初中、高中衔接课

知识点一　常用的乘法公式

(1)平方差公式：$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

(2)立方差公式：$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$.

(3)立方和公式：$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$.

(4)完全平方公式：$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.

(5)三数和平方公式：$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.

(6)完全立方公式：$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$.

例1 计算：$(x+1)(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$.

解 **方法一** 原式$=(x^2-1)[(x^2+1)^2-x^2]$

$=(x^2-1)(x^4+x^2+1)=x^6-1$.

方法二 原式$=(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)$

$=(x^3+1)(x^3-1)=x^6-1$.

解答

练习1　分解因式：$2x^3-x-1$.

解　$2x^3-x-1=2x^3-2+1-x$

$=2(x-1)(x^2+x+1)-(x-1)$

$=(x-1)[2(x^2+x+1)-1]$

$=(x-1)(2x^2+2x+1)$.

解答

知识点二　二次根式

(1)定义：

一般地，形如 $\sqrt{a}(a\geq0)$的代数式叫做二次根式．根号下含有字母、且不能够开得尽方的式子称为无理式.

(2)二次根式$\sqrt{a^2}$的意义：$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a，& a\geq0，\\ -a，& a<0.\end{cases}$

(3)分母(子)有理化：

①定义：把分母(子)中的根号化去，叫做分母(子)有理化．为了进行分母(子)有理化，需要引入有理化因式的概念．两个含有二次根式的代数式相乘，如果它们的积不含有二次根式，我们就说这两个代数式互为有理化因式．

②方法：(ⅰ)分母有理化的方法是分母和分子都乘以分母的有理化因式，化去分母中的根号的过程；

(ⅱ)分子有理化则是分母和分子都乘以分子的有理化因式，化去分子中的根号的过程．

例 2　化简：$\sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

解　$\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2-2\sqrt{2}+1}=\sqrt{(\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}+1^2}=\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}=|\sqrt{2}-1|$,

$\because \sqrt{2}-1>0$,

$\therefore$ 原式 $=\sqrt{2}-1$.

解答

练习 2 化简：$\sqrt{5-2\sqrt{6}}$.

解 $\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+(\sqrt{2})^2}$

$=\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}$

$=\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

解答

例 3　计算：$(16+6\sqrt{5})\div(3+\sqrt{5})$.

解　原式$=\dfrac{(16+6\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}$

$=\dfrac{48-16\sqrt{5}+18\sqrt{5}-30}{4}$

$=\dfrac{9+\sqrt{5}}{2}$.

解答

练习 3 计算：$\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{8}}$.

解 $\because \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}.$

类似地，$\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}=\sqrt{4}-\sqrt{3}$，$\cdots$，

$\therefore$原式$=(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+(\sqrt{5}-\sqrt{4})+\cdots+(\sqrt{8}-\sqrt{7})$

$=\sqrt{8}-\sqrt{2}=2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}.$

解答

知识点三　因式分解的常用方法

(1)十字相乘法：十字左边相乘等于二次项系数，右边相乘等于常数项，交叉相乘再相加等于一次项系数，即运用乘法公式$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$的逆运算进行因式分解.

(2)提取公因式法：当多项式的各项有公因式时，可以把这个公因式提到括号外面，将多项式写成因式乘积形式的方法.

(3)公式法：把乘法公式反过来用，把某些多项式因式分解的方法.

(4)求根法：若关于x的方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的两个实数根是x_1，x_2，则二次三项式$ax^2+bx+c(a\neq 0)$就可分解为$a(x-x_1)(x-x_2)$.

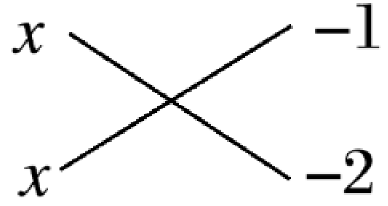
(5)试根法：对于简单的高次因式，可以通过先试根再分解的方法分解因式.

如$2x^3-x-1$，试根知$x=1$为$2x^3-x-1=0$的根，通过拆项，$2x^3-x-1=2x^3-2x^2+2x^2-2x+x-1$提取公因式后分解因式.

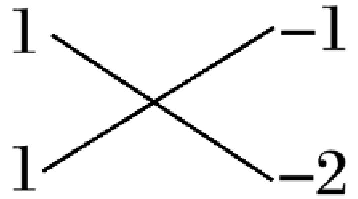
例4　分解因式：

(1)x^2-3x+2；

解　如图①，将二次项x^2分解成图中的两个x的积，再将常数项2分解成-1与-2的乘积，而图中的对角线上的两个式子乘积的和为$-3x$，就是x^2-3x+2中的一次项，所以，$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$.



①



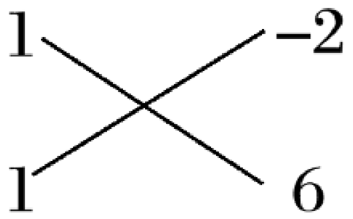
②

说明：今后在分解与本例类似的二次三项式时，可以直接将图①中的两个x用1来表示(如图②所示).

解答

(2) $x^2+4x-12$；

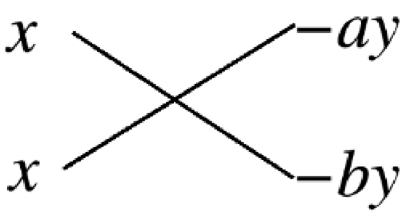
解　由图③，得 $x^2+4x-12=(x-2)(x+6)$.



③

(3) $x^2-(a+b)xy+aby^2$；

解　由图④，得 $x^2-(a+b)xy+aby^2=(x-ay)(x-by)$.



④

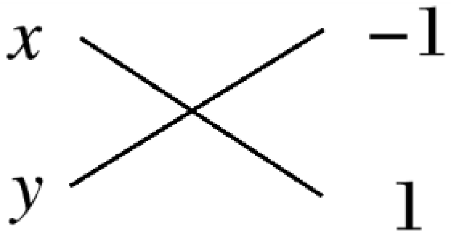
解答

(4)$xy-1+x-y$.

解 $xy-1+x-y=xy+(x-y)-1$

$=(x-1)(y+1)$

(如图⑤所示).



⑤

解答

练习4　选用恰当的方法解下列一元二次方程：

(1)$x^2+x=0$；

解　方程变为$x(x+1)=0$，

解得$x_1=0$，$x_2=-1$.

(2)$x^2+6x+9=0$；

解　方程变为$(x+3)^2=0$，解得$x=-3$.

解答