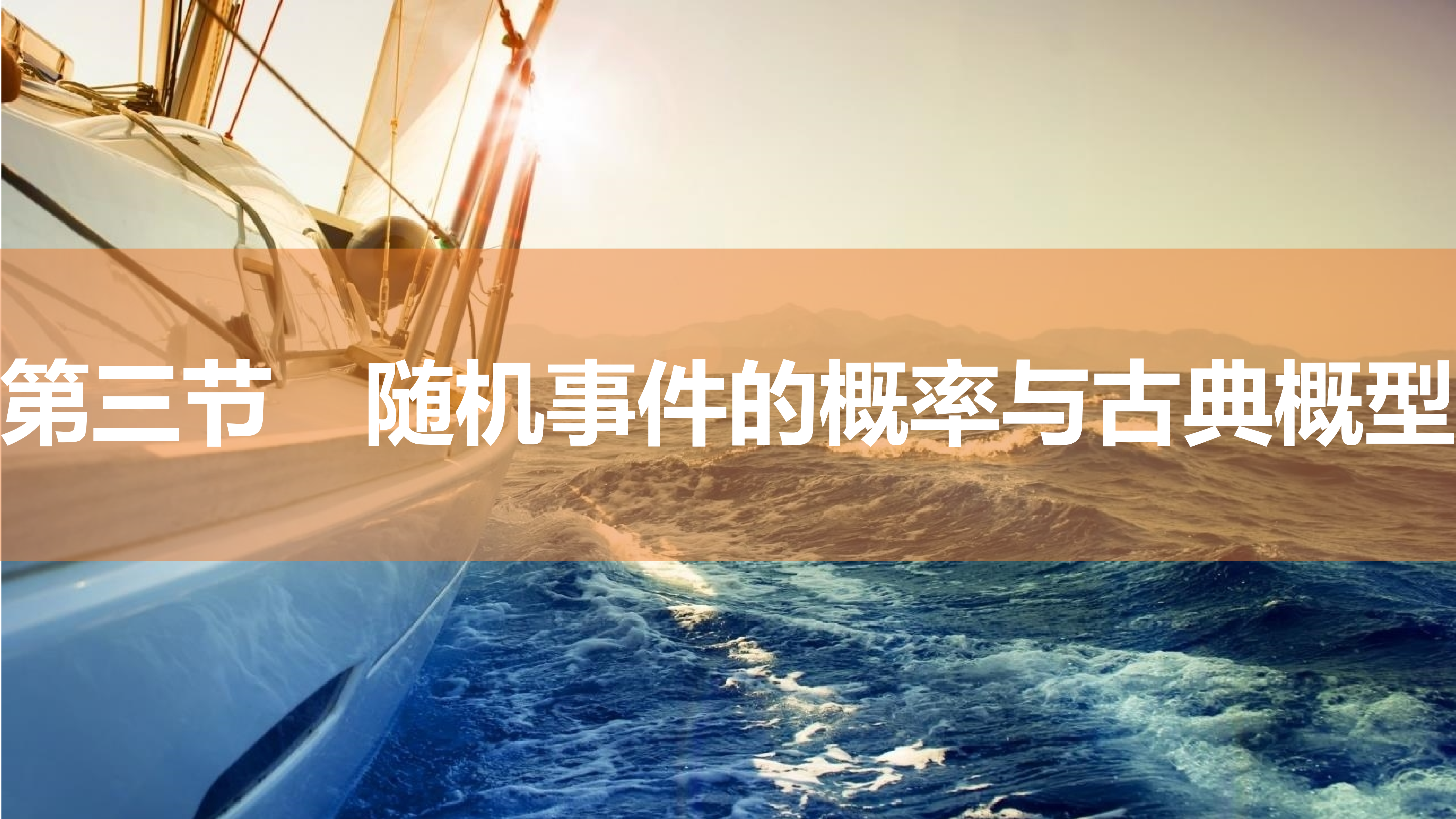
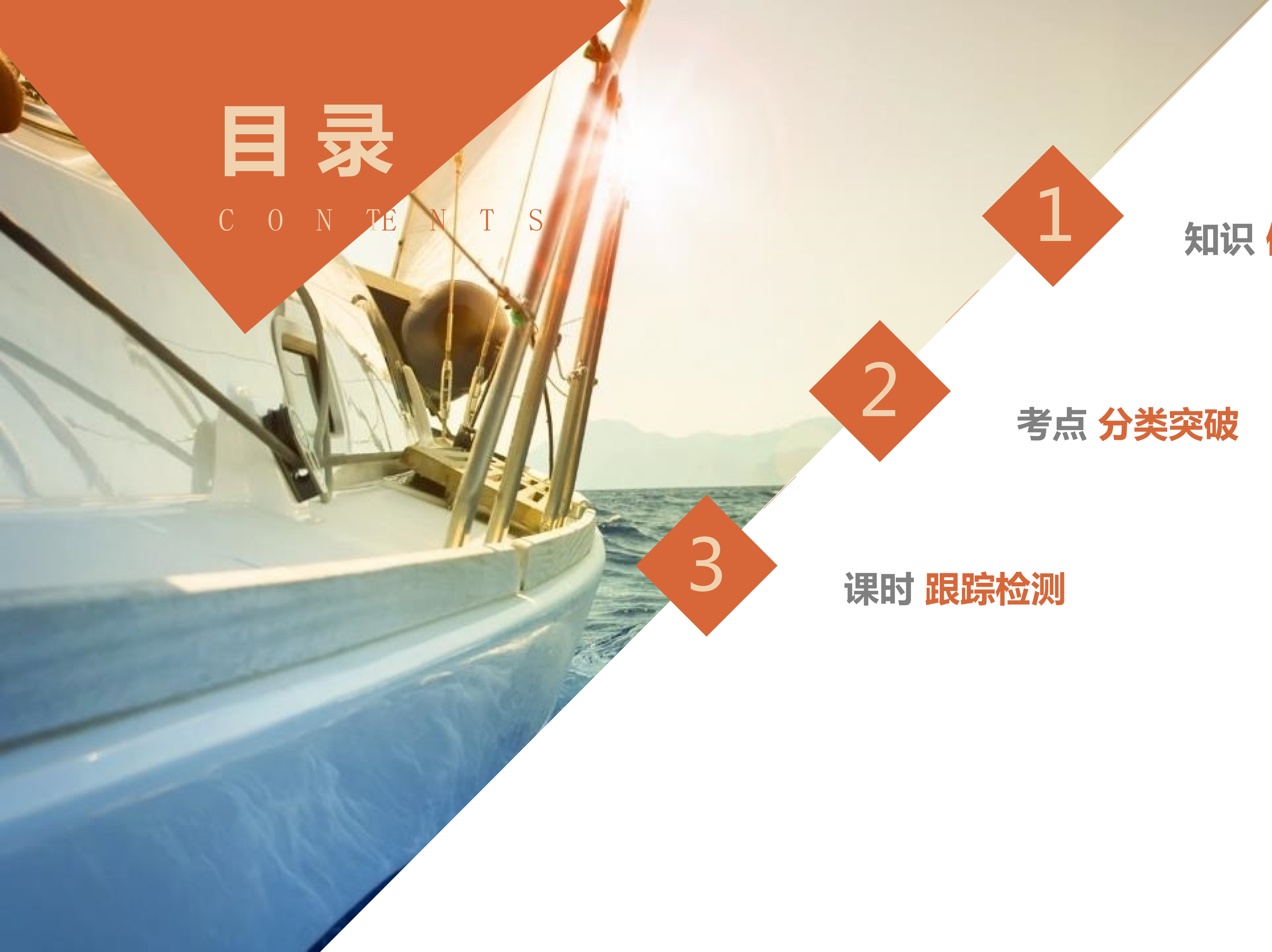
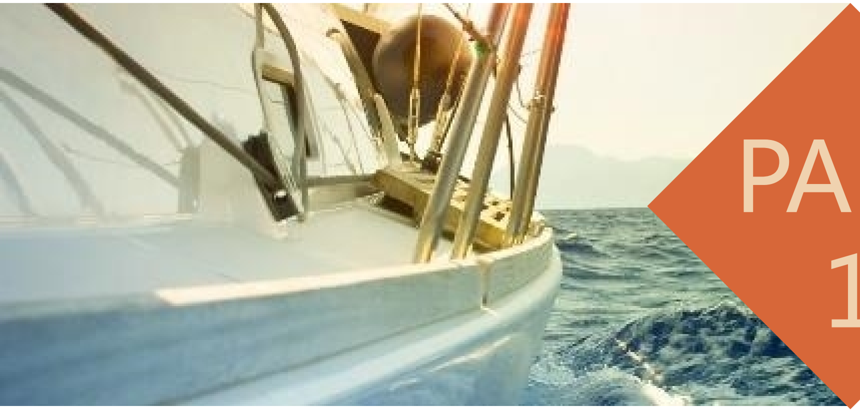


第三节　随机事件的概率与古典概型



目录

CONTENTS



PART 1

知识 体系构建

课前自修

随机事件的概率与古典概型

- 事件
  - 确定事件
    - 必然事件：在条件S下一定发生
    - 不可能事件：在条件S下一定不发生
  - 随机事件：在条件S下可能发生也可能不发生
- 概率的性质
  - 性质1：对任意的事件A,都有$P(A)\geqslant 0$
  - 性质2：必然事件的概率为1,不可能事件的概率为0
- 事件的关系和运算及对应的概率

事件的关系	含义	符号表示	概率
包含	A发生导致B发生	$A\subseteq B$	$P(A)\leqslant P(B)$
相等	$B\supseteq A$且$A\supseteq B$	$A=B$	$P(A)=P(B)$
并事件（和事件）	A与B________________	$A\cup B$或$A+B$	$P(A+B)=$________
交事件（积事件）	A与B________	$A\cap B$或AB	$P(AB)=$________
互斥事件	A与B________	________	$P(A+B)=$________
互为对立事件	________________	$A\cap B=\varnothing$, $A\cup B=\Omega$	$P(A)+P(B)=1$, $P(B)=1-P(A)$

随机事件的概率与古典概型

- **概率和频率**
  - (1)在相同的条件S下重复n次试验，观察某一事件A是否出现，称n次试验中事件A出现的次数n_A为事件A出现的频数，称事件A出现的比例$f_n(A)=\frac{n_A}{n}$为事件A出现的频率；
  - (2)对于给定的随机事件A，由于事件A发生的频率$f_n(A)$随着试验次数的增加稳定于概率$P(A)$，因此可以用频率$f_n(A)$来估计概率$P(A)$
- **古典概型**
  - 特征
    - 有限性：样本空间的样本点只有有限个
    - 等可能性：每个样本点发生的可能性相等
  - 公式
    - $P(A)=\dfrac{\text{事件}A\text{包含的样本点的个数}}{\text{有限样本空间中样本点的总数}}$

对点自测

1. 某人打靶时连续射击两次，下列事件中与事件“至少一次中靶”互为对立事件的是(　　)

A. 至多一次中靶　　B. 两次都中靶

C. 只有一次中靶　　D. 两次都没有中靶

解析：　连续射击两次中靶的情况如下：①两次都中靶；②只有一次中靶；③两次都没有中靶，故选D.

2. （教材题改编）把一枚质地均匀的硬币连续抛掷1 000次，其中有496次正面朝上，504次反面朝上，则掷一次硬币正面朝上的概率为（　　）

A. 0.496　　　　B. 0.504

C. 0.5　　　　D. 1

解析：　掷一次硬币正面朝上的概率是0.5.

3. 从集合$\{1，2，4\}$中随机抽取一个数a，从集合$\{2，4，5\}$中随机抽取一个数b，则向量$\boldsymbol{m}=(a，b)$与向量$\boldsymbol{n}=(2，-1)$垂直的概率为(　　)

A. $\frac{1}{9}$　　B. $\frac{2}{9}$

C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{2}{3}$

解析： 从集合{1，2，4}中随机抽取一个数a，从集合{2，4，5}中随机抽取一个数b，可以组成向量$\boldsymbol{m}=(a，b)$的个数是3×3＝9，其中与向量$\boldsymbol{n}=(2，-1)$垂直的向量是$\boldsymbol{m}=(1，2)$和$\boldsymbol{m}=(2，4)$，共2个，故所求的概率为$P=\frac{2}{9}$.

4.（2024·武汉模拟）抛掷一枚骰子，记A为事件“出现点数是奇数”，B为事件“出现点数是3的倍数”，则$P(A\cup B)=$ $\underline{\frac{2}{3}}$ ，$P(A\cap B)=$ $\underline{\frac{1}{6}}$.

解析：抛掷一枚骰子，样本空间出现的点数是$\{1，2，3，4，5，6\}$，事件$A\cup B$包括出现的点数是$\{1，3，5，6\}$这4个样本点，故$P(A\cup B)=\frac{2}{3}$；事件$A\cap B$包括出现的点数是$\{3\}$这1个样本点，故$P(A\cap B)=\frac{1}{6}$.

常用结论

若事件A_1，A_2，…，A_n两两互斥，则$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$.

应用

某工厂有四条流水线生产同一种产品，这四条流水线的产量分别占总产量的0.20，0.25，0.3，0.25，这四条流水线的合格率依次为0.95，0.96，0.97，0.98，现在从出厂产品中任取一件，则恰好抽到不合格产品的概率是__0.034__.

解析：由结论可知：$P=0.2\times(1-0.95)+0.25\times(1-0.96)+0.3\times(1-0.97)+0.25\times(1-0.98)=0.034$.

考点 分类突破

精选考点 典例研析 技法重悟通

PART
2

考点一 随机事件关系的判断

（基础自学过关）

1.（多选）下列各组事件中是互斥事件的是（　　）

A. 一个射手进行一次射击，命中环数大于8与命中环数小于6

B. 统计一个班的数学成绩，平均分不低于90分与平均分不高于90分

C. 播种100粒菜籽，发芽90粒与发芽80粒

D. 检验某种产品，合格率高于70%与合格率低于70%

解析： 对于A，一个射手进行一次射击，命中环数大于8与命中环数小于6不可能同时发生，故A中两事件为互斥事件.对于B，设事件A_1为平均分不低于90分，事件A_2为平均分不高于90分，则$A_1 \cap A_2$为平均分等于90分，A_1，A_2可能同时发生，故它们不是互斥事件.对于C，播种100粒菜籽，发芽90粒与发芽80粒不可能同时发生，故C中两事件为互斥事件.对于D，检验某种产品，合格率高于70%与合格率低于70%不可能同时发生，故D中两事件为互斥事件.故选A、C、D.

2. 口袋中装有3个红球和4个黑球，每个球编有不同的号码，现从中取出3个球，则互斥而不对立的事件是（　　）

A. 至少有1个红球与至少有1个黑球

B. 至少有1个红球与都是黑球

C. 至少有1个红球与至多有1个黑球

D. 恰有1个红球与恰有2个红球

解析： 对于A，不互斥，如取出2个红球和1个黑球，与至少有1个黑球不是互斥事件，所以A不符合题意；对于B，至少有1个红球与都是黑球不能同时发生，且必有其中1个发生.所以为互斥事件，且为对立事件，所以B不符合题意；对于C，不互斥.如取出2个红球和1个黑球，与至多有1个黑球不是互斥事件，所以C不符合题意；对于D，恰有1个红球与恰有2个红球不能同时发生，所以为互斥事件，但不对立，如恰有3个红球.

3. 抛掷一颗质地均匀的骰子，有如下随机事件：C_i = “点数为i”，其中$i=1$，2，3，4，5，6；D_1 = “点数不大于2”；D_2 = “点数大于2”；D_3 = “点数大于4”，则下列结论正确的个数为<u>　5　</u>.

（1）C_1与C_2互斥；（2）C_2，C_3为对立事件；（3）$C_3\subseteq D_2$；（4）$D_3\subseteq D_2$；（5）$D_1\cup D_2=\Omega$，$D_1\cap D_2=\varnothing$；（6）$D_3=C_5\cup C_6$.

解析：该试验的样本空间$\Omega=\{1，2，3，4，5，6\}$，由题意知$C_i=\{i\}$，$D_1=\{1，2\}$，$D_2=\{3，4，5，6\}$，$D_3=\{5，6\}$.（1）$C_1=\{1\}$，$C_2=\{2\}$，满足$C_1\cap C_2=\varnothing$，所以C_1与C_2互斥，故正确.（2）$C_2=\{2\}$，$C_3=\{3\}$，满足$C_2\cap C_3=\varnothing$但不满足$C_2\cup C_3=\Omega$，所以为互斥事件，但不是对立事件，故错误.根据对应的集合易得，（3）（4）（5）正确.（6）$C_5\cup C_6=\{5，6\}$，所以$D_3=C_5\cup C_6$，故正确.故正确的个数为5.

练后悟通

事件关系判断的策略

（1）判断事件的包含、交、并关系时，一是要紧扣运算的定义，二是要全面考虑同一条件下的试验可能出现的全部结果，必要时可列出全部的试验结果进行分析.也可类比集合的关系运用Venn图分析事件；

（2）判断事件的互斥、对立关系时一般用定义判断，不可能同时发生的两个事件为互斥事件；两个事件，若有且仅有一个发生，则这两个事件为对立事件，对立事件一定是互斥事件.反之互斥事件是不可能同时发生的事件，但也可以同时不发生；对立事件是特殊的互斥事件，特殊在对立的两个事件不可能都不发生，即有且仅有一个发生.

考点二　用频率估计概率

（师生共研过关）

【例1】　某超市计划按月订购一种酸奶，每天进货量相同，进货成本每瓶4元，售价每瓶6元，未售出的酸奶降价处理，以每瓶2元的价格当天全部处理完.根据往年销售经验，每天需求量与当天最高气温（单位：℃）有关.如果最高气温不低于25，需求量为500瓶；如果最高气温位于区间[20，25），需求量为300瓶；如果最高气温低于20，需求量为200瓶.为了确定六月份的订购计划，统计了前三年六月份各天的最高气温数据，得到下面的频数分布表：

最高气温	[10，15)	[15，20)	[20，25)	[25，30)	[30，35)	[35，40]
天数	2	16	36	25	7	4

以最高气温位于各区间的频率估计最高气温位于该区间的概率.

（1）估计六月份这种酸奶一天的需求量不超过300瓶的概率；

解：这种酸奶一天的需求量不超过300瓶，当且仅当最高气温低于25，由表中数据可知，最高气温低于25的频率为

$\frac{2+16+36}{90}=0.6$，

所以这种酸奶一天的需求量不超过300瓶的概率的估计值为0.6.

（2）设六月份一天销售这种酸奶的利润为 Y（单位：元），当六月份这种酸奶一天的进货量为450瓶时，写出 Y的所有可能值，并估计 Y大于零的概率.

解：当这种酸奶一天的进货量为450瓶时，

若最高气温低于20，则 $Y=200\times6+(450-200)\times2-450\times4=-100$；

若最高气温位于区间[20，25），则 $Y=300\times6+(450-300)\times2-450\times4=300$；

若最高气温不低于25，则 $Y=450\times(6-4)=900$，

所以利润 Y 的所有可能值为 -100，300，900.

Y 大于零当且仅当最高气温不低于20，由表格数据知，最高气温不低于20的频率为 $\frac{36+25+7+4}{90}=0.8$.

因此 Y 大于零的概率的估计值为0.8.

解题技法

1. 频率反映了一个随机事件出现的频繁程度，频率是随机的，而概率是一个确定的值，通常用概率来反映随机事件发生的可能性的大小，有时也用频率来作为随机事件概率的估计值.

2. 利用概率的统计定义求事件的概率，即通过大量的重复试验，事件发生的频率会逐步趋近于某一个常数，这个常数就是概率.

训练

某险种的基本保费为 a（单位：元），继续购买该险种的投保人称为续保人，续保人本年度的保费与其上年度出险次数的关联如下表：

上年度出险次数	0	1	2	3	4	$\geqslant 5$
保费	$0.85a$	a	$1.25a$	$1.5a$	$1.75a$	$2a$

随机调查了该险种的200名续保人在一年内的出险情况，得到如下统计表：

出险次数	0	1	2	3	4	$\geqslant 5$
频数	60	50	30	30	20	10

（1）记A为事件“一续保人本年度的保费不高于基本保费”，求P（A）的估计值；

解：事件A发生的条件是当且仅当一年内出险次数小于2，由所给数据知，一年内出险次数小于2的频率为$\frac{60+50}{200}=0.55$，用频率估计概率，故P（A）的估计值为0.55.

(2) 记 B 为事件“一续保人本年度的保费高于基本保费但不高于基本保费的160%”，求 $P(B)$ 的估计值；

解：事件 B 发生的条件是当且仅当一年内出险次数大于1且小于4.

由所给数据知，一年内出险次数大于1且小于4的频率为 $\frac{30+30}{200}=0.3$，用频率估计概率，故 $P(B)$ 的估计值为0.3.

（3）求续保人本年度平均保费的估计值.

解：由所给数据得

保费	$0.85a$	a	$1.25a$	$1.5a$	$1.75a$	$2a$
频率	0.30	0.25	0.15	0.15	0.10	0.05

调查的200名续保人的平均保费为$0.85a\times0.30+a\times0.25+1.25a\times0.15+1.5a\times0.15+1.75a\times0.10+2a\times0.05=1.1925a$.

因此，续保人本年度平均保费的估计值为$1.1925a$.

考点三 古典概型

（师生共研过关）

【例2】 （1）（2024·全国甲卷4题）某校文艺部有4名学生，其中高一、高二年级各2名.从这4名学生中随机选2名组织校文艺汇演，则这2名学生来自不同年级的概率为（　　）

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

解析：记高一年级2名学生分别为a_1，a_2，高二年级2名学生分别为b_1，b_2，则从这4名学生中随机选2名组织校文艺汇演的基本事件有（a_1，a_2），（a_1，b_1），（a_1，b_2），（a_2，b_1），（a_2，b_2），（b_1，b_2），共6个，其中这2名学生来自不同年级的基本事件有（a_1，b_1），（a_1，b_2），（a_2，b_1），（a_2，b_2），共4个，所以这2名学生来自不同年级的概率$P=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$，故选D.

（2）（2024·新高考Ⅰ卷5题）从2至8的7个整数中随机取2个不同的数，则这2个数互质的概率为（　　）

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{2}$　　✓D. $\frac{2}{3}$

解析：从7个整数中随机取2个不同的数，共有$C_7^2=21$（种）取法，取得的2个数互质的情况有（2，3），（2，5），（2，7），（3，4），（3，5），（3，7），（3，8），（4，5），（4，7），（5，6），（5，7），（5，8），（6，7），（7，8），共14种，根据古典概型的概率公式，得这2个数互质的概率为$\frac{14}{21}=\frac{2}{3}$.故选D.

解题技法

1. 古典概型的概率求解步骤

（1）求出样本空间Ω包含的所有样本点的个数n；

（2）求出事件A包含的所有样本点的个数k；

（3）代入公式$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{n(A)}{n(\Omega)}$求解.

2. 求样本空间中样本点个数的方法

（1）枚举法：适合于给定的样本点个数较少且易一一列举出的问题；

（2）树状图法：适用于需要分步完成的试验结果.树状图在解决求样本点总数和事件A包含的样本点个数的问题时直观、方便，但画树状图时要注意按照一定的顺序确定分枝，避免造成遗漏或重复；

（3）排列、组合法：在求一些较复杂的样本点个数时，可利用排列、组合的知识.

训练

1. （2024·全国乙卷9题）某学校举办作文比赛，共6个主题，每位参赛同学从中随机抽取一个主题准备作文，则甲、乙两位参赛同学抽到不同主题的概率为（　　）

A. $\frac{5}{6}$　　B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{3}$

解析： 因为共有6个主题，甲、乙两位同学各抽取1个主题，结果有36种，其中抽到的主题相同的结果有6种，所以甲、乙两位同学抽到不同主题的概率为$1-\frac{6}{36}=\frac{5}{6}$.故选A.