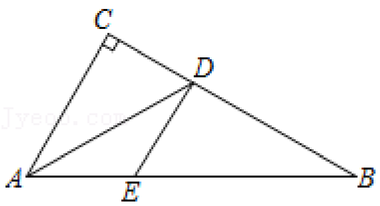
勾股定理与全等三角形综合大题-专题训练（30道）

1．（门头沟区期末）已知，如图，在△ABC中，∠C＝90°，AD平分∠BAC交BC于D，过D作DE∥AC交AB于E.

（1）求证：AE＝DE;

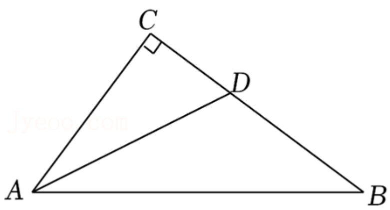
（2）如果AC＝3，$AD=2\sqrt{3}$，求AE的长.



2．（石景山区期末）如图，在Rt△ACB中，∠ACB＝90°，AB＝10，AC＝6．AD平分∠CAB交BC于点D.

（1）求BC的长；

（2）求CD的长.



3．（长春期末）如图，在△ABC中，∠ACB＝90°，AB＝10，BC＝6，点P从点A出发，以每秒2个单位长度的速度沿折线$A-B-C$运动．设点P的运动时间为t秒（t＞0）.

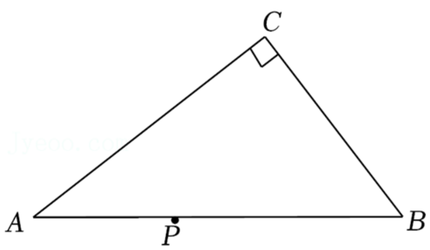
（1）求AC的长.

（2）求斜边AB上的高.

（3）①当点P在BC上时，PC的长为 _______．（用含t的代数式表示）

②若点P在∠BAC的角平分线上，则t的值为 _______.

（4）在整个运动过程中，直接写出△PBC是等腰三角形时t的值.



4．（沙坪坝区校级期末）如图，在△ABC中，AB＝AC，AD⊥BC于点D，∠CBE＝45°，BE分别交AC，AD于点E、F.

（1）如图1，若AB＝13，BC＝10，求AF的长度；

（2）如图 2，若 $AF=BC$，求证：$BF^2+EF^2=AE^2$．

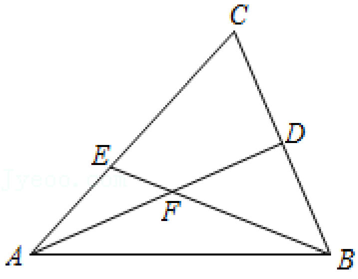


图1

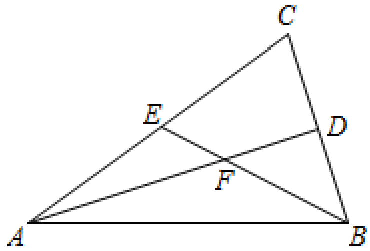


图2

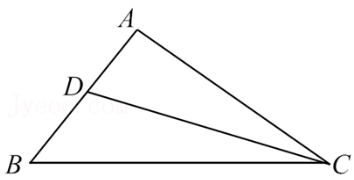
5．（象山县期中）定义：如果一个三角形中有两个内角 α，β 满足 $\alpha+2\beta=90^\circ$，那我们称这个三角形为“近直角三角形”．

（1）若△ABC 是近直角三角形，$\angle B>90^\circ$，$\angle C=50^\circ$，则 $\angle A=$_______．

（2）在 Rt△ABC 中，$\angle BAC=90^\circ$，$AB=3$，$AC=4$，若 CD 是 $\angle ACB$ 的平分线．

①求证：△BDC 为近直角三角形．

②求 BD 的长．



6．（虎林市校级期末）已知 Rt△ABC 中，$AC=BC$，$\angle ACB=90^\circ$，F 为 AB 边的中点，且 $DF=EF$，$\angle DFE=90^\circ$，D 是 BC 上一个动点．如图 1，当 D 与 C 重合时，易证：$CD^2+DB^2=2DF^2$；

（1）当 D 不与 C、B 重合时，如图 2，CD、DB、DF 有怎样的数量关系，请直接写出你的猜想，不需证明．

（2）当 D 在 BC 的延长线上时，如图 3，CD、DB、DF 有怎样的数量关系，请写出你的猜想，并加以证明．

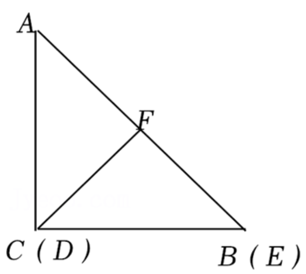


图1

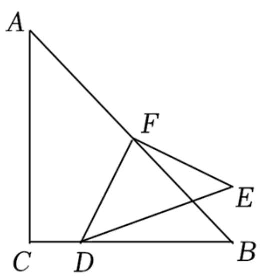


图2

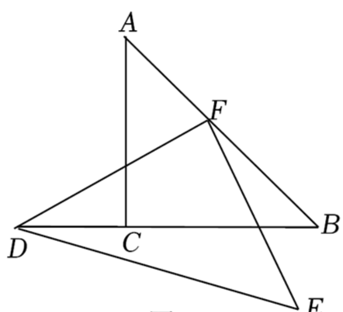
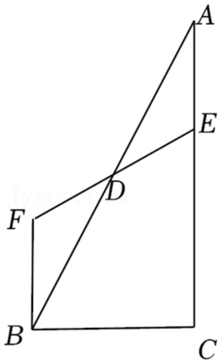


图3

7．（徐汇区期末）如图，在△ABC 中，$\angle ACB=90^\circ$，$AC=4$，$CB=2$，点 D 是 AB 的中点，点 E 在 AC 上，点 E、D、F 一条直线上，且 $ED=FD$．

（1）求证：$FB\perp CB$；

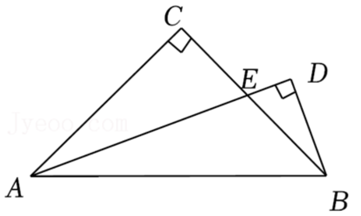
（2）联结 CD，若 $CD\perp EF$，求 CE 的长．



8．（通州区期末）如图，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$AC=BC$，在 Rt△ABD 中，$\angle D=90^\circ$，AD 与 BC 交于点 E，且 $\angle DBE=\angle DAB$．

求证：（1）$\angle CAE=\angle DBC$；

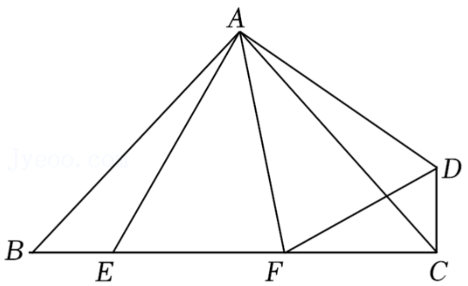
（2）$AC^2+CE^2=4BD^2$．



9．（宛城区期末）如图，E、F 是等腰 Rt△ABC 的斜边 BC 上的两动点，$\angle EAF=45^\circ$，$CD\perp BC$ 且 $CD=BE$．

求证：（1）$AE=AD$；

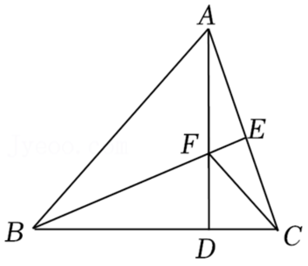
（2）$EF^2=BE^2+CF^2$．



10．（农安县期末）如图，△ABC 中，$AB=BC$，$BE\perp AC$ 于点 E，$AD\perp BC$ 于点 D，$\angle BAD=45^\circ$，AD 与 BE 交于点 F，连接 CF．

（1）求证：$BF=AC$；

（2）若 $CD=3$，求 AD 的长．



11．（简阳市 期末）已知，△*ABC* 和△*DCE* 都是等边三角形，点 *B*，*C*，*E* 三点不在一条直线上（如图1）．

（1）求证：*BD*＝*AE*；

（2）若∠*ADC*＝30°，*AD*＝4，*CD*＝5，求 *BD* 的长；

（3）若点 *B*，*C*，*E* 三点在一条直线上（如图 2），且△*ABC* 和△*DCE* 的边长分别为 3 和 5，求 *AD* 的长．

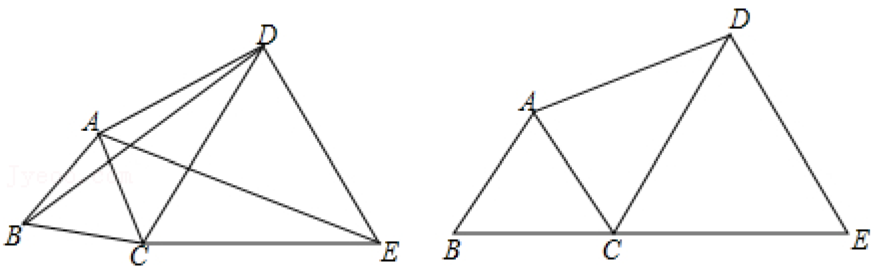
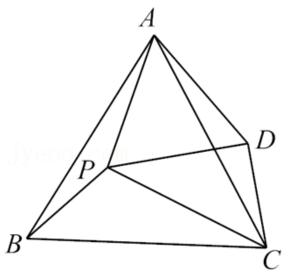


图1　　　　图2

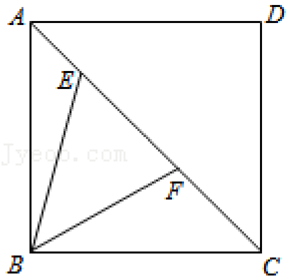
12．（瓯海区月考）如图，已知点 *P* 是等边△*ABC* 内一点，连结 *PA*，*PB*，*PC*，*D* 为△*ABC* 外一点，且∠*DAC*＝∠*PAB*，*AD*＝*AP*，连结 *DP*，*DC*．

（1）求证：△*ADC*≌△*APB*．

（2）若 *PA*＝4，*PB*＝3，*PC*＝5，求∠*APB* 的度数．



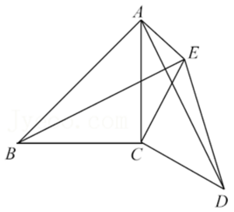
13．（龙岩校级期中）如图，点 *E*，*F* 分别是正方形 *ABCD* 的对角线 *AC* 上的两个动点，∠*EBF*＝45°．求证：$EF^2＝AE^2+CF^2$．



14．（芝罘区期中）如图，已知△ABC 与△DEC 都是等腰三角形，∠ACB＝∠DCE＝90°．

（1）试说明：△ACD≌△BCE；

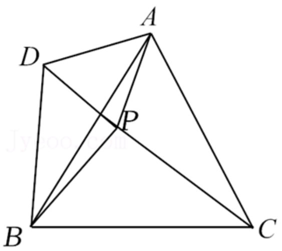
（2）若 AC＝6，AE＝3，∠CAE＝45°，求 AD 的长．



15．（吉安期中）如图，P 为等边△ABC 内一点，分别连接 PA，PB，PC，PA＝6，PB＝8，PC＝10，以 PA 为边作等边△APD，连接 BD．

（1）求证：BD＝PC．

（2）求∠APB 的度数．

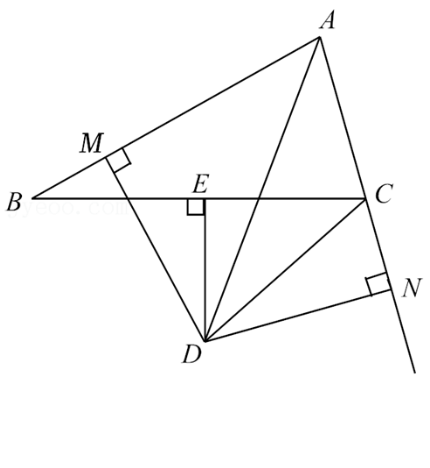


16．（海曙区校级期中）已知在△ABC 中，∠CAB 的平分线 AD 与 BC 的垂直平分线 DE 交于点 D，DM⊥AB 于 M，DN⊥AC 的延长线于 N．

（1）证明：BM＝CN．

（2）当∠BAC＝70°时，求∠DCB 的度数；

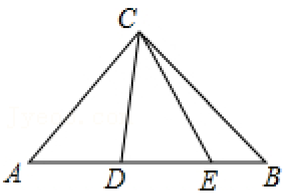
（3）若 AB＝8，AC＝4，DE＝3，则 $4DN^2-BC^2$ 的值为 ______．



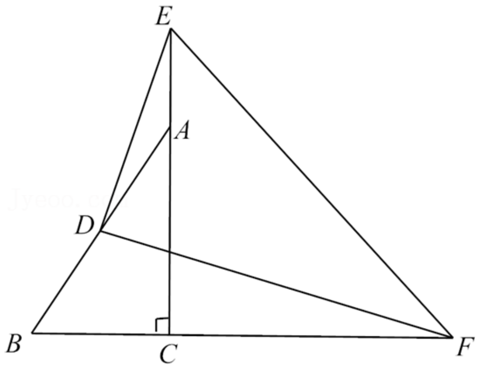
17．（晋安区校级月考）如图，等腰直角△ABC 中，$AC=BC$，点 D，E 在 AB 上，$\angle DCE=45°$．

（1）将△ACD 绕点 C 逆时针旋转 90°，点 D 对应点为点 F，画出旋转后的图形，并证明：$DE=EF$；

（2）求证：$AD^2+BE^2=DE^2$．



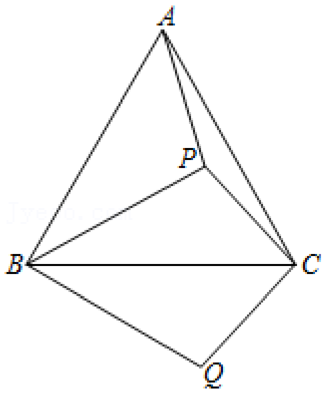
18．（黑山县期中）在△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$AC>BC$，D 是 AB 的中点．E 在线段 CA 的延长线上，连接 DE，过点 D 作 $DF\perp DE$，交直线 BC 的延长线于点 F，连接 EF．求证：$AE^2+BF^2=EF^2$．



19．（诸暨市期中）如图，P 是等边三角形 ABC 内的一点，连结 PA，PB，PC，以 BP 为边作 $\angle PBQ=60°$，且 $BP=BQ$，连结 CQ．

（1）观察并猜想 AP 与 CQ 之间的大小关系，并说明理由．

（2）若 $PA=PC=1$，$PB=\sqrt{2}$，求证：$PC\perp CQ$．

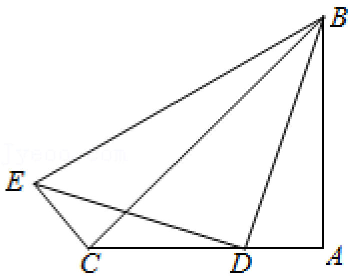


20．（沈河区期末）如图，在 Rt△ABC 中，$\angle A=90°$，$AB=AC$，$BC=10$，点 D 是直线 AC 上一动点，$\angle BDE=90°$，$DB=DE$（DE 在 BD 的左侧）．

（1）直接写出 AB 长为_______；

（2）若点 D 在线段 AC 上，$AD=\sqrt{2}$，求 EC 长；

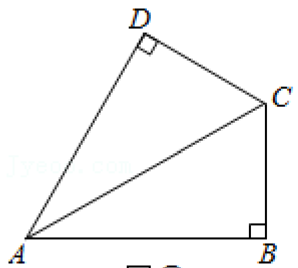
（3）当 $BE=2\sqrt{29}$时，直接写出 CD 长为_______．



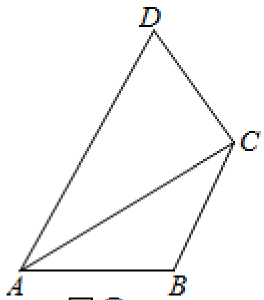
21．（贵阳期末）已知四边形 $ABCD$ 中，AC 平分∠DAB，∠DAB＝60°．

（1）如图①，若∠B＝∠D＝90°，求证：$AB+AD=\sqrt{3}AC$；

（2）如图②，若 CB＝CD，$AB+AD=\sqrt{3}AC$ 是否还成立？请说明理由．



图①



图②

22．（沙坪坝区期末）如图，已知 Rt△ABC 中，∠C＝90°，点 D 是 AC 上一点，点 E、点 F 是 BC 上的点，且∠CDF＝∠CEA，CF＝CA．

（1）如图 1，若 AE 平分∠BAC，∠DFC＝25°，求∠B 的度数；

（2）如图 2，若过点 F 作 $FG\perp AB$ 于点 G，连接 GC，求证：$AG+GF=\sqrt{2}GC$．

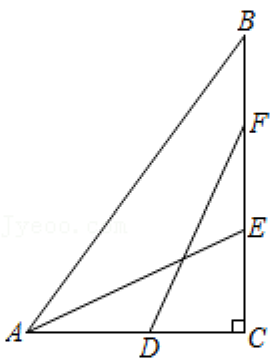


图1

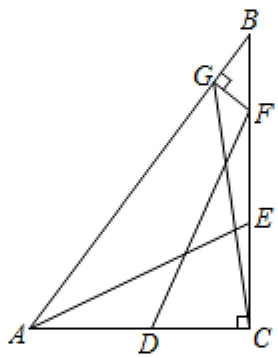
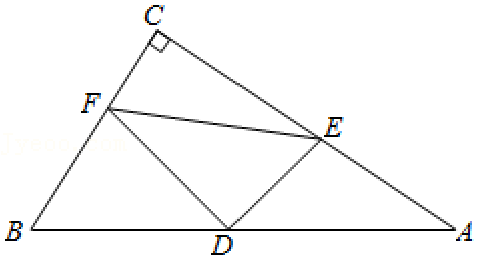


图2

23．（海珠区校级月考）如图，在△ABC 中，∠C＝90°，D 为 AB 的中点，E、F 分别在 AC、BC 上，且 $ED\perp FD$ 于点 D．

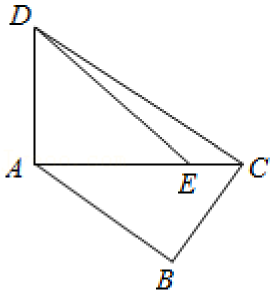
求证：AE^2+BF^2＝EF^2．



24．（平阳县一模）如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle B=90°$，$DA\perp AC$，点 E 在线段 AC 上，$AB\parallel DE$，$AC=DE$．

（1）求证：$\triangle ABC\cong\triangle EAD$．

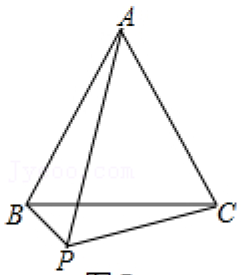
（2）连接 CD，当 $AC=4$，$AB=3$，求 CD 的长．



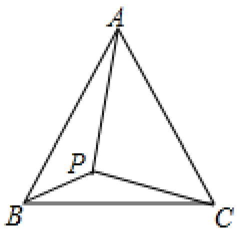
25．（夏河县期中）已知$\triangle ABC$ 为等边三角形．

（1）如图，P 为$\triangle ABC$ 外一点，$\angle BPC=120°$，连接 PA，PB，PC，求证：$PB+PC=PA$；

（2）如图，P 为$\triangle ABC$ 内一点，若 $PA=12$，$PB=5$，$PC=13$，求$\angle APB$ 的度数．



图①



图②

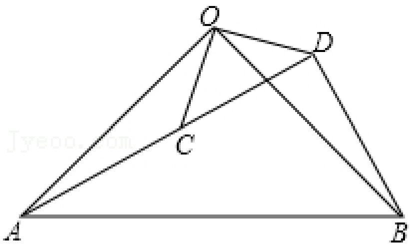
26．（永嘉县校级期末）如图，在$\triangle AOB$ 与$\triangle COD$ 中，$\angle AOB=\angle COD=90°$，$AO=BO$，$CO=DO$，连接 CA，BD．

（1）求证：$\triangle AOC\cong\triangle BOD$；

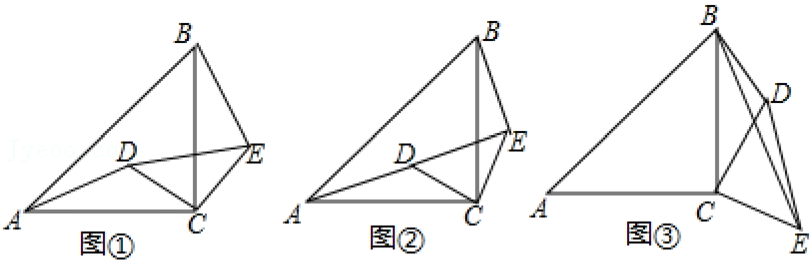
（2）连接 BC，若 $OC=1$，$AC=\sqrt{7}$，$BC=3$

①判断$\triangle CDB$ 的形状．

②求$\angle ACO$ 的度数．



27．（迎泽区校级月考）如图①，已知△ACB和△DCE中，∠ACB＝∠DCE＝90°，AC＝BC，DC＝EC，按照图①的位置摆放，直角顶点C重合．



（1）写出AD与BE的关系；

（2）如图②，点A、D、E在同一直线上时，若$CD=\sqrt{2}$，BE＝3，求AB长为 ________；

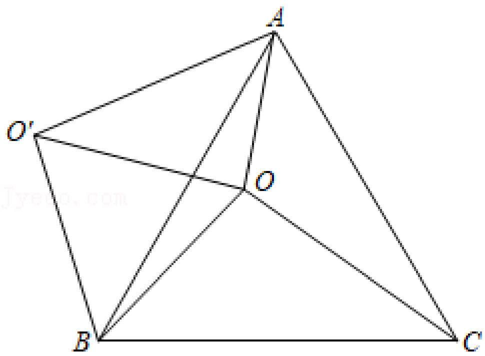
（3）如图③，若∠CBD＝45°，AC＝6，BD＝3，求BE的长．

28．（东营期末）如图，O是正△ABC内一点，OA＝3，OB＝4，OC＝5，将线段BO以点B为旋转中心逆时针旋转60°得到线段BO'，连接AO'、OO'，

（1）OO'＝________．

（2）求∠AOB的度数及四边形$AOBO'$的面积．

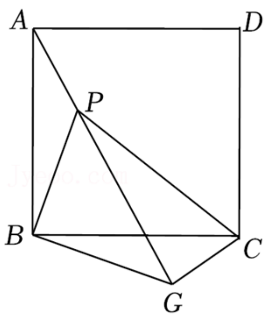
（3）直接写出$S_{\triangle AOC}+S_{\triangle AOB}$的值，$S_{\triangle AOC}+S_{\triangle AOB}$＝________．



29．（岚皋县期末）如图，P是正方形$ABCD$内一点，PA＝2，PB＝4，以点B为旋转中心，将线段BP按顺时针方向旋转90°至BG，点P的对应点G恰好在AP的延长线上．

（1）求证：GC＝AP；

（2）求PC的长度．



30．（江油市期末）阅读下面材料：

小伟遇到这样一个问题：如图 1，在正三角形 ABC 内有一点 P，且 $PA=3$，$PB=4$，$PC=5$，求 $\angle APB$ 的度数．

小伟是这样思考的：如图 2，利用旋转和全等的知识构造 $\triangle AP'C$，连接 PP'，得到两个特殊的三角形，从而将问题解决．参考小伟同学思考问题的方法，解决下列问题．

（1）请你计算图 1 中 $\angle APB$ 的度数．

（2）如图 3，在正方形 $ABCD$ 内有一点 P，且 $PA=2$，$PB=1$，$PD=3$，求 $\angle APB$ 的度数．

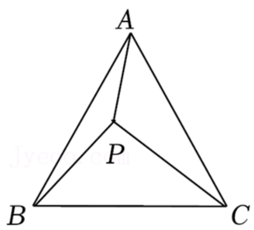


图1

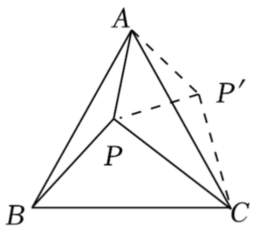


图2

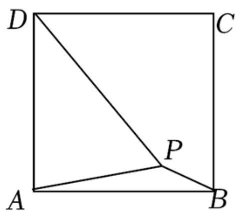


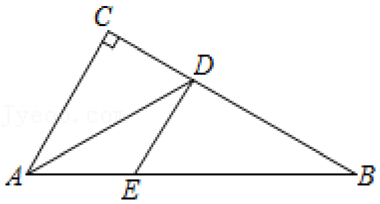
图3

勾股定理与全等三角形综合大题-专题训练（30道）解析版

1．（门头沟区期末）已知，如图，在△ABC中，∠C＝90°，AD平分∠BAC交BC于D，过D作DE∥AC交AB于E．

（1）求证：AE＝DE；

（2）如果AC＝3，$AD=2\sqrt{3}$，求AE的长．



【分析】（1）根据平行线的性质和角平分线的定义解答即可；

（2）过点D作DF⊥AB于F，根据勾股定理和全等三角形的判定和性质解答即可．

【解答】（1）证明：∵DE∥AC，

∴∠CAD＝∠ADE，

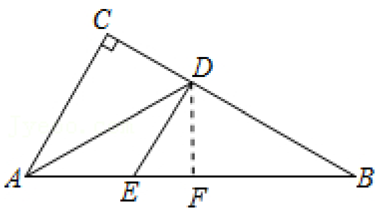
∵AD平分∠BAC，

∴∠CAD＝∠EAD．

∴∠EAD＝∠ADE．

∴AE＝DE；

（2）解：过点D作DF⊥AB于F．



∵∠C＝90°，AC＝3，$AD=2\sqrt{3}$，

在Rt△ACD中，由勾股定理得 $AC^2+DC^2=AD^2$．

∴$DC=\sqrt{3}$．

∵AD平分∠BAC，

∴DF＝$DC=\sqrt{3}$．

又∵AD＝AD，∠C＝∠AFD＝90°，

∴Rt△DAC≌Rt△DAF（HL）．

∴AF＝AC＝3，

∴Rt△DEF中，由勾股定理得 $EF^2+DF^2=DE^2$．

设 $AE=x$，则 $DE=x$，$EF=3-x$，

∴$(3-x)^2+(\sqrt{3})^2=x^2$，

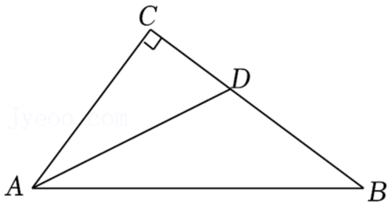
∴$x=2$.

∴$AE=2$.

2．（石景山区期末）如图，在 Rt△ACB 中，∠ACB＝90°，AB＝10，AC＝6．AD 平分∠CAB 交 BC 于点 D.

（1）求 BC 的长；

（2）求 CD 的长.



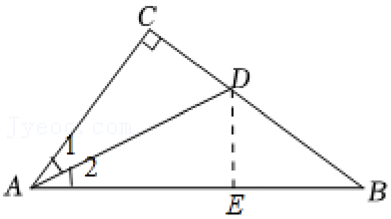
【分析】（1）根据勾股定理解答即可；

（2）根据 AAS 证明△AED 和△ACD 全等，进而利用全等三角形的性质和勾股定理解答即可.

【解答】解：（1）在 Rt△ACB 中，∠ACB＝90°，

由勾股定理得：$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$.

（2）过点 D 作 DE⊥AB 于点 E，如图.



∴∠DEA＝90°＝∠C（垂直定义）.

∵AD 平分∠CAB（已知），

∴∠1＝∠2（角平分线定义）.

在△AED 和△ACD 中，

$\begin{cases}\angle DEA=\angle C\\ \angle 2=\angle 1\\ AD=AD\end{cases}$，

∴△AED≌△ACD（AAS）.

∴$AE=AC=6$，$DE=DC$（全等三角形的对应边相等）.

∴$BE=AB-AE=4$.

设 $CD=x$，则 $DE=x$，$DB=8-x$.

在 Rt△DEB 中，∠DEB＝90°，

由勾股定理，得（8﹣x）^{2}＝x^2+4^2.

解得 x＝3.

即 CD＝3.

3．（长春期末）如图，在△ABC 中，∠ACB＝90°，AB＝10，BC＝6，点 P 从点 A 出发，以每秒 2 个单位长度的速度沿折线 A﹣B﹣C 运动．设点 P 的运动时间为 t 秒（t＞0）．

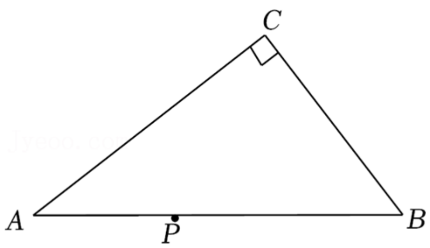
（1）求 AC 的长．

（2）求斜边 AB 上的高．

（3）①当点 P 在 BC 上时，PC 的长为 ___16﹣2t___．（用含 t 的代数式表示）

②若点 P 在∠BAC 的角平分线上，则 t 的值为 ___$\frac{20}{3}$___．

（4）在整个运动过程中，直接写出△PBC 是等腰三角形时 t 的值．



【分析】（1）根据勾股定理直接求出 AC 的值；

（2）由勾股定理可求得 AC 的值，再设斜边 AB 上的高为 h，由面积法可求得答案；

（3）分两种情况计算即可：①当点 P 在 CB 上时，②当点 P'在∠BAC 的角平分线上时；

（4）由图可知，当△BCP 是等腰三角形时，点 P 必在线段 AC 或线段 AB 上，当点 P 在线段 AC 上时，分三种情况：BC＝BP；PC＝BC；PC＝PB，分别求得点 P 运动的路程，再除以速度即可得出答案．

【解答】解：（1）∵在△ABC 中，∠ACB＝90°，AB＝10，BC＝6，

∴$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$；

（2）设边 AB 上的高为 h

则$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}AB\cdot h$，

∴$\frac{1}{2}\times 6\times 8=\frac{1}{2}\times 10\cdot h$，

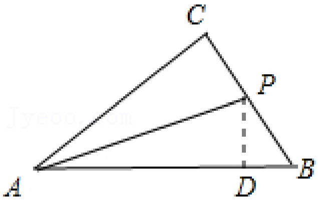
∴$h=\frac{24}{5}$，

答：斜边 AB 上的高为$\frac{24}{5}$；

（3）①当点 P 在 BC 上时，点 P 运动的长度为 AB+BP＝2t，

则 PC＝BC﹣BP＝6﹣（2t﹣10）＝6﹣2t+10＝16﹣2t；

②当点 P在$\angle BAC$ 的角平分线上时，过点 P 作 $PD\perp AB$，如图：



$\because AP$ 平分$\angle BAC$，$PC\perp AC$，$PD\perp AB$，

$\therefore PD=PC$，

有①知，$PC=16-2t$，$BP=2t-10$，

$\therefore PD=16-2t$，

在 Rt$\triangle ACP$ 和 Rt$\triangle ADP$ 中，

$\begin{cases} AP=AP \\ PD=PC \end{cases}$，

$\therefore$Rt$\triangle ACP\cong$Rt$\triangle ADP$（HL），

$\therefore AD=AC=8$，

又$\because AB=10$，

$\therefore BD=2$，

在 Rt$\triangle BDP$ 中，由勾股定理得：

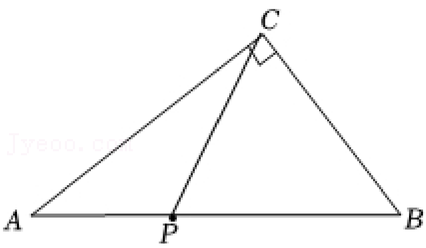
$2^2+(16-2t)^2=(2t-10)^2$，

解得：$t=\dfrac{20}{3}$．

故答案为：①$16-2t$；②$\dfrac{20}{3}$．

（4）由图可知，当$\triangle BCP$ 是等腰三角形时，点 P 必在线段 AB 上，

①当点 P 在线段 AB 上时，若 $BC=BP$，



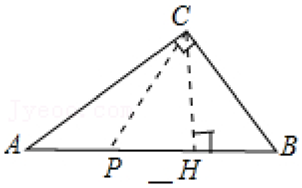
则点 P 运动的长度为 $AP=2t$，

$\because AP=AB-BP=10-6=4$，

$\therefore 2t=4$，

$\therefore t=2$；

②若 $PC=BC$，如图，过点 C 作 $CH\perp AB$ 于点 H，则 $BP=2BH$，



在△ABC中，$\angle ACB=90°$，$AB=10$，$BC=6$，$AC=8$，

∴$AB\cdot CH=AC\cdot BC$，

∴$10CH=8\times6$，

∴$CH=\frac{24}{5}$，

在Rt△BCH中，由勾股定理得：

$BH=\sqrt{BC^2-CH^2}=\sqrt{6^2-(\frac{24}{5})^2}=\frac{18}{5}=3.6$，

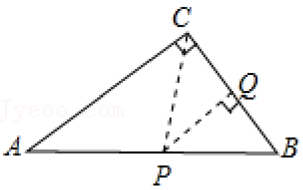
∴$BP=2BH=7.2$，

∴点P运动的长度为：$AP=AB-BP=10-7.2=2.8$，

∴$2t=2.8$，

∴$t=1.4$；

③若$PC=PB$，如图所示，过点P作$PQ\perp BC$于点Q，



则$BQ=CQ=\frac{1}{2}\times BC=3$，$\angle PQB=90°$，

∴$\angle ACB=\angle PQB=90°$，

∴$PQ//AC$，

∴PQ为△ABC的中位线，

∴$PQ=\frac{1}{2}\times AC=\frac{1}{2}\times8=4$，

在Rt△BPQ中，由勾股定理得：$BP=\sqrt{BQ^2+PQ^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

点P运动的长度为$AP=2t$，

$AP=AB-BP=10-5=5$，

∴$2t=5$，

∴$t=2.5$.

综上，t的值为1.4或2或2.5.

4．（沙坪坝区校级期末）如图，在△*ABC* 中，*AB*＝*AC*，*AD*⊥*BC* 于点 *D*，∠*CBE*＝45°，*BE* 分别交 *AC*，*AD* 于点 *E*、*F*．

（1）如图 1，若 *AB*＝13，*BC*＝10，求 *AF* 的长度；

（2）如图 2，若 *AF*＝*BC*，求证：$BF^2+EF^2=AE^2$．

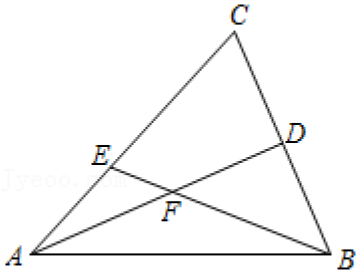


图1

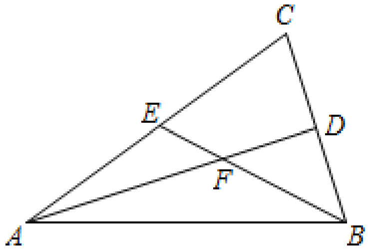


图2

【分析】（1）先根据等腰三角形三线合一的性质得 *BD*＝5，由勾股定理计算可得 *AD* 的长，由等腰直角三角形性质得 *DF*＝5，最后由线段的差可得结论；

（2）如图 2，作辅助线，构建全等三角形，证明△*CHB*≌△*AEF*（*SAS*），得 *AE*＝*CH*，∠*AEF*＝∠*BHC*，由等腰三角形三线合一的性质得 *EF*＝*FH*，最后由勾股定理和等量代换可得结论．

【解答】（1）解：如图 1，∵*AB*＝*AC*，*AD*⊥*BC*，

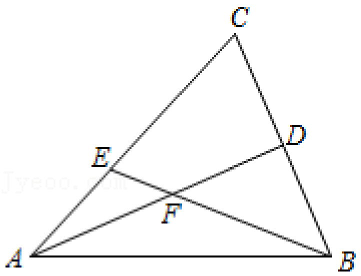


图1

∴*BD*＝*CD*，

∵*BC*＝10，

∴*BD*＝5，

Rt△*ABD* 中，∵*AB*＝13，

∴$AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12$，

Rt△*BDF* 中，∵∠*CBE*＝45°，

∴△*BDF* 是等腰直角三角形，

∴*DF*＝*BD*＝5，

∴*AF*＝*AD* - *DF*＝12 - 5＝7；

（2）证明：如图 2，在 *BF* 上取一点 *H*，使 *BH*＝*EF*，连接 *CF*、*CH*

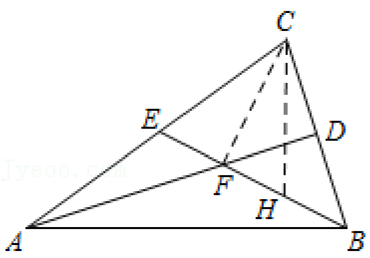


图2

在△*CHB* 和△*AEF* 中，

$$\because \begin{cases} BH = EF \\ \angle CBH = \angle AFE = 45° \\ BC = AF \end{cases},$$

∴△*CHB*≌△*AEF*（*SAS*），

∴*AE*＝*CH*，∠*AEF*＝∠*BHC*，

∴∠*CEF*＝∠*CHE*，

∴*CE*＝*CH*，

∵*BD*＝*CD*，*FD*⊥*BC*，

∴*CF*＝*BF*，

∴∠*CFD*＝∠*BFD*＝45°，

∴∠*CFB*＝90°，

∴*EF*＝*FH*，

Rt△*CFH* 中，由勾股定理得：$CF^2+FH^2=CH^2$，

∴$BF^2+EF^2=AE^2$.

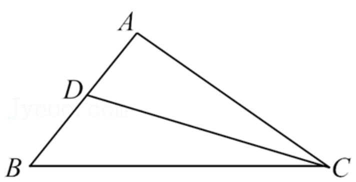
5．（象山县期中）定义：如果一个三角形中有两个内角 α，β 满足 α+2β＝90°，那我们称这个三角形为“近直角三角形”．

（1）若△*ABC* 是近直角三角形，∠*B*＞90°，∠*C*＝50°，则∠*A*＝__20°____．

（2）在 Rt△*ABC* 中，∠*BAC*＝90°，*AB*＝3，*AC*＝4，若 *CD* 是∠*ACB* 的平分线．

①求证：△*BDC* 为近直角三角形．

②求 *BD* 的长．



【分析】（1）∠*B* 不可能是 α 或 β，当∠*A*＝α 时，∠*C*＝β＝50°，α+2β＝90°，不成立；故∠*A*＝β，∠*C*＝α，α+2β＝90°，则 β＝20°；

（2）①如图 1，设∠ACD=∠DCB=β，∠B=α，则 α+2β=90°，故△BDC 是"近直角三角形"；

②过点 D 作 DM⊥BC 于点 M，证明 Rt△ACD≌Rt△MCD（HL），得出 AC=CM=4，由勾股定理可得出答案．

【解答】解：（1）∠B 不可能是 α 或 β，

当∠A=α 时，∠C=β=50°，α+2β=90°，不成立；

故∠A=β，∠C=α，α+2β=90°，则 β=20°，

故答案为：20°；

（2）①如图 1，设∠ACD=∠DCB=β，∠B=α，

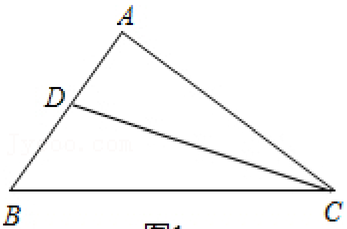


图1

则 α+2β=90°，故△BDC 是"近直角三角形"；

②如图 2，过点 D 作 DM⊥BC 于点 M，

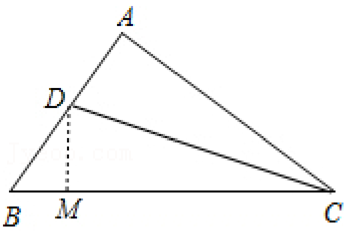


图2

∵CD 平分∠ACB，DM⊥BC，DA⊥CA，

∴AD=DM．

在 Rt△ACD 和 Rt△MCD 中，

$\begin{cases} CD = CD \\ AD = DM \end{cases}$，

∴Rt△ACD≌Rt△MCD（HL）．

∴AC=CM=4．

∵AB=3，AC=4，

∴$BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$．

∴BM=1．

设 AD=DM=x，

∵$DM^2+BM^2=DB^2$，

∴$x^2+1^2=(3-x)^2$，

∴$x=\frac{4}{3}$，

∴$BD=AB-AD=3-\frac{4}{3}=\frac{5}{3}$.

6．（虎林市校级期末）已知Rt△ABC中，$AC=BC$，$\angle ACB=90°$，F为AB边的中点，且$DF=EF$，$\angle DFE=90°$，D是BC上一个动点．如图1，当D与C重合时，易证：$CD^2+DB^2=2DF^2$；

（1）当D不与C、B重合时，如图2，CD、DB、DF有怎样的数量关系，请直接写出你的猜想，不需证明．

（2）当D在BC的延长线上时，如图3，CD、DB、DF有怎样的数量关系，请写出你的猜想，并加以证明．

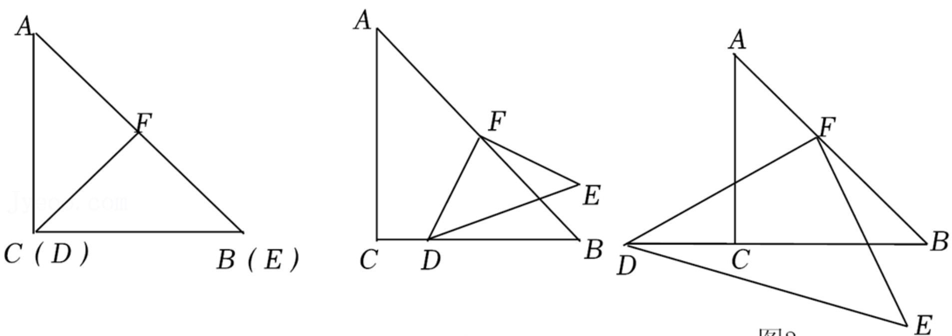


图1　图2　图3

【分析】（1）由图1猜想结论成立；连接CF、BE，证明△DFC≌△EFB（SAS），由全等三角形的性质得出$CD=BE$，$\angle DCF=\angle EBF=45°$，由勾股定理及直角三角形的性质可得出结论．

（2）连接CF、BE，证明△DFC≌△EFB（SAS），由全等三角形的性质得出$CD=BE$，$\angle DCF=\angle EBF=135°$，由勾股定理及直角三角形的性质可得出结论．

【解答】解：（1）图2中，$CD^2+DB^2=2DF^2$成立．

证明：连接CF、BE，

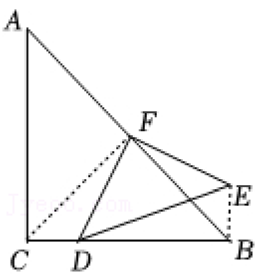


图2

∵$\angle ACB=90°$，F为AB边的中点，

∴$CF=BF$，

又∵$\angle DFC+\angle DFB=\angle EFB+\angle DFB=90^\circ$，

∴$\angle DFC=\angle EFB$，

∵$DF=EF$，

∴$\triangle DFC\cong\triangle EFB$（$SAS$），

∴$CD=BE$，$\angle DCF=\angle EBF=45^\circ$，

∴$\angle DBE=90^\circ$，

∴$DB^2+BE^2=DE^2$，

∵$DE^2=2DF^2$，

∴$CD^2+DB^2=2DF^2$.

（2）图 3 成立．$CD^2+DB^2=2DF^2$.

证明：连接 CF、BE，

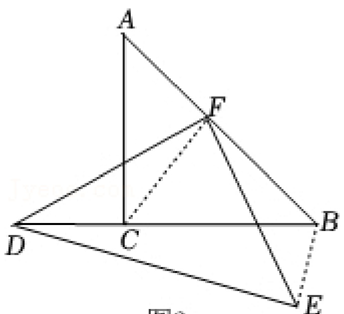


图3

∵$\angle ACB=90^\circ$，F 为 AB 边的中点，

∴$CF=BF$，

又∵$\angle DFC+\angle CFE=\angle EFB+\angle CFB=90^\circ$，$DF=EF$，

∴$\angle DFC=\angle EFB$，

∴$\triangle DFC\cong\triangle EFB$（$SAS$），

∴$CD=BE$，$\angle DCF=\angle EBF=135^\circ$，

∵$\angle EBD=\angle EBF-\angle FBD=135^\circ-45^\circ=90^\circ$，

在 Rt$\triangle DBE$ 中，$BE^2+DB^2=DE^2$，

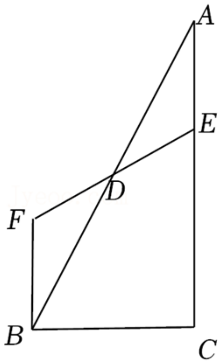
∵$DE^2=2DF^2$，

∴$CD^2+DB^2=2DF^2$.

7．（徐汇区期末）如图，在$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$AC=4$，$CB=2$，点 D 是 AB 的中点，点 E 在 AC 上，点 E、D、F 一条直线上，且 $ED=FD$.

（1）求证：$FB\perp CB$；

（2）联结 CD，若 $CD\perp EF$，求 CE 的长．



【分析】（1）由“SAS”可证$\triangle ADE\cong\triangle BDF$，可得$\angle A=\angle FBD$，$AE=BF$，由余角的性质可得结论；

（2）由等腰三角形的性质可得$CF=EF$，由勾股定理可求解．

【解答】（1）证明：∵D是AB中点，

∴$AD=BD$，

在$\triangle ADE$与$\triangle BDF$中，

$$\begin{cases}AD=BD\\ \angle ADE=\angle BDF,\\ ED=FD\end{cases}$$

∴$\triangle ADE\cong\triangle BDF$（$SAS$），

∴$\angle A=\angle FBD$，$AE=BF$，

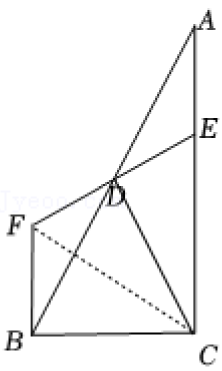
∵$\angle ACB=90°$，

∴$\angle A+\angle ABC=90°$，

∴$\angle FBD+\angle ABC=90°$，即$\angle FBC=90°$，

∴$FB\perp CB$；

（2）联结CF，



∵$CD\perp EF$，$ED=FD$，

∴$CF=EF$，

设$CE=x$，则$CF=x$，$BF=AE=4-x$，

$Rt\triangle FBC$中，$BF^2+BC^2=CF^2$，

∴$2^2+(4-x)^2=x^2$，

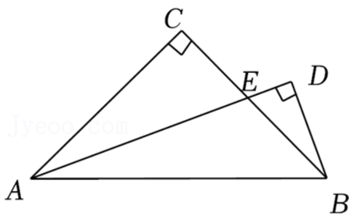
∴$x=\frac{5}{2}$，

∴$CE=\frac{5}{2}$.

8．（通州区期末）如图，在 Rt△ABC 中，∠C＝90°，AC＝BC，在 Rt△ABD 中，∠D＝90°，AD 与 BC 交于点 E，且∠DBE＝∠DAB.

求证：（1）∠CAE＝∠DBC；

（2）$AC^2+CE^2=4BD^2$.



【分析】（1）由余角的性质可求解；

（2）由"$ASAS$"可证△ADB≌△ADF，可得 BD＝DF，即 BF＝2BD，由"ASA"可证△ACE≌△BCF，可得 AE＝BF＝2BD，由勾股定理可求解.

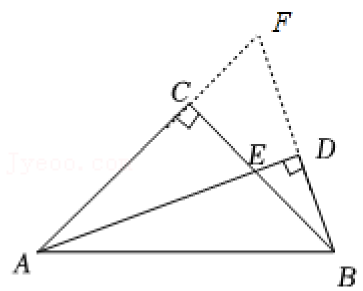
【解答】证明：（1）∵∠ACB＝∠D＝90°，

∴∠CEA+∠CAE＝∠BED+∠CBD＝90°，

∴∠CEA＝∠BED，

∴∠CAE＝∠DBC；

（2）延长 BD 交 AC 延长线于点 F，



∵∠DBE＝∠DAB，

∴∠DAB＝∠CAE，

在△ADB 和△ADF 中，

$\begin{cases}\angle DAB=\angle DAC\\AD=AD\\\angle ADB=\angle ADF=90^\circ\end{cases}$，

∴△ADB≌△ADF（ASA），

∴BD＝DF，

∴$BF=2BD$，

在△ACE和△BCF中，

$$\begin{cases}\angle CAE=\angle DBE\\AC=BC\\\angle ACB=\angle BCF=90°\end{cases},$$

∴△ACE≌△BCF（ASA），

∴$AE=BF$，

∴$AE=2BD$，

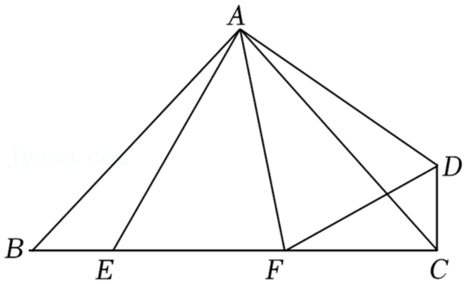
在Rt△ACE中，$AC^2+CE^2=AE^2$，

∴$AC^2+CE^2=(2BD)^2=4BD^2$.

9．（宛城区期末）如图，E、F是等腰Rt△ABC的斜边BC上的两动点，∠$EAF=45°$，$CD\perp BC$且$CD=BE$.

求证：（1）$AE=AD$；

（2）$EF^2=BE^2+CF^2$.



【分析】（1）由等腰直角三角形的性质可得∠B=∠$ACB=45°$，从而可推出∠ACD=∠B，则可证得△ABE≌△ACD；

（2）由（1）可知$AE=AD$，∠BAE=∠CAD，从而可求得∠EAD=∠$BAC=90°$，∠DAF=∠EAF，可证得△AEF≌△ADF，则有$DF=EF$，则利用勾股定理可求解.

【解答】证明：（1）∵△ABC是等腰直角三角形，

∴$AB=AC$，

∴∠B=∠$ACB=45°$，

∵$CD\perp BC$，

∴∠$BCD=90°$，

∴∠ACD=∠BCD－∠$ACB=45°$=∠B，

在△ABE和△ACD中，

$$\begin{cases}AC=AC\\\angle B=\angle ACD,\\BE=CD\end{cases}$$