$　　　B．$a^3c<b^3c$　　　C．$\frac{1}{a^2}>\frac{1}{b^2}$　　　D．$\lg\frac{a-c}{b-c}<0$

【答案】B

【分析】利用不等式的性质证明选项B正确，选项D错误，其他选项举反例逐一排除即可.

【详解】对于选项A：当$a=1,c=-1$，得到$\frac{1}{a}>\frac{1}{c}$故选项A错误，

对于选项B：$\because a>b>0$，$\therefore a^3>b^3$，又$\because c<0$，$\therefore a^3c<b^3c$.选项B正确

对于选项C：当$a=\frac{1}{2},b=\frac{1}{3}$时，$\frac{1}{a^2}=4<\frac{1}{b^2}=9$，选项C错误

对于选项D：因为$a>b>0>c$，所以$a-c>b-c>0$，故$\frac{a-c}{b-c}>1$，故$\lg\frac{a-c}{b-c}>\lg1=0$，选项D错误.

故选：B.

16．已知平面向量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$满足$|\vec{a}|=|\vec{b}|=\vec{a}\cdot\vec{b}=2$，$|\vec{a}-\vec{c}|=1$，$\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$，则$x+y$的取值范围是（　）

A．$\left[1-\frac{\sqrt{3}}{3},1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$　　　B．$\left[1-\frac{2\sqrt{3}}{3},1+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$

C．$\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$　　　D．$\left[-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$

【答案】A

【分析】由已知可得$\vec{a}-\vec{c}=(1-x)\vec{a}-y\vec{b}$，利用平面向量数量积的运算可得

$(2x+y-2)^2+\left(\sqrt{3}y\right)^2=1$，设$\begin{cases}2x+y-2=\sin\theta\\ \sqrt{3}y=\cos\theta\end{cases}$，可得出$x+y=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+1$，结合正弦型函数的值域可得出$x+y$的取值范围.

【详解】因为平面向量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$满足$|\vec{a}|=|\vec{b}|=\vec{a}\cdot\vec{b}=2$，$|\vec{a}-\vec{c}|=1$，$\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$，

则$\vec{a}-\vec{c}=(1-x)\vec{a}-y\vec{b}$，

所以，$|\vec{a}-\vec{c}|^2=\left[(1-x)\vec{a}-y\vec{b}\right]^2=(1-x)^2\vec{a}^2-2(1-x)y\vec{a}\cdot\vec{b}+y^2\vec{b}^2$

$=4(1-x)^2+4(x-1)y+4y^2=1$，

即$4x^2+4xy+4y^2-8x-4y+3=0$，即$(2x+y)^2-4(2x+y)+4+3y^2=1$，

即$(2x+y-2)^2+\left(\sqrt{3}y\right)^2=1$，

令$\begin{cases}2x+y-2=\sin\theta\\ \sqrt{3}y=\cos\theta\end{cases}$，则$\begin{cases}2x+y-2=\sin\theta\\ y=\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta\end{cases}$，

上述两个等式相加可得$2(x+y)=\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta+2$，

则$x+y=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+1\in\left[1-\frac{\sqrt{3}}{3},1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

故选：A.

17．已知$f(x)$是定义在R上的函数，且$f(x+1)$的图像关于点$(-1,0)$对称，对任意$x_1,x_2\in[0,+\infty)$，都有$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>-1$．若$f(a^2-1)+f(a-1)+a^2+a>2$，则实数$a$的取值范围为（　）

A．$a<-2$或$a>-1$　　B．$a<1$或$a>2$

C．$a<-1$或$a>2$　　D．$a<-2$或$a>1$

【答案】D

【分析】构造函数$g(x)=f(x)+x$,然后结合函数的单调性求解.

【详解】$f(x)$是定义在R上的函数，且$f(x+1)$的图像关于点$(-1,0)$对称，

所以$f(x)$关于$(0,0)$，且为奇函数，

因为$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>-1$，

所以$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}+1>0$, 即$\frac{f(x_1)+x_1-[f(x_2)+x_2]}{x_1-x_2}>0$,

构造函数$g(x)=f(x)+x$，则有$\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}>0$, 且为奇函数,

所以$g(x)=f(x)+x$在R上单调递增,

因为$f(a^2-1)+f(a-1)+a^2+a>2$，变形为$f(a^2-1)+a^2-1>-f(a-1)-(a-1)$，

则有$g(a^2-1)>g(1-a)$，

所以$a^2-1>1-a$，

解得：$a<-2$或$a>1$，

故选：D.

18．已知图1对应的函数为$y=f(x)$，则图2对应的函数是（　）

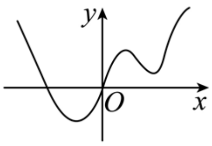


图1

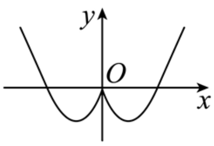


图2

A．$y=f(-|x|)$　B．$y=f(-x)$　C．$y=f(|x|)$　D．$y=-f(-x)$

【答案】A

【分析】根据两函数图象的关系知，所求函数为偶函数且$x\le 0$时两函数解析式相同，即可得解.

【详解】根据函数图象知，当$x\le 0$时，所求函数图象与已知函数相同，

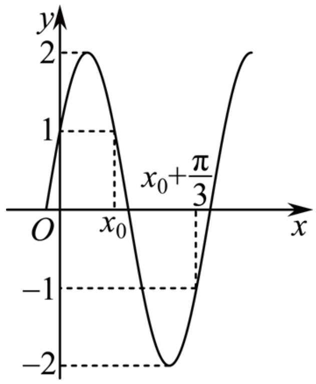
当$x>0$时，所求函数图象与$x<0$时图象关于y轴对称，

即所求函数为偶函数且$x\le 0$时与$y=f(x)$相同，故BD不符合要求，

当$x\le 0$时，$y=f(-|x|)=f(x)$，$y=f(|x|)=f(-x)$，故A正确，C错误.

故选：A.

19．已知函数$f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$（其中$\omega>0$，$0<\varphi<\pi$）的图象如图所示，且满足$f(0)=f(x_0)=-f\left(x_0+\frac{\pi}{3}\right)=1$，则$f(x)=$（　）



A．$2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$　　B．$2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

C．$2\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$　　D．$2\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$

【答案】C

【分析】根据题意得到函数的最小正周期，然后利用三角函数的周期公式得到$\omega=3$，再结合$f\left(0\right)=1$可得到$\varphi=\frac{\pi}{6}$，进而求解.

【详解】设$f\left(x\right)$的最小正周期为T，根据$f\left(x_0\right)=-f\left(x_0+\frac{\pi}{3}\right)$及函数图象的对称性知，

$\frac{T}{2}=\left(x_0+\frac{\pi}{3}\right)-x_0$，所以$T=\frac{2\pi}{3}=\frac{2\pi}{\omega}$，得$\omega=3$.

由$f\left(0\right)=1$，得$\sin\left(3\times0+\varphi\right)=\frac{1}{2}$，因为$0<\varphi<\pi$，

由图知$\varphi=\frac{\pi}{6}$，故$f\left(x\right)=2\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$.

故选：C.

20．已知$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=3$，则$\tan2\alpha=$（　）

A．$-\frac{3}{4}$　　B．$-\frac{4}{3}$　　C．$\frac{3}{4}$　　D．$\frac{4}{3}$

【答案】D

【解析】求出$\tan\alpha$的值，然后利用二倍角的正切公式求出$\tan2\alpha$的值.

【详解】Q $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\alpha}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha}=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=3$，解得$\tan\alpha=\frac{1}{2}$，

因此，$\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\times\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{4}{3}$.

故选：D.

【点睛】本题考查利用二倍角正切公式求值，同时也考查了两角和的正切公式的应用，考查计算能力，属于中等题.

21．已知$a>b>1$，若$\log_a b+\log_b a=\frac{10}{3}$，$a^b=b^a$，则$ab=$（　）

A．6　　B．7　　C．8　　D．9

【答案】D

【分析】设$t=\log_b a$并由条件求出t的范围，代入$\log_a b+\log_b a=\frac{10}{3}$化简后求出$t$的值，得到$a$与$b$的关系式代入$a^b=b^a$化简后列出方程，求出$a,b$的值，进而求解.

【详解】设$t=\log_b a$，由$a>b>1$可得：$t>1$，代入$\log_a b+\log_b a=\frac{10}{3}$，可得：$t+\frac{1}{t}=\frac{10}{3}$，

即$3t^2-10t+3=0$，解得：$t=3$或$t=\frac{1}{3}$（舍去）.

所以$\log_b a=3$，即$a=b^3$，又因为$a^b=b^a$，所以$b^{3b}=b^a$，则$a=3b=b^3$，

解得：$b=\sqrt{3}$，$a=3\sqrt{3}$，所以$ab=9$，

故选：D.

22．若$f(x)=\ln\left|\frac{1}{2x-1}+m\right|+n$为奇函数，则$n=$（　）

A．2　　B．-2　　C．$\ln 2$　　D．$-\ln 2$

【答案】C

【分析】利用奇函数的定义分类讨论求解即可

【详解】因为函数$f(x)$为奇函数，

所以$f(x)$的定义域关于原点对称.

若$m=0$，则$f(x)$的定义域

$\left\{x\middle|x\neq\frac{1}{2}\right\}$不关于原点对称，

所以$m\neq 0, f(x)$的定义域为$\left\{x\middle|x\neq\frac{1}{2}且x\neq\frac{1}{2}-\frac{1}{2m}\right\}$，

从而$\frac{1}{2}-\frac{1}{2m}=-\frac{1}{2}$，解得$m=\frac{1}{2}$.

所以$f(x)=\ln\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2x-1}\right|+n$，定义域为$\left\{x\middle|x\neq\pm\frac{1}{2}\right\}$.

令 $f(0)=0$，

得 $\ln\frac{1}{2}+n=0, n=\ln 2$.

经检验，$f(x)=\ln\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2x-1}\right|+\ln 2$ 为奇函数，

故选：C.

23．已知函数 $f(x)=|\cos x|+\cos|2x|$，有下列四个结论：

①若 $x\in[-\pi,\pi]$，则 $f(x)$ 有 2 个零点　②$f(x)$ 最小值为 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

③$f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 单调递减　④π 是 $f(x)$ 的一个周期

则上述结论中错误的个数为（　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

【答案】C

【详解】$f(x+\pi)=|\cos(x+\pi)|+\cos 2|(x+\pi)|=f(x)$ 所以④正确，

$f(x)=|\cos x|+\cos|2x|=|\cos x|+\cos 2x=2\cos^2 x+|\cos x|-1$，

$t=|\cos x|$，$g(t)=2t^2+t-1=0$，则 $t=\frac{1}{2}$ 或 $t=-1$，所以①错误，

$t\in[0,1]$，$t=0$，$f(x)_{\min}=-1$，②错误，

$t=|\cos x|$ 在 $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 递减，

$g(t)=2t^2-1+t$ 在 $t\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$ 递增，③正确.

故选:C.

【点睛】本题考查三角函数的性质，涉及零点、单调性、最值和周期，等价转化为二次函数是解题的关键，属于中档题.

24．若不等式 $|x|<a$ 的一个充分条件为 $0<x<1$，则实数 a 的取值范围是（　）

A．$(0,1]$　　B．$(0,1)$

C．$[1,+\infty)$　　D．$(1,+\infty)$

【答案】C

【分析】先解 $|x|<a$，得到 $-a<x<a$，再利用条件即可求出结果.

【详解】由$|x|<a$，得到$-a<x<a$，

又不等式$|x|<a$的一个充分条件为$0<x<1$，所以$a\ge 1$，

故选：C.

25．已知函数$f\left(x\right)=\sin\left(\omega x+\phi\right)\left(\omega>0,0<\phi<\frac{\pi}{2}\right)$在$\left(\frac{\pi}{8},\frac{5\pi}{8}\right)$上单调，且$f\left(-\frac{\pi}{8}\right)=f\left(\frac{3\pi}{8}\right)=0$，则$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$的值为（　　）

A．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B．1　　C．-1　　D．$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】D

【分析】由已知可得函数$f(x)$的最小正周期为$T=\frac{2\pi}{\omega}$,结合已知列关于ω,ϕ的方程组,求解可得到函数解析式,进一步求得$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$的值.

【详解】由题意得：函数$f\left(x\right)$的最小正周期为$T=\frac{2\pi}{\omega}$.

$\because f\left(x\right)$在$\left(\frac{\pi}{8},\frac{5\pi}{8}\right)$上单调，$\therefore \frac{T}{2}=\frac{\pi}{\omega}\ge\frac{5\pi}{8}-\frac{\pi}{8}$，解得$0<\omega\le 2$.

由$f\left(-\frac{\pi}{8}\right)=f\left(\frac{3\pi}{8}\right)=0$，所以$\frac{T}{2}=\frac{3\pi}{8}-\left(-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\pi}{2}$，解得：$\omega$=2.

由于$f\left(-\frac{\pi}{8}\right)=0$，所以$\sin\left(2\times\left(-\frac{\pi}{8}\right)+\phi\right)$=0,$0<\phi<\frac{\pi}{2}$，解得：$\phi$=$\frac{\pi}{4}$,

所以$f\left(x\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$,

所以$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(2\times\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

故选：D

【点睛】求三角函数解析式的方法：

（1）求A通常用最大值或最小值；

（2）求ω通常用周期；

（3）求φ通常利用函数上的点带入即可求解.

26．已知$\tan\left(\alpha+\beta\right)=\frac{2}{5}$，$\tan\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}$，那么$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=$

A．$\frac{13}{18}$　　B．$\frac{13}{22}$　　C．$\frac{3}{22}$　　D．$\frac{5}{18}$

【答案】C

【分析】根据条件确定条件角和结论角之间的关系，利用两角和差的正切公式进行求解即可.

【详解】因为$\alpha+\frac{\pi}{4}=(\alpha+\beta)-\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)$，所以

$$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left[(\alpha+\beta)-\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\frac{\tan(\alpha+\beta)-\tan\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)}{1+\tan(\alpha+\beta)\tan\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{3}{22},$$

故选 C

【点睛】本题主要考查两角和差的正切公式的应用，根据条件确定条件角和结论角的关系是解决本题的关键.

27．已知函数$y=f(x)$的图象关于直线$x=2$对称，且$f(x)$的一个周期为 4，则$f(x)$的解析式可以是（　　）

A．$\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$　　B．$\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

C．$\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$　　D．$\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$

【答案】B

【分析】由题意分别考查函数的最小正周期和函数在$x=2$处的函数值，排除不合题意的选项即可确定满足题意的函数解析式.

【详解】由函数的解析式考查函数的最小周期性：

A 选项中$T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$，B 选项中$T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$，

C 选项中$T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}=8$，D 选项中$T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}=8$，

排除选项 CD，

对于 A 选项，当$x=2$时，函数值$\sin\left(\frac{\pi}{2}\times 2\right)=0$，故$(2,0)$是函数的一个对称中心，排除选项 A，

对于 B 选项，当$x=2$时，函数值$\cos\left(\frac{\pi}{2}\times 2\right)=-1$，故$x=2$是函数的一条对称轴，

故选：B.

28．对任意实数x，规定y取$4-x,x+2,\frac{1}{3}(6-x)$三个值中的最小值，则函数y（　）

A．有最大值 2，无最小值　　　　B．有最大值 2，最小值 1

C．有最大值 1，无最小值　　　　D．无最大值，无最小值

【答案】A

【分析】先依次解出不等式$4-x\le x+2$、$4-x\le\frac{1}{3}(6-x)$和$x+2\le\frac{1}{3}(6-x)$的解，进而得函数y的解析式，再通过研究函数y单调性即可得解.

【详解】因为$4-x\le x+2\Rightarrow x\ge 1$；$4-x\le\frac{1}{3}(6-x)\Rightarrow x\ge 3$；$x+2\le\frac{1}{3}(6-x)\Rightarrow x\le 0$，

所以可得$y=\begin{cases}x+2,x\le 0\\ \frac{1}{3}(6-x),0<x<3\\ 4-x,x\ge 3\end{cases}$，

又将$x=3$代入$y=\frac{1}{3}(6-x)$得$y=1$；将$x=3$代入$y=4-x$得$y=1$，

所以函数y在$(-\infty,0]$上单调递增，在$(0,+\infty)$上单调递减，

将$x=0$代入$y=\frac{1}{3}(6-x)$得$y=2$，将$x=0$代入$y=x+2$得$y=2$，

所以函数y在$x=0$处取得最大值为$y=2$，无最小值.

故选：A.

29．已知函数$f(x)=4^x+k\cdot 2^x+k\cdot 2^{-x}+4^{-x}$，若对于任意的$x_1$、$x_2$、$x_3\in[-1,1]$，以$f(x_1)$、$f(x_2)$、$f(x_3)$为长度的线段都可以围成三角形，则$k$的取值范围为（　）

A．$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$　　B．$\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$　　C．$\left(\frac{1}{6},+\infty\right)$　　D．$\left(\frac{1}{12},+\infty\right)$

【答案】C

【分析】设$t=2^x+2^{-x}\in\left[2,\frac{5}{2}\right]$，可得$f(x)=t^2+kt-2$，设$h(t)=t^2+kt-2$，由$h(t)>0$对任意的$t\in\left[2,\frac{5}{2}\right]$求得$k>-1$，进而可求得函数$y=h(t)$在区间$\left[2,\frac{5}{2}\right]$的值域，由题意可得出关于$k$的不等式，由此可解得实数$k$的取值范围.

【详解】令$t=2^x+2^{-x}=2^x+\frac{1}{2^x}$，$\because x\in[-1,1]$，则$2^x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$，

令$m=2^x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$，由双勾函数的单调性可知，函数$g(m)=m+\frac{1}{m}$在区间$\left[\frac{1}{2},1\right)$上单调递减，在区间$(1,2]$上单调递增，

所以，当$m\in\left[\frac{1}{2},2\right]$时，$g(m)=m+\frac{1}{m}\in\left[2,\frac{5}{2}\right]$，则$t\in\left[2,\frac{5}{2}\right]$，

$t^2=\left(2^x+2^{-x}\right)^2=4^x+4^{-x}+2$，则$4^x+4^{-x}=t^2-2$，$\therefore f(x)=t^2+kt-2$，

构造函数$h(t)=t^2+kt-2$，其中$t\in\left[2,\frac{5}{2}\right]$，由$h(t)=t^2+kt-2>0$，可得$k>\frac{2}{t}-t$，

由于函数$y=\frac{2}{t}-t$在区间$\left[2,\frac{5}{2}\right]$上单调递减，则$y_{\max}=-1$，可得$k>-1$.

二次函数$h(t)=t^2+kt-2$的对称轴为直线$t=-\frac{k}{2}<\frac{1}{2}$，

则函数$h(t)=t^2+kt-2$在区间$\left[2,\frac{5}{2}\right]$上单调递增，

当$t\in\left[2,\frac{5}{2}\right]$时，$h(2)\le h(t)\le h\left(\frac{5}{2}\right)$，即$2k+2\le h(t)\le\frac{5}{2}k+\frac{17}{4}$.

由于以$f(x_1)$、$f(x_2)$、$f(x_3)$为长度的线段都可以围成三角形，

所以，$2(2k+2)>\frac{5}{2}k+\frac{17}{4}$，解得$k>\frac{1}{6}$.

因此，实数k的取值范围是$\left(\frac{1}{6},+\infty\right)$.

故选：C.

【点睛】本题主要考查了参数取值范围的求解，以及构成三角形的条件和利用函数单调性求函数值域，属于难题.

30．已知函数$f(x)=3^{|x-p_1|}$，$g(x)=3^{|x-p_2|}$，$p_1\ne p_2$，则下列四个结论中正确的是（　　）

①$y=f(x)$图象可由$y=g(x)$图象平移得到；

②函数$f(x)$+$g(x)$的图象关于直线x=$\frac{p_1+p_2}{2}$对称；

③函数$f(x)-g(x)$的图象关于点$\left(\frac{p_1+p_2}{2},0\right)$对称；

④不等式$f(x)>g(x)$的解集是$(\frac{p_1+p_2}{2},+\infty)$.

A．①②④　　B．①③④　　C．①②③　　D．①②③④

【答案】C

【分析】根据函数图象的平移变换法则判断①；根据“若$f(x+m)=f(n-x)$，则$y=f(x)$的图象关于$x=\frac{m+n}{2}$对称”判断②；根据“若$f(x+m)+f(n-x)=p$，则$y=f(x)$的图象关于$\left(\frac{m+n}{2},\frac{p}{2}\right)$对称”判断③；根据指数函数的单调性解不等式判断④.

【详解】对于①，若$p_1>p_2$，$f(x)$的图象向左平移p_1-p_2个单位后得到$g(x)$的图象，

若 $p_1<p_2, f(x)$ 的图象向右平移 p_2-p_1 个单位后得到 $g(x)$ 的图象，所以①正确；

对于②，设 $F(x)=f(x)+g(x)$，则 $F(x+p_1)=3^{|x|}+3^{|x+p_1-p_2|}$，

$F(-x+p_2)=3^{|-x+p_2-p_1|}+3^{|-x|}=3^{|x|}+3^{|x+p_1-p_2|}$，$\therefore F(x+p_1)=F(p_2-x)$，

$\therefore f(x)+g(x)$ 关于 $x=\dfrac{p_1+p_2}{2}$ 对称，所以②正确；

对于③，设 $H(x)=f(x)-g(x)$，$H(x+p_1)=3^{|x|}-3^{|x+p_1-p_2|}$，

$H(-x+p_2)=-3^{|-x+p_2-p_1|}-3^{|-x|}=3^{|x+p_1-p_2|}-3^{|x|}$，

$H(x+p_1)+H(-x+p_2)=0$，$\therefore H(x)$ 关于 $\left(\dfrac{p_1+p_2}{2},0\right)$ 对称，所以③正确；

对于④，由 $f(x)>g(x)$ 得 $|x-p_1|>|x-p_2|$，化为 $|x-p_1|^2>|x-p_2|^2$，

$2(p_2-p_1)x>p_2{}^2-p_1{}^2$，若 $p_2>p_1, x>\dfrac{p_2+p_1}{2}$，

若 $p_2<p_1, x<\dfrac{p_2+p_1}{2}$，所以④错误，故选 C.

【点睛】本题主要考查函数图象的平移变换，以及函数的对称性的应用，属于难题.（1）若 $f(x+m)=f(n-x)$，则 $y=f(x)$ 的图象关于 $x=\dfrac{m+n}{2}$ 对称；（2）若 $f(x+m)+f(n-x)=p$，则 $y=f(x)$ 的图象关于 $\left(\dfrac{m+n}{2},\dfrac{p}{2}\right)$ 对称.

二、多选题

31．若函数 $f(x)=(m-2)x^m$ 是幂函数，则 $f(x)$ 一定（　　）

A．是偶函数

B．是奇函数

C．在 $x\in(-\infty,0)$ 上单调递减

D．在 $x\in(-\infty,0)$ 上单调递增

【答案】BD

【分析】根据幂函数的定义，列出方程，求解即可判断.

【详解】因为函数 $f(x)=(m-2)x^m$ 是幂函数，所以 $m-2=1$，

解得 $m=3$，所以 $f(x)=x^3$，由幂函数性质知 $f(x)$ 是奇函数且单调递增，

故选：BD.

32．下列说法正确的是（　）

A．命题“$\exists x_0 \in \mathbf{R}$，$x_0^2+3x_0+2\le 0$”的否定是“$\forall x\in \mathbf{R}$，$x^2+3x+2>0$”

B．$am^2<bm^2$是$a<b$的充分不必要条件

C．$f\left(x\right)=\frac{1}{x}$的单调减区间为$\left(-\infty,0\right)\cup\left(0,+\infty\right)$

D．若命题“$\exists x\in \mathbf{R}$，$ax^2-ax+4\le 0$”是假命题，则a的取值范围为$\left(0,16\right)$

【答案】AB

【分析】根据还有量词命题的否定可以判断A，根据充分条件和必要条件的定义即可判断B，根据函数单调性定义可以判断C，由命题是假命题可知，函数$f\left(x\right)=ax^2-ax+4$的图像全部在$x$轴上方，则$a>0$且$\Delta<0$，即可判断D.

【详解】对于A，命题“$\exists x_0\in \mathbf{R}$，$x_0^2+3x_0+2\le 0$”的否定是“$\forall x\in \mathbf{R}$，$x^2+3x+2>0$”，故A正确；

对于B，由题意知，当$am^2<bm^2$时，则$m^2\ne 0$，所以$a<b$，故充分性满足，

当$a<b$时，若$m^2=0$，则不能得到$am^2<bm^2$，故必要性不满足，

所以$am^2<bm^2$是$a<b$的充分不必要条件，故B正确；

对于C，由$f\left(-1\right)=-1<f\left(1\right)=1$可知，$f\left(x\right)=\frac{1}{x}$单调递减区间不是$\left(-\infty,0\right)\cup\left(0,+\infty\right)$，故$C$错误；

对于D，由命题“$\exists x\in \mathbf{R}$，$ax^2-ax+4\le 0$”是假命题可知，函数$f\left(x\right)=ax^2-ax+4$的图像全部在$x$轴上方，

当$a>0$时，则$\Delta<0$，即$\Delta=a^2-16a<0$，得$0<a<16$，

当$a=0$时，因为$4\le 0$不成立，所以原命题是假命题成立，

综上所诉，a的取值范围为$\left[0,16\right)$，故D错误.

故选：AB.

33．已知ab＞0，给出下面四个等式，其中不正确的有（　）

A．$\lg(ab)=\lg a+\lg b$

B．$\lg\frac{a}{b}=\lg a-\lg b$

C．$\frac{1}{2}\lg(\frac{a}{b})^2=\lg\frac{a}{b}$

D．$\lg(ab)=\frac{1}{\log_{ab}10}$

【答案】ABD

【分析】对于AB，由a＜0，b＜0时判断即可，对于C，利用对数的运算性质判断，对于D，举例判断

【详解】当a＜0，b＜0时，$\lg(ab)=\lg(-a)+\lg(-b)$，$\lg\frac{a}{b}=\lg(-a)-\lg(-b)$，故A，B错

当ab＞0时，$\frac{a}{b}>0$，$\frac{1}{2}\lg(\frac{a}{b})^2=\lg\frac{a}{b}$，故C正确；

当ab＝1时，logab10无意义，故D错误.

故选：ABD

34．(多选)下列指数式与对数式的互化中正确的是（　　）

A．$10^0=1$与$\lg1=0$　　B．$27^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$与$\log_{27}\frac{1}{3}=-3$

C．$\log_3 9=2$与$3^2=9$　　D．$\log_5 5=1$与$5^1=5$

【答案】ACD

【分析】根据指数运算和对数运算的法则，相互转化逐项判断即可.

【详解】B选项中，$27^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\log_{27}\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$.

故选：ACD

35．已知a，b，c满足$a>b>c$，且$ac<0$，则下列不等式中恒成立的有.

A．$\frac{b}{a}>\frac{c}{a}$　　B．$\frac{b-a}{c}>0$　　C．$\frac{b^2}{c}>\frac{a^2}{c}$　　D．$\frac{1}{a}>\frac{1}{c}$

【答案】ABD

【解析】利用不等式的基本性质逐一判断即可得出结论.

【详解】解：因为足$a>b>c$，且$ac<0$，所以$a>0$，$c<0$，

因为$b>c$，$a>0$，所以$\frac{1}{a}>0$，所以$\frac{b}{a}>\frac{c}{a}$，故A正确；

因为$b<a$，所以$b-a<0$，因为$c<0$，所以$\frac{b-a}{c}>0$，故B正确；

当$b=-2$，$a=1$时，$b^2>a^2$，因为$c<0$，所以$\frac{b^2}{c}<\frac{a^2}{c}$，故$C$不正确；

因为$a>0>c$，所以$\frac{1}{a}>0>\frac{1}{c}$，故$D$正确.

故选：ABD.

36．已知$f(x)=\log_5 x$，则对任意的$a,b\in(0,+\infty)$，下列关系成立的是（　　）

A．$f(ab)=f(a)+f(b)$

B. $f\left(ab\right)=f\left(a\right)f\left(b\right)$

C. $f\left(\frac{a}{b}\right)=f\left(a\right)+f\left(b\right)$

D. $f\left(\frac{a}{b}\right)=f\left(a\right)-f\left(b\right)$

【答案】AD

【分析】根据题意结合对数运算逐项分析判断.

【详解】因为$f\left(x\right)=\log_5 x$， $a,b\in\left(0,+\infty\right)$，

所以$f\left(ab\right)=\log_5\left(ab\right)=\log_5 a+\log_5 b=f\left(a\right)+f\left(b\right)$，故 A 正确，B 错误；

$f\left(\frac{a}{b}\right)=\log_5\frac{a}{b}=\log_5 a-\log_5 b=f\left(a\right)-f\left(b\right)$，故 C 错误，D 正确；

故选：AD.

37．下列命题中，假命题是（　）

A. $\exists x_0\in\mathrm{R}$， $\sin x_0=2$

B. “$x>1$”是“$2^x>1$”的充分不必要条件

C. $\forall x>0$， $\lg x>0$

D. 命题“$\forall x>0$， $\tan x>\sin x$”的否定为“$\exists x_0<0$， $\tan x_0>\sin x_0$”

【答案】ACD

【分析】利用正弦函数的值域判断 A；利用指数函数的性质判断 B；举反例判断 C；利用全称量词的否定判断 D.

【详解】对于 A，因为$y=\sin x$的值域为$\left[-1,1\right]$，

所以不存在$x_0\in\mathrm{R}$，使得$\sin x_0=2$，故 A 是假命题；

对于 B，当$x>1$时， $2^x>2^1>1$，即充分性成立；

当$2^x>1=2^0$时， $x>0$，即必要性不成立；

所以“$x>1$”是“$2^x>1$”的充分不必要条件，故 B 是真命题；

对于 C，当$x=\frac{1}{10}$时，满足$x>0$，但$\lg x=\lg\frac{1}{10}=-1<0$，故 C 是假命题；

对于 D，由全称量词的否定可知：

命题“$\forall x>0$， $\tan x>\sin x$”的否定为“$\exists x_0>0$， $\tan x_0\le\sin x_0$”，故 D 是假命题.

故选：ACD.

38．下列各组函数不是相同函数的是（　）

A．$y=1$，$y=\frac{x-1}{x-1}$　　B．$y=x+2$，$y=\sqrt[3]{(x+2)^3}$

C．$y=x+1$，$y=\frac{x^2-1}{x-1}$　　D．$y=|x-1|$，$y=\left(\sqrt{x-1}\right)^2$

【答案】ACD

【分析】根据函数定义域、对应关系等知识对选项进行分析，从而确定正确答案.

【详解】A 选项，$y=1$的定义域为R，$y=\frac{x-1}{x-1}$的定义域为$\{x|x\neq1\}$，所以不是相同函数.

B 选项，$y=\sqrt[3]{(x+2)^3}=x+2$，所以两个函数是相同函数，

C 选项，$y=x+1$的定义域为R，$y=\frac{x^2-1}{x-1}$的定义域为$\{x|x\neq1\}$，所以不是相同函数.

D 选项，$y=|x-1|$的定义域为R，$y=\left(\sqrt{x-1}\right)^2$的定义域为$\{x|x\geq1\}$，所以不是相同函数.

故选：ACD

39．下列选项正确的是（　）

A．若$a<b$，则$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

B．若$a<b<0$，则$a^2>ab>b^2$

C．若正实数x，y满足$x+2y=1$，则$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}$的最小值为 8

D．$y=\sqrt{x^2+3}+\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}$的最小值为 2

【答案】BC

【分析】利用特殊值、差比较法、基本不等式等知识确定正确答案.

【详解】A 选项，$a=1,b=2,a<b$，但$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，所以 A 选项错误.

B 选项，$a<b<0,a-b<0$，$a^2-ab=a(a-b)>0,a^2>ab$，

$ab-b^2=b(a-b)>0,ab>b^2$，所以$a^2>ab>b^2$，B 选项正确.

C 选项，$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\right)(x+2y)=4+\frac{4y}{x}+\frac{x}{y}\geq4+2\sqrt{\frac{4y}{x}\cdot\frac{x}{y}}=8$，

当且仅当$\frac{4y}{x}=\frac{x}{y},x=2y=\frac{1}{2}$时等号成立，C 选项正确.

D 选项，$y=\sqrt{x^2+3}+\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}\geq2\sqrt{\sqrt{x^2+3}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}}=2$，

但$\sqrt{x^2+3}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+3}}$无解，所以等号不成立，所以D选项错误.

故选：BC

40．若AD为$\triangle ABC$的一条中线，则"$\triangle ABC$是等腰三角形"的一个充分不必要条件可以是（　）

A．$AB=AC$　　B．$AD=BC$

C．$\angle BAD=\angle CAD$　　D．$AD\perp BC$

【答案】ACD

【分析】当命题$p\Rightarrow$命题q，且命题$q\not\Rightarrow$命题p时，"p"是"q"的充分不必要条件.

【详解】A选项：因为AB,AC是$\triangle ABC$两边，所以当$AB=AC$时，$\triangle ABC$是等腰三角形；

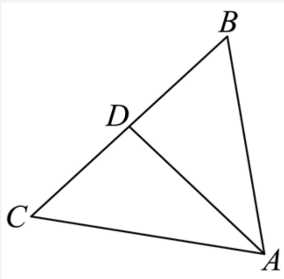
当$\triangle ABC$是等腰三角形时，可以是$AB=BC\neq AC$，

所以"$AB=AC$"是"$\triangle ABC$是等腰三角形"的一个充分不必要条件，故A选项正确；

B选项：AD是中线，当$AD=BC$时不能得出三角形两边相等，

故此时$\triangle ABC$不一定是等腰三角形，不满足充分条件，故B选项错误；

C选项：如图：



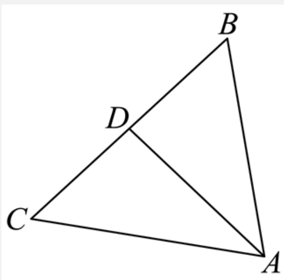
当$\angle BAD=\angle CAD$时，又正弦定理可得$\dfrac{AD}{\sin C}=\dfrac{CD}{\sin\angle DAC}=\dfrac{BD}{\sin\angle BAD}=\dfrac{AD}{\sin B}$，

$\therefore B=C$，$\therefore\triangle ABC$是等腰三角形；

当$\triangle ABC$是等腰三角形时，可能是$C=A\neq B$，此时$\angle BAD\neq\angle CAD$，

所以"$\angle BAD=\angle CAD$"是"$\triangle ABC$是等腰三角形"的一个充分不必要条件，所以C正确；

D选项：如图



当$AD\perp BC$时，AD是BC的中垂线，所以$AB=AC$，所以$\triangle ABC$是等腰三角形；

当$\vee ABC$是等腰三角形时，可能$CB=CA\neq AB$，此时$AD\perp BC$不成立，

所以“$AD\perp BC$”是“$\vee ABC$是等腰三角形”的一个充分不必要条件，故D选项正确；

故选：ACD

41．下面的结论中正确的是（　　）

A．若$ac^2>bc^2$，则$a>b$

B．若$a>b>0$，$m>0$，则$\dfrac{a+m}{b+m}>\dfrac{a}{b}$

C．若$a>0$，$b>0$，$a+b=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$，则$a+b\geq 2$

D．若$a>2b>0$，则$\dfrac{a^4+4}{b(a-2b)}\geq 32$

【答案】ACD

【分析】利用不等式的性质及基本不等式计算即可.

【详解】对于A，因为$ac^2>bc^2$，所以$c^2>0$，则$a>b$，故A正确；

对于B，不妨令$a=2,b=1,m=3$，则$\dfrac{a+m}{b+m}=\dfrac{5}{4}<\dfrac{a}{b}=2$，故B 错误；

对于C，$(a+b)^2=(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)=2+\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\geq 2+2\sqrt{\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{b}{a}}=4$，

当且仅当$a=b=1$时取得等号，所以$a+b\geq 2$，故C正确；

对于D，易知$2b(a-2b)\leq\left(\dfrac{2b+a-2b}{2}\right)^2=\dfrac{a^2}{4}$，当且仅当$a=4b$时取得等号，

所以$b(a-2b)\leq\dfrac{a^2}{8}$，则$\dfrac{a^4+4}{b(a-2b)}\geq\dfrac{8(a^4+4)}{a^2}=8a^2+\dfrac{32}{a^2}\geq 2\sqrt{8a^2\cdot\dfrac{32}{a^2}}=32$，

当且仅当$a=\sqrt{2},b=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$时，$\dfrac{a^4+4}{b(a-2b)}\geq 32$等号成立，故D正确.

故选：ACD

42．若$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}<0$，则下列不等式一定成立的是（　　）

A．$a+b<ab$　　B．$|a|>|b|$　　C．$a>b$　　D．$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}>2$

【答案】ACD

【分析】由不等式的性质可判断ABC，由基本不等式可判断D

【详解】由$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$，可得$b<a<0$，

对于A，$\because a+b<0$，$ab>0$，$\therefore a+b<ab$，故A正确，

对于B，$\because b<a<0$，$\therefore |b|>|a|$，故B错误，

对于C，由$b<a<0$可知C正确，

对于D，$\because \frac{b}{a}>0$，且$a\neq b$，$\therefore \frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=2$，故D正确，

故选：ACD

43．若a,b均为正数，且$a+2b=1$，则下列结论正确的是（　）

A．ab的最大值为$\frac{1}{8}$

B．$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$的最小值为9

C．a^2-b^2的最小值为$-\frac{1}{3}$

D．a^2+b^2的最小值为$\frac{1}{5}$

【答案】ABD

【分析】对于A，B，利用均值不等式或"1"的妙用计算判断；对于C，D化成关于b的二次函数即可判断作答.

【详解】因a,b均为正数，且$a+2b=1$，

则有$ab=\frac{1}{2}\cdot a\cdot 2b\le\frac{1}{2}\cdot(\frac{a+2b}{2})^2=\frac{1}{8}$，当且仅当$a=2b=\frac{1}{2}$时取"="，即$ab$的最大值为$\frac{1}{8}$，A正确；

$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=(a+2b)(\frac{1}{a}+\frac{2}{b})=5+(\frac{2b}{a}+\frac{2a}{b})\ge 5+2\sqrt{\frac{2b}{a}\cdot\frac{2a}{b}}=9$，当且仅当$a=b=\frac{1}{3}$时取"="，即$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$的最小值为9，B正确；

显然$0<b<\frac{1}{2}$，$a^2-b^2=(1-2b)^2-b^2=3b^2-4b+1$在$b\in(0,\frac{1}{2})$上单调递减，无最小值，C不正确；

$a^2+b^2=(1-2b)^2+b^2=5b^2-4b+1=5(b-\frac{2}{5})^2+\frac{1}{5}\ge\frac{1}{5}$，当且仅当$b=\frac{2}{5}$时取"="，即$a^2+b^2$的最小值为$\frac{1}{5}$，D正确.

故选：ABD

44．已知不等式$3ax^2+2ax+1>0$，则下列说法正确的是（　）

A．若$a=-1$，则不等式的解集为$\left(-1,\frac{1}{3}\right)$

B．若不等式的解集为$\left(-2,\frac{4}{3}\right)$，则$a=-\frac{1}{8}$

C．若不等式的解集为$\left(x_1,x_2\right)$，则$x_1x_2>0$

D．若不等式的解集为$\left(x_1,x_2\right)$，$\left|x+x_1\right|+\left|x-x_2\right|\geq\frac{2}{3}$

【答案】ABD

【分析】对于A解一元二次不等式即可判断，对于BC根据不等式的解集可知对应一元二次方程的根，由根与系数的关系求解即可判断，对于D，根据根与系数的关系及绝对值不等式即可判断.

【详解】对于A，$a=-1$时，不等式$-3x^2-2x+1>0$，即$3x^2+2x-1<0$，即$\left(3x-1\right)\left(x+1\right)<0$，解得$-1<x<\frac{1}{3}$，所以不等式的解集为$\left(-1,\frac{1}{3}\right)$，A正确；

对于B，若不等式的解集为$\left(-2,\frac{4}{3}\right)$，则二次函数$y=3ax^2+2ax+1$的图象开口向下，即$a<0$，

且$3ax^2+2ax+1=0$方程的两根为$-2,\frac{4}{3}$，故$\frac{1}{3a}=-2\times\frac{4}{3}$，所以$a=-\frac{1}{8}$，B正确；

对于C，若不等式的解集为$\left(x_1,x_2\right)$，则二次函数$y=3ax^2+2ax+1$的图象开口向下，即$a<0$，

且$3ax^2+2ax+1=0$方程的两根为x_1,x_2，故$x_1x_2=\frac{1}{3a}<0$，C错误；

对于D，若不等式的解集为$\left(x_1,x_2\right)$，则二次函数$y=3ax^2+2ax+1$的图象开口向下，即$a<0$，

且$3ax^2+2ax+1=0$方程的两根为x_1,x_2，故$x_1+x_2=-\frac{2}{3}$，

所以$\left|x+x_1\right|+\left|x-x_2\right|\geq\left|\left(x+x_1\right)-\left(x-x_2\right)\right|=\left|x_1+x_2\right|=\frac{2}{3}$，

当且仅当$\left(x+x_1\right)\left(x-x_2\right)\leq0$时，等号成立，D正确.

故选：ABD.

45．下列选项中，与$\sin(-\frac{11}{6}\pi)$的值相等的是（　　）

A．$2\cos^2 15^{\circ}-1$　　　　B．$\cos 18^{\circ}\cos 42^{\circ}-\sin 18^{\circ}\sin 42^{\circ}$

C． $2\sin 15^{\circ}\sin 75^{\circ}$　　　　D． $\dfrac{\tan 30^{\circ}+\tan 15^{\circ}}{1-\tan 30^{\circ}\tan 15^{\circ}}$

【答案】BC

【分析】

由诱导公式先求出$\sin(-\frac{11}{6}\pi)$的值，然后用三角恒等公式逐一验证即可.

【详解】由题意有$\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，

对于A选项：因为$2\cos^2 15^{\circ}-1=\cos 30^{\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2}\neq\frac{1}{2}$，故A选项不符合题意；

对于B选项：因为$\cos 18^{\circ}\cos 42^{\circ}-\sin 18^{\circ}\sin 42^{\circ}=\cos\left(18^{\circ}+42^{\circ}\right)=\cos 60^{\circ}=\frac{1}{2}$，故B选项符合题意；

对于C选项：因为$2\sin 15^{\circ}\sin 75^{\circ}=\cos\left(75^{\circ}-15^{\circ}\right)-\cos\left(75^{\circ}+15^{\circ}\right)=\cos 60^{\circ}-\cos 90^{\circ}=\frac{1}{2}$，故C选项符合题意；

对于D选项：因为$\frac{\tan 30^{\circ}+\tan 15^{\circ}}{1-\tan 30^{\circ}\tan 15^{\circ}}=\tan\left(30^{\circ}+15^{\circ}\right)=\tan 45^{\circ}=1\neq\frac{1}{2}$，故D选项不符合题意;

故选：BC.

46．已知函数$f\left(x\right)=\sqrt{3}\sin\omega x-\cos\omega x\left(\omega>0\right)$的最小正周期为$\pi$，则以下命题正确的有（　）

A． $\omega=2$

B．函数$f\left(x\right)$的图象关于直线$x=-\frac{\pi}{6}$对称

C．将函数$f\left(x\right)$的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，得到的图象关于y轴对称

D．若方程$f\left(x\right)=\frac{3}{4}$在$(0,\pi)$上有两个不等实数根$x_1,x_2$，则$\cos\left(x_1+x_2\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】ABC

【分析】A：先根据辅助角公式化简$f\left(x\right)$，再根据周期公式可求ω；B：计算$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)$的值，根据是否为最值作出判断；C：将$f\left(x\right)$解析式中的$x$替换为$x-\frac{\pi}{6}$可得结果；D：作出$y=f\left(x\right),y=\frac{3}{4}$的图象，根据对称性求得$x_1+x_2$的值，则$\cos\left(x_1+x_2\right)$的值可知.

【详解】A：$f\left(x\right)=\sqrt{3}\sin\omega x-\cos\omega x=2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)$，因为$T=\pi$，所以$\omega=\frac{2\pi}{T}=2$，故正确；

B：因为$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left[2\times\left(-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{6}\right]=-2$，即为最小值，所以$f\left(x\right)$的图象关于直线$x=-\frac{\pi}{6}$

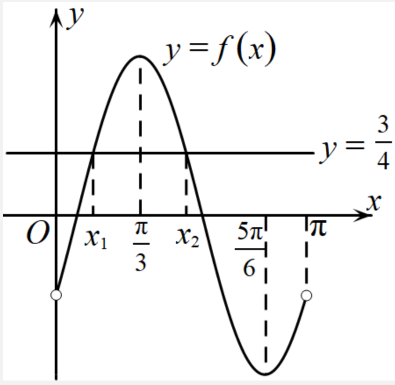
对称，故正确；

C：$f(x)$的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度可得

$y=2\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{6}\right]=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=-2\cos 2x$，

显然$y=-2\cos 2x$为偶函数，所以图象关于y轴对称，故正确；

D：$f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，作出$y=f(x), y=\frac{3}{4}$的图象如下图所示，



令$2x-\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$，所以$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}, k\in\mathbf{Z}$，

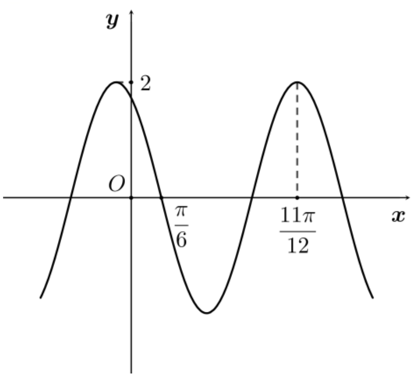
当$k=0$时，$x=\frac{\pi}{3}$，当$k=1$时，$x=\frac{5\pi}{6}$，

由图象可知，$y=f(x), y=\frac{3}{4}$的交点关于直线$x=\frac{\pi}{3}$对称，

所以$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{\pi}{3}$，所以$x_1+x_2=\frac{2\pi}{3}$，所以$\cos(x_1+x_2)=-\frac{1}{2}$，故错误；

故选：ABC.

47．函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（$\omega>0$，$|\varphi|<\pi$）的部分图象如图所示，则（　　）



A．$\omega=2$

B．$\varphi=-\frac{\pi}{3}$

C．$f(x)$的单调递减区间为$[-\frac{\pi}{12}+2k\pi,\frac{5\pi}{12}+2k\pi]$（$k\in Z$）

D．$f(x)$图象的对称轴方程为$x=-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$（$k\in Z$）

【答案】AD

【分析】由图知$A=2$且$\frac{3}{4}T=\frac{3\pi}{4}$求$\omega$，根据五点法求参数$\varphi$，即可得$f(x)$的解析式，再由正弦型函数的性质求递减区间、对称轴方程，即可判断各选项的正误.

【详解】由图可得：$A=2$且$\frac{3}{4}T=\frac{11\pi}{12}-\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{4}$，

$\therefore T=\pi$，则$\omega=\frac{2\pi}{T}=2$，A 正确.

由$f\left(\frac{11\pi}{12}\right)=2\sin\left(\frac{11\pi}{6}+\varphi\right)=2$，则$\frac{11\pi}{6}+\varphi=\frac{5\pi}{2}+2k\pi$（$k\in Z$），得$\varphi=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$（$k\in Z$），

即$\varphi=\frac{2\pi}{3}$，B 错误.

综上，有$f\left(x\right)=2\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$，

由$\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x+\frac{2\pi}{3}\le\frac{3\pi}{2}+2k\pi$，（$k\in Z$），得$-\frac{\pi}{12}+k\pi\le x\le\frac{5\pi}{12}+k\pi$（$k\in Z$），C 错误.

由$2x+\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi$（$k\in Z$），得$x=-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$（$k\in Z$），D 正确.

故选：AD.

48．$f(x)$是定义在R上的奇函数，$f(x+2)$是偶函数，当$x\in[-2,0],f(x)=-x$，当$x\in\left[m,n\right]$时，$f(x)$值域为$\left[-2,1\right]$，则$m+n$可能的取值为（　）

A．13　　　B．5　　　C．1　　　D．-13

【答案】BC

【分析】根据多给条件求得所以$f(x)$的周期为8，且$f(x)$关于$x=2$对称，可得如图所示函数图像，根据图像进行分析即可得解.

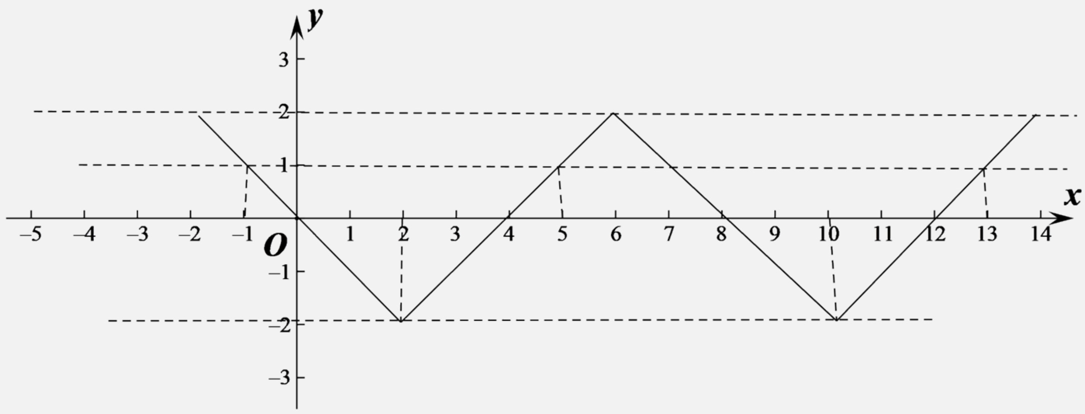
【详解】根据题意，函数$y=f(x)$满足$f(-x)=-f(x)$且$f(-x+2)=f(x+2)$，

所以$f(x+2)=-f(x-2)$，所以$f(x+2)=f(x-6)$，

所以$f(x)$的周期为8，由当$x\in[-2,0],f(x)=-x$，

由$f(x)$为奇函数，当$x\in[0,2],f(x)=-x$，又$f(x)$关于$x=2$对称，

可得如下图像，



如若要值域取得$\left[-2,1\right]$，根据答案当$m=-1,n=2$时符合题意，

此时$m+n=1$，故 C 正确；

当$m=0,n=5$，值域也是$\left[-2,1\right]$，故 B 正确；

由图可知$m+n=13$不符题意，结合奇函数性质，故 AD 错误；

故选：BC

49．非空集合A具有下列性质：①若x，yÎ A，则$\frac{x}{y}\in A$；②若x，yÎ A，则$x+y\in A$.下列选项正确的是（　）

A．$-1\notin A$　　　　B．$\frac{2020}{2021}\notin A$

C．若x，yÎ A，则$xy\in A$　　　　D．若x，yÎ A，则$x-y\notin A$

【答案】AC

【分析】若$-1\in A$，利用条件可得当$x=-1\in A$，$y=0\in A$时，不满足$\frac{x}{y}\in A$，可判断 A，利用条件可得若$x\neq 0$且$x\in A$，进而得$2020\in A$，$2021\in A$，可判断 B，利用题设可得若x，yÎ A，则$xy\in A$，$x-y=1\in A$可判断 CD.

【详解】对于 A，若$-1\in A$，则$\frac{-1}{-1}=1\in A$，此时$-1+1=0\in A$，而当$x=-1\in A$，$y=0\in A$时，$\frac{-1}{0}$显然无意义，不满足$\frac{x}{y}\in A$，所以$-1\notin A$，故 A 正确；

对于 B，若$x\neq 0$且$x\in A$，则$1=\frac{x}{x}\in A$，所以$2=1+1\in A$，$3=2+1\in A$，以此类推，得对任意的$n\in \mathbf{N}^{*}$，有$n\in A$，所以$2020\in A$，$2021\in A$，所以$\frac{2020}{2021}\in A$，故 B 错误；

对于 C，若x，yÎ A，则$x\neq 0$且$y\neq 0$，又$1\in A$，所以$\frac{1}{y}\in A$，所以$xy=\frac{x}{\frac{1}{y}}=\in A$