2023年河南省南阳市数学高三上期末联考模拟试题

注意事项

1．考生要认真填写考场号和座位序号。

2．试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。

3．考试结束后，考生须将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．设点 $A(t,0)$，P 为曲线 $y=e^x$ 上动点，若点 A，P 间距离的最小值为 $\sqrt{6}$，则实数 t 的值为（　　）

A．$\sqrt{5}$　　B．$\frac{5}{2}$　　C．$2+\frac{\ln 2}{2}$　　D．$2+\frac{\ln 3}{2}$

2．已知正四面体 $A-BCD$ 外接球的体积为 $8\sqrt{6}\pi$，则这个四面体的表面积为（　　）

A．$18\sqrt{3}$　　B．$16\sqrt{3}$　　C．$14\sqrt{3}$　　D．$12\sqrt{3}$

3．若 $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x}\right)^n$ 的展开式中二项式系数和为 256，则二项式展开式中有理项系数之和为（　　）

A．85　　B．84　　C．57　　D．56

4．已知 $\triangle ABC$ 的内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，且 $A=60°$，$b=3$，AD 为 BC 边上的中线，若 $AD=\frac{7}{2}$，则 $\triangle ABC$ 的面积为（　　）

A．$\frac{25\sqrt{3}}{4}$　　B．$\frac{15\sqrt{3}}{4}$　　C．$\frac{15}{4}$　　D．$\frac{35\sqrt{3}}{4}$

5．将函数 $f(x)=\sin(2x-\varphi)$ 的图象向右平移 $\frac{1}{8}$ 个周期后，所得图象关于 y 轴对称，则 φ 的最小正值是（　　）

A．$\frac{\pi}{8}$　　B．$\frac{3\pi}{4}$　　C．$\frac{\pi}{2}$　　D．$\frac{\pi}{4}$

6．学业水平测试成绩按照考生原始成绩从高到低分为 A、B、C、D、E 五个等级．某班共有 36 名学生且全部选考物理、化学两科，这两科的学业水平测试成绩如图所示．该班学生中，这两科等级均为 A 的学生有 5 人，这两科中仅有一科等级为 A 的学生，其另外一科等级为 B，则该班（　　）

等级 科目	A	B	C	D	E
物理	10	16	9	1	0
化学	8	19	7	2	0

A．物理化学等级都是 B 的学生至多有 12 人

B．物理化学等级都是 B 的学生至少有 5 人

C．这两科只有一科等级为 B 且最高等级为 B 的学生至多有 18 人

D．这两科只有一科等级为 B 且最高等级为 B 的学生至少有 1 人

7. 棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 内有一个内切球 O，过正方体中两条异面直线 AB， A_1D_1 的中点 P,Q 作直线，则该直线被球面截在球内的线段的长为（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B．$\sqrt{2}-1$　　C．$\sqrt{2}$　　D．1

8．在平行四边形 $ABCD$ 中， $AB=3, AD=2, \overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AQ}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, 若 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CQ}=12$, 则 $\angle ADC=$(　)

A．$\dfrac{5\pi}{6}$　　B．$\dfrac{3\pi}{4}$　　C．$\dfrac{2\pi}{3}$　　D．$\dfrac{\pi}{2}$

9．数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_3=\dfrac{1}{5}, a_n-a_{n+1}=2a_na_{n+1}$，则数列 $\{a_na_{n+1}\}$ 前 10 项的和为

A．$\dfrac{10}{21}$　　B．$\dfrac{20}{21}$　　C．$\dfrac{9}{19}$　　D．$\dfrac{18}{19}$

10．已知复数 z 满足 $|z|=1$，则 $|z+2-i|$ 的最大值为（　　）

A．$2+3$　　B．$1+\sqrt{5}$　　C．$2+\sqrt{5}$　　D．6

11. 已知函数 $f(x)$ 是奇函数，且 $f(x)-f'(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)-\dfrac{2}{1-x^2}$，若对 $\forall x\in[\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{2}]$， $|f(ax+1)|<|f(x-1)|$ 恒成立，则 a 的取值范围是（　　）

A．$(-3,-1)$　　B．$(-4,-1)$　　C．$(-3,0)$　　D．$(-4,0)$

12．若 $a_0+a_1(2x-1)+a_2(2x-1)^2+a_3(2x-1)^3+a_4(2x-1)^4+a_5(2x-1)^5=x^5$，则 a_2 的值为（　　）

A．$\dfrac{5}{4}$　　B．$\dfrac{5}{8}$　　C．$\dfrac{5}{16}$　　D．$\dfrac{5}{32}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．已知函数 $f\left(x\right)=a\ln\left(2x\right)-e^{\frac{2x}{e}}$ 有且只有一个零点，则实数 a 的取值范围为__________.

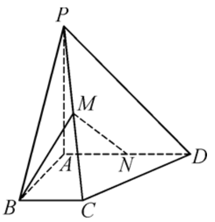
14．已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F，过点 F 且斜率为 1 的直线与抛物线 C 交于点 A,B，以线段 AB 为直径的圆 E 上存在点 P,Q，使得以 PQ 为直径的圆过点 $D(-2,t)$，则实数 t 的取值范围为________.

15．动点 P 到直线 $x=-1$ 的距离和他到点 $F(1,0)$ 距离相等，直线 AB 过 $(4,0)$ 且交点 P 的轨迹于 A,B 两点，则以 AB 为直径的圆必过_________.

16．已知一个四面体 $ABCD$ 的每个顶点都在表面积为 9π 的球 O 的表面上，且 $AB=CD=a$，$AC=AD=BC=BD=\sqrt{5}$，则 $a=$__________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）如图，在四棱锥 $PABCD$ 中，$PA\perp$平面 $ABCD$，$\angle ABC=\angle BAD=90°$，$AD=AP=4$，$AB=BC=2$，$M$ 为 PC 的中点．



（1）求异面直线 AP，BM 所成角的余弦值；

（2）点 N 在线段 AD 上，且 $AN=\lambda$，若直线 MN 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\frac{4}{5}$，求 λ 的值．

18．（12 分）已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左、右焦点分别为 F_1，F_2，离心率为 $\frac{1}{2}$，且过点 $\left(1,\frac{3}{2}\right)$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）过左焦点 F_1 的直线 l 与椭圆 C 交于不同的 A，B 两点，若 $\angle AF_2B=\frac{\pi}{2}$，求直线 l 的斜率 k.

19．（12 分）对于给定的正整数 k，若各项均不为 0 的数列 $\left\{a_n\right\}$ 满足：$a_{n-k}\cdot a_{n-k+1}\cdots a_{n-1}\cdot a_{n+1}\cdots a_{n+k-1}\cdot a_{n+k}=\left(a_n\right)^{2k}$ 对任意正整数 $n(n>k)$ 总成立，则称数列 $\left\{a_n\right\}$ 是"$Q(k)$ 数列".

（1）证明：等比数列 $\left\{a_n\right\}$ 是"$Q(3)$ 数列"；

（2）若数列 $\left\{a_n\right\}$ 既是"$Q(2)$ 数列"又是"$Q(3)$ 数列"，证明：数列 $\left\{a_n\right\}$ 是等比数列.

20．（12 分）若函数 $f(x)=e^x-ae^{-x}-mx\left(m\in R\right)$ 为奇函数，且 $x=x_0$ 时 $f(x)$ 有极小值 $f(x_0)$.

（1）求实数 a 的值与实数 m 的取值范围；

（2）若 $f\left(x_0\right)\ge -\dfrac{2}{e}$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

21.（12 分）已知椭圆 E：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左、右焦点分别为 F_1 和 F_2，右顶点为 A，且 $\left|AF_1\right|=3$，短轴长为 $2\sqrt{3}$.

（1）求椭圆 E 的方程；

（2）若过点 A 作垂直 x 轴的直线 l，点 T 为直线 l 上纵坐标不为零的任意一点，过 F_2 作 TF_2 的垂线交椭圆 E 于点 P 和 Q，当 $\dfrac{\left|TF_2\right|}{|PQ|}=\dfrac{7\sqrt{2}}{24}$ 时，求此时四边形 TPF_1Q 的面积.

22.（10 分）自湖北武汉爆发新型冠状病毒感染的肺炎疫情以来，武汉医护人员和医疗、生活物资严重缺乏，全国各地纷纷驰援.截至 1 月 30 日 12 时，湖北省累计接收捐赠物资 615.43 万件，包括医用防护服 2.6 万套 $N95$ 口罩 47.9 万个，医用一次性口罩 172.87 万个，护目镜 3.93 万个等.中某运输队接到给武汉运送物资的任务，该运输队有 8 辆载重为 $6t$ 的 A 型卡车，6 辆载重为 $10t$ 的 B 型卡车，10 名驾驶员，要求此运输队每天至少运送 $720t$ 物资.已知每辆卡车每天往返的次数：A 型卡车 16 次，B 型卡车 12 次；每辆卡车每天往返的成本：A 型卡车 240 元，B 型卡车 378 元.求每天派出 A 型卡车与 B 型卡车各多少辆，运输队所花的成本最低？

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

设 $P(x,e^x)$，求 $\left|AP\right|^2$，作为 x 的函数，其最小值是 6，利用导数知识求 $\left|AP\right|^2$ 的最小值.

【详解】

设 $P(x,e^x)$，则 $\left|AP\right|^2=(x-t)^2+e^{2x}$，记 $g(x)=e^{2x}+(x-t)^2$，

$g'(x)=2e^{2x}+2(x-t)$，易知 $g'(x)=2e^{2x}+2(x-t)$ 是增函数，且 $g'(x)$ 的值域是 R，

$\therefore g'(x)=0$ 的唯一解 x_0，且 $x<x_0$ 时，$g'(x)<0$，$x>x_0$ 时，$g'(x)>0$，即 $g(x)_{\min}=g(x_0)$，

由题意 $g(x_0)=e^{2x_0}+(x_0-t)^2=6$，而 $g'(x_0)=2e^{2x_0}+2(x_0-t)=0$，$x_0-t=-e^{2x_0}$，

$\therefore e^{2x_0}+e^{4x_0}=6$，解得 $e^{2x_0}=2$， $x_0=\dfrac{\ln 2}{2}$.

$\therefore t=e^{2x_0}+x_0=2+\dfrac{\ln 2}{2}$.

故选：C.

【点睛】

本题考查导数的应用，考查用导数求最值．解题时对 x_0 和 t 的关系的处理是解题关键.

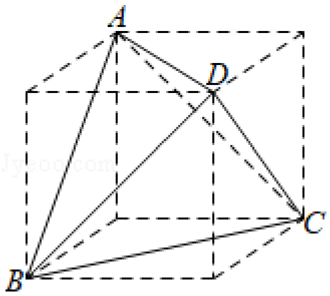
2、B

【解析】

设正四面体 ABCD 的外接球的半径 R，将该正四面体放入一个正方体内，使得每条棱恰好为正方体的面对角线，根据正方体和正四面体的外接球为同一个球计算出正方体的棱长，从而得出正四面体的棱长，最后可求出正四面体的表面积.

【详解】

将正四面体 ABCD 放在一个正方体内，设正方体的棱长为 a，如图所示，



设正四面体 ABCD 的外接球的半径为 R，则 $\dfrac{4\pi R^3}{3}=8\sqrt{6}\pi$，得 $R=\sqrt{6}$．因为正四面体 ABCD 的外接球和正方体的外接球是同一个球，则有 $\sqrt{3}\mathrm{a}=2R=2\sqrt{6}$，$\therefore \mathrm{a}=2\sqrt{2}$ ．而正四面体 ABCD 的每条棱长均为正方体的面对角线长，所以，正四面体 ABCD 的棱长为 $\sqrt{2}\mathrm{a}=2\sqrt{2}\times\sqrt{2}=4$，因此，这个正四面体的表面积为 $4\times\dfrac{\sqrt{3}a^2}{4}=16\sqrt{3}$.

故选：B.

【点睛】

本题考查球的内接多面体，解决这类问题就是找出合适的模型将球体的半径与几何体的一些几何量联系起来，考查计算能力，属于中档题.

3、A

【解析】

先求n，再确定展开式中的有理项，最后求系数之和.

【详解】

解：$\left(\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{x}\right)^n$ 的展开式中二项式系数和为 256

故$2^n=256$，$n=8$

$T_{r+1}=C_8^r x^{\frac{8-r}{3}}x^{-r}=C_8^r x^{\frac{8-4r}{3}}$

要求展开式中的有理项，则$r=2,5,8$

则二项式展开式中有理项系数之和为：$C_8^2+C_8^5+C_8^8=85$

故选：A

【点睛】

考查二项式的二项式系数及展开式中有理项系数的确定，基础题.

4、B

【解析】

延长AD到E，使$AD=DE$，连接BE,CE，则四边形$ABEC$为平行四边形，根据余弦定理可求出$AB=5$，进而可得$\vee ABC$的面积.

【详解】

解：延长AD到E，使$AD=DE$，连接BE,CE，则四边形$ABEC$为平行四边形，

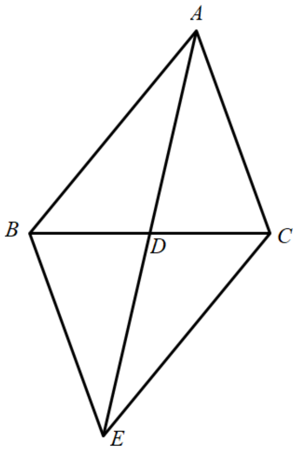
则$BE=AC=3$，$\angle ABE=180^\circ-60^\circ=120^\circ$，$AE=2AD=7$，

在$\triangle ABE$中，$AE^2=AB^2+BE^2-2AB\cdot BE\cos\angle ABE$

则$7^2=AB^2+3^2-2\times AB\times 3\times\cos 120^\circ$，得$AB=5$，

$S_{\vee ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin 60^\circ=\dfrac{1}{2}\times 5\times 3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$.

故选：B.



【点睛】

本题考查余弦定理的应用，考查三角形面积公式的应用，其中根据中线作出平行四边形是关键，是中档题.

5、D

【解析】

由函数 $y=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)$ 的图象平移变换公式求出变换后的函数解析式，再利用诱导公式得到关于 φ 的方程，对 k 赋值即可求解.

【详解】

由题意知，函数 $f(x)=\sin(2x-\varphi)$ 的最小正周期为 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$,即 $\dfrac{T}{8}=\dfrac{\pi}{8}$,

由函数 $y=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)$ 的图象平移变换公式可得，

将函数 $f(x)=\sin(2x-\varphi)$ 的图象向右平移 $\dfrac{1}{8}$ 个周期后的解析式为

$$g\left(x\right)=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)-\varphi\right]=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}-\varphi\right),$$

因为函数 $g\left(x\right)$ 的图象关于 y 轴对称，

所以 $-\dfrac{\pi}{4}-\varphi=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in z$ ，即 $\varphi=-\dfrac{3\pi}{4}+k\pi,k\in z$ ，

所以当 $k=1$ 时，φ 有最小正值为 $\dfrac{\pi}{4}$.

故选：D

【点睛】

本题考查函数 $y=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)$ 的图象平移变换公式和三角函数诱导公式及正余弦函数的性质；熟练掌握诱导公式和正余弦函数的性质是求解本题的关键；属于中档题、常考题型.

6、D

【解析】

根据题意分别计算出物理等级为A，化学等级为B的学生人数以及物理等级为B，化学等级为A的学生人数，结合表格中的数据进行分析，可得出合适的选项.

【详解】

根据题意可知，36名学生减去5名全A和一科为A另一科为B的学生$10-5+8-5=8$人（其中物理A化学B的有5人，物理B化学A的有3人），

表格变为：

	A	B	C	D	E
物理	$10-5-5=0$	$16-3=13$	9	1	0
化学	$8-5-3=0$	$19-5=14$	7	2	0

对于A选项，物理化学等级都是B的学生至多有13人，A选项错误；

对于B选项，当物理C和D，化学都是B时，或化学C和D，物理都是B时，物理、化学都是B的人数最少，至少为$13-7-2=4$（人），B选项错误；

对于C选项，在表格中，除去物理化学都是B的学生，剩下的都是一科为B且最高等级为B的学生，

因为都是B的学生最少4人，所以一科为B且最高等级为B的学生最多为$13+9+1-4=19$（人），

C选项错误；

对于D选项，物理化学都是B的最多13人，所以两科只有一科等级为B且最高等级为B的学生最少$14-13=1$（人），

D选项正确.

故选：D.

【点睛】

本题考查合情推理，考查推理能力，属于中等题.

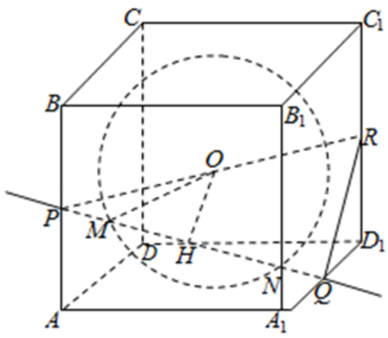
7、C

【解析】

连结并延长PO，交对棱C_1D_1于R，则R为对棱的中点，取MN的中点H，则$OH\perp MN$，推导出$OH\parallel RQ$，且$OH=\frac{1}{2}RQ=\frac{\sqrt{2}}{2}$，由此能求出该直线被球面截在球内的线段的长.

【详解】

如图，



MN 为该直线被球面截在球内的线段

连结并延长 PO，交对棱 C_1D_1 于 R，

则 R 为对棱的中点，取 MN 的中点 H，则 $OH\perp MN$，

$\therefore OH\parallel RQ$，且 $OH=\dfrac{1}{2}RQ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore MH=\sqrt{OM^2-OH^2}=\sqrt{1^2-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore MN=2MH=\sqrt{2}$．

故选：C．

【点睛】

本题主要考查该直线被球面截在球内的线段的长的求法，考查空间中线线、线面、面面间的位置关系等基础知识，考查运算求解能力，是中档题．

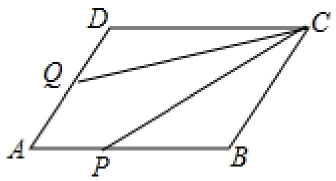
8、C

【解析】

由 $\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BP}=-\overrightarrow{AD}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DQ}=-\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$，利用平面向量的数量积运算，先求得 $\angle BAD=\dfrac{\pi}{3}$，利用平行四边形的性质可得结果．

【详解】

如图所示，



平行四边形 $ABCD$ 中，$AB=3, AD=2$，

$\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AQ}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$，

$\therefore \overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BP}=-\overrightarrow{AD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$,

$\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DQ}=-\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$,

因为$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CQ}=12$,

所以$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CQ}=\left(-\overrightarrow{AD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)$

$=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}^2+\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$

$=\frac{2}{3}\times3^2+\frac{1}{2}\times2^2+\frac{4}{3}\times3\times2\times\cos\angle BAD=12$,

$\cos\angle BAD=\frac{1}{2}$，$\therefore\angle BAD=\frac{\pi}{3}$,

所以$\angle ADC=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$，故选 C.

【点睛】

本题主要考查向量的几何运算以及平面向量数量积的运算法则，属于中档题. 向量的运算有两种方法：（1）平行四边形法则（平行四边形的对角线分别是两向量的和与差）；（2）三角形法则（两箭头间向量是差，箭头与箭尾间向量是和）.

9、A

【解析】

分析：通过对 $a_n-a_{n+1}=2a_na_{n+1}$ 变形可知$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=2$，进而可知$a_n=\frac{1}{2n-1}$，利用裂项相消法求和即可.

详解：$\because a_n-a_{n+1}=2a_na_{n+1}$，$\therefore\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=2$,

又$\because\frac{1}{a_3}=5$,

$\therefore\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_3}+2\left(n-3\right)=2n-1$，即$a_n=\frac{1}{2n-1}$,

$\therefore a_na_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n-a_{n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$,

$\therefore$数列$\left\{a_na_{n+1}\right\}$前$10$项的和为$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{21}\right)=\frac{10}{21}$,