数　学　建　模

——从自然走向理性之路

第五讲　规划模型

【主要内容】 简介线性规划模型、非线性规划模型及动态规划模型

【主要目的】 了解规划问题的建模与求解，要点在模型的建立与成果的分析

线性规划模型(Linear Programming)

<u>建立模型</u>

线性规划问题：求多变量**线性函数**在**线性约束**条件下的最优值

线性规划问题的一般形式：

$$\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0$$

线性规划问题的原则形式：

$$\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.t. \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i (\geq 0) \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$$

[阐明]

任意线性规划问题可化为原则形式。详细方式如下：

1. 目的函数原则化 $\max z = \min(-z)$

2. 约束条件原则化 ：

假设约束条件中有不等式约束

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \le b_i$$

或

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \ge b_i$$

引入新变量 x_{n+1}, x_{n+2} （称为松弛变量），则以上两式等价于下列两式：

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i \qquad x_{n+1} \ge 0$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - x_{n+2} = b_i \qquad x_{n+2} \ge 0$$

3. 自由变量原则化

若变量 x_j 无约束，可引入两个新变量 x_j', x_j''，令

$$x_j = x_j' - x_j'', \qquad x_j', x_j'' > 0$$

故下列我们只考虑原则形式。

矩阵形式表达

$$\min z = c'x$$

$$s.t. \quad Ax = b$$

$$x \geq 0$$

一般要求，

$$rk(A_{m\times n}) = m, \quad m < n$$

<u>例1</u>　某工厂制造A,B两种产品，制造产品A每吨需用煤9吨，用电4千瓦，3个工作日；制造产品B每吨需用煤5吨，用电5千瓦，10个工作日。已知制造产品A和B每吨分别获利7000元和12023元。现该厂只有煤360吨，电200千瓦，工作日300个能够利用，问A,B两种产品各应生产多少吨才干获利最大?

［解］　x_1, x_2 分别表达A，B两种产品的计划生产数（单位：吨），f 表达利润（单位：千元），则

$$f = 7x_1 + 12x_2$$

耗煤量为 $9x_1 + 5x_2$

耗电量为 $4x_1 + 5x_2$

耗工作日 $3x_1 + 10x_2$

于是得到线性规划模型为：

$$\max f = 7x_1 + 12x_2$$

$$s.t.\quad \begin{cases} 9x_1 + 5x_2 \le 360 \\ 4x_1 + 5x_2 \le 200 \\ 3x_1 + 10x_2 \le 300 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

例2　　设某工厂有甲、乙、丙、丁四个车间，生产A、B、C、D、E、F六种产品，根据机车性能和此前的生产情况，得知生产每单位产品所需各车间的工作时数、每个车间在一种季度工作时数的上限以及产品的价格，如下表所示。问：每种产品每季度各应生产多少，才干使这个工厂每季度生产总值到达最大？

产品 / 车间	A	B	C	D	E	F	每个车间每季度工作时数上限
甲	0.01	0.01	0.01	0.03	0.03	0.03	850
乙	0.02			0.05			700
丙		0.02			0.05		100
丁			0.03			0.08	900
单价（元）	0.40	0.28	0.32	0.72	0.64	0.60	

［解］以 $x_1 \sim x_6$ 分别表达每季度生产产品A、B、C、D、E、F的单位数，于是它们需满足

$$\begin{pmatrix} 0.01 & 0.01 & 0.01 & 0.03 & 0.03 & 0.03 \\ 0.02 & & & 0.05 & & \\ & 0.02 & & & 0.05 & \\ & & 0.03 & & & 0.08 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} 850 \\ 700 \\ 100 \\ 900 \end{pmatrix}$$

$$x_1, x_2, \cdots, x_6 \ge 0$$

目的函数为

$$\max f = 0.40x_1 + 0.28x_2 + 0.32x_3 + 0.72x_4 + 0.64x_5 + 0.60x_6$$

引入松弛变量$x_7 \sim x_{10}$，化成原则型

$$\min g = -0.40x_1 - 0.28x_2 - 0.32x_3 - 0.72x_4 - 0.64x_5 - 0.60x_6$$

$$\begin{pmatrix} 0.01 & 0.01 & 0.01 & 0.03 & 0.03 & 0.03 & 1 & & & \\ 0.02 & & & 0.05 & & & & 1 & & \\ & 0.02 & & & 0.05 & & & & 1 & \\ & & 0.03 & & & 0.08 & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 850 \\ 700 \\ 100 \\ 900 \end{pmatrix}$$

$$x_j \geq 0, \qquad j = 1, 2, \cdots, 10$$

线性规划问题求解

1. 可行域几何特征

满足约束条件的解称为可行解，全部可行解构成的集合称为可行域，满足目的式的可行解称为最优解。

- 线性规划问题的可行域是一种凸多边形；
- 线性规划问题假如存在最优解，则最优解必在可行域的顶点处到达。

2. 单纯形法

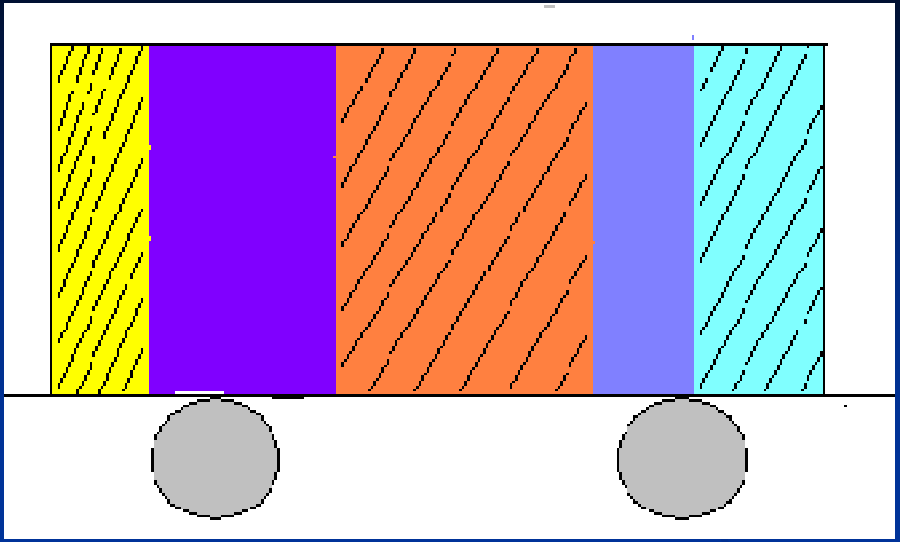
基本思想：从可行域的一种顶点（基本可行解）出发，转换到另一种顶点，而且使目的函数值逐渐减小，有限步后可得到最优解。

整数规划

自变量取整数的线性规划称为整数（线性）规划。

割平面法，分支定界法

0—1规划



例3 （MCM-88B）要把七种不同规格的包装箱装到两辆铁路平板车上去，各包装箱宽、高均相同，但厚度（厘米）与重量（公斤）不同。下表给出各包装箱的厚度、重量及数量。每辆平板车有10.2米长的地方可用来装包装箱，载重40吨。由于本地货运限制，对C_5，C_6，C_7类包装箱总数有一种尤其限制：该类箱子总厚度不超出302.7（厘米）。试把包装箱装到平板车上去使得挥霍空间最小。

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
厚度t	48.7	52.0	61.3	72.0	48.7	52.0	64.0
重量w	■ 2023	3000	1000	500	4000	■ 2023	1000
件数n	8	7	9	6	6	4	8

1. 问题分析

题中全部的包装箱共重89吨，而两辆平板车只能载80吨，所以不能都装下，问题是装哪些箱子，使剩余空间最小。

2.　模型建立

设　x_{ij} = 第i辆车装 C_j类箱子的个数，　i =1,2　j =1, …,7

$$x_{ij} \in Z^{+}$$

自然约束：$x_{1j} + x_{2j} \le n_j,\qquad j = 1,2,L\ ,7$

箱数约束：$2x_{i1} + 3x_{i2} + x_{i3} + 0.5x_{i4} + 4x_{i5} + 2x_{i6} + x_{i7} \le 40,\qquad i = 1,2$

重量约束：

$$0.487x_{i1} + 0.520x_{i2} + 0.613x_{i3} + 0.720x_{i4} +$$

厚度约束：

$$+0.487x_{i5} + 0.520x_{i6} + 0.640x_{i7} \le 10.2,\qquad i = 1,2$$

$$0.487x_{i5} + 0.520x_{i6} + 0.64x_{i7} \le 3.027\qquad i = 1,2$$

尤其约束：

目的函数

$$\max z=\sum_{i=1}^{2}[0.487x_{i1}+0.520x_{i2}+0.613x_{i3}+0.720x_{i4}+0.487x_{i5}+0.520x_{i6}+0.640x_{i7}]$$

<u>例4</u>　　分工问题

某车间有四项工作需要完毕，现已找到四个人做这些工作，经过试用，得到这四个人做每一项工作的相对生产率指数，列表如下　。

假定每个人只能分配一项工作，并希望分配后总的生产率最高，应怎样分配工作?