关于数列求和的基本方法和技巧

- 数列是高中代数的重要内容，又是学习高等数学的基础. 在高考占有重要的地位. 数列求和是数列的重要内容之一，除了等差数列和等比数列有求和公式外，大部分数列的求和都需要一定的技巧. 下面，就几个历届高考数学谈谈数列求和的基本方法和技巧.

一、利用常用求和公式求和

利用下列常用求和公式求和是数列求和的最基本最重要的方法.

1、等差数列求和公式：$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$

2、等比数列求和公式：$S_n=\begin{cases} na_1 & (q=1) \\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-a_nq}{1-q} & (q\neq 1) \end{cases}$

3、$S_n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$

4、$S_n=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

5、$S_n=\sum_{k=1}^{n}k^3=[\frac{1}{2}n(n+1)]^2$

- ***[例1]*** 已知 $\log_3 x = \dfrac{-1}{\log_2 3}$ ，

求 $x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$的前n项和

由等比数列求和公式得

$$S_n = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \frac{x(1-x^n)}{1-x} = \frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

- **[例2]** 设S_n＝1+2+3+…+n，n∈N*,求$f(n)=\dfrac{S_n}{(n+32)S_{n+1}}$的最大值

解：由等差数列求和公式得

$$S_n=\frac{1}{2}n(n+1) \qquad S_n=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

$$\therefore f(n)=\frac{S_n}{(n+32)S_{n+1}}=\frac{n}{n^2+34n+64}=\frac{1}{n+34+\dfrac{64}{n}}=\frac{1}{(\sqrt{n}-\dfrac{8}{\sqrt{n}})^2+50}\le\frac{1}{50}$$

$\therefore$ 当$\sqrt{n}-\dfrac{8}{\sqrt{8}}$，即n＝8时，$f(n)_{\max}=\dfrac{1}{50}$

二、错位相减法求和

- 这种方法是在推导等比数列的前n项和公式时所用的方法，这种方法主要用于求数列$\{a_n \cdot b_n\}$的前n项和，其中$\{a_n\}$、$\{b_n\}$分别是等差数列和等比数列.

[例3] 求和： $S_n = 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \cdots + (2n-1)x^{n-1}$ ………①

解：由题可知，$\{(2n-1)x^{n-1}\}$的通项是等差数列{2n—1}的通项与等比数列{ x^{n-1} }的通项之积

设 $xS_n = 1x + 3x^2 + 5x^3 + 7x^4 + \cdots + (2n-1)x^n$ ………②　（设制错位）

①—②得 $(1-x)S_n = 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + \cdots + 2x^{n-1} - (2n-1)x^n$

（错位相减）

再利用等比数列的求和公式得：

$$(1-x)S_n = 1 + 2x \cdot \frac{1-x^{n-1}}{1-x} - (2n-1)x^n$$

$$\therefore\quad S_n = \frac{(2n-1)x^{n+1} - (2n+1)x^n + (1+x)}{(1-x)^2}$$

[例4] 求数列 $\frac{2}{2},\frac{4}{2^2},\frac{6}{2^3},\cdots,\frac{2n}{2^n},\cdots$ 前n项的和

解：由题可知，{ $\frac{2n}{2^n}$ }的通项是等差数列{2n}的通项与等比数列{ $\frac{1}{2^n}$ }的通项之积

设 $S_n=\frac{2}{2}+\frac{4}{2^2}+\frac{6}{2^3}+\cdots+\frac{2n}{2^n}$ ………………………………①

$\frac{1}{2}S_n=\frac{2}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\frac{6}{2^4}+\cdots+\frac{2n}{2^{n+1}}$ ………………………………② （设制错位）

①－②得 $(1-\frac{1}{2})S_n=\frac{2}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{2}{2^4}+\cdots+\frac{2}{2^n}-\frac{2n}{2^{n+1}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{2n}{2^{n+1}}$

$\therefore\quad S_n=4-\frac{n+2}{2^{n-1}}$

三、反序相加法求和

- 这是推导等差数列的前n项和公式时所用的方法，就是将一个数列倒过来排列（反序），再把它与原数列相加，就可以得到n个．

[例5] {理}求证：$C_n^0+3C_n^1+5C_n^2+\cdots+(2n+1)C_n^n=(n+1)2^n$

证明： 设 $S_n=C_n^0+3C_n^1+5C_n^2+\cdots+(2n+1)C_n^n$ …………… ①

把①式右边倒转过来得

$$S_n=(2n+1)C_n^n+(2n-1)C_n^{n-1}+\cdots+3C_n^1+C_n^0$$ （反序）

又由 $C_n^m=C_n^{n-m}$ 可得

$$S_n=(2n+1)C_n^0+(2n-1)C_n^1+\cdots+3C_n^{n-1}+C_n^n$$ ………………… ②

①+②得 $2S_n=(2n+2)(C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^{n-1}+C_n^n)=2(n+1)\cdot 2^n$（反序相加）

$$\therefore\ S_n=(n+1)\cdot 2^n$$

[例6] 求 $\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \cdots + \sin^2 88^\circ + \sin^2 89^\circ$ 的值

解：设 $S = \sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \cdots + \sin^2 88^\circ + \sin^2 89^\circ$………… ①

将①式右边反序得

$S = \sin^2 89^\circ + \sin^2 88^\circ + \cdots + \sin^2 3^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 1^\circ$…….② *反序）*

又因为 $\sin x = \cos(90^\circ - x), \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

①+②得 $2S = (\sin^2 1^\circ + \cos^2 1^\circ) + (\sin^2 2^\circ + \cos^2 2^\circ) + \cdots + (\sin^2 89^\circ + \cos^2 89^\circ)$＝89

∴ S＝44.5

四、分组法求和

- 有一类数列，既不是等差数列，也不是等比数列，若将这类数列适当拆开，可分为几个等差、等比或常见的数列，然后分别求和，再将其合并即可.