# 数学八年级上册 全册全套试卷测试卷 （word版，含解析）

## 一、八年级数学全等三角形解答题压轴题（难）

1．如图1，在△ACB和△AED中，AC=BC，AE=DE，∠ACB=∠AED=90°，点E在AB上，F是线段BD的中点，连接CE、FE.

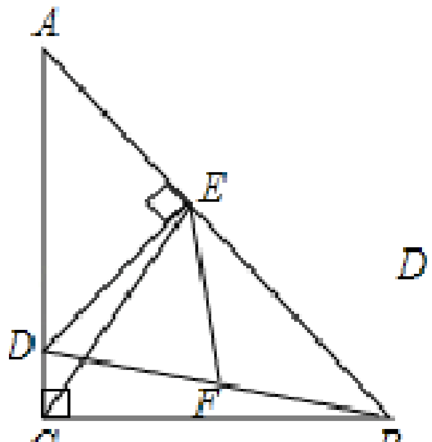


图1

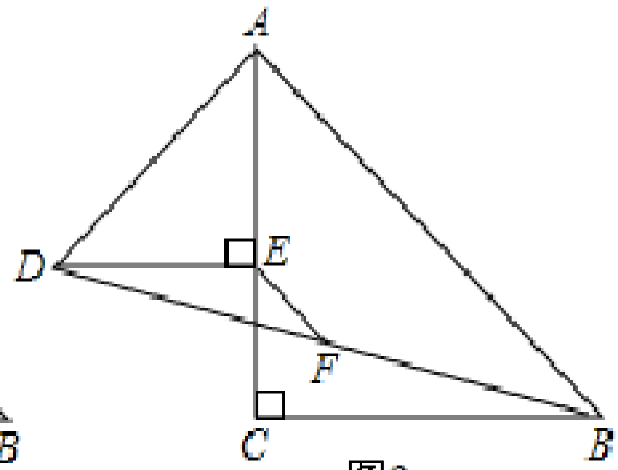


图2

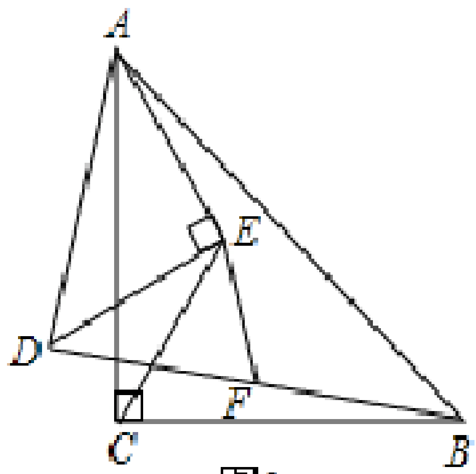


图3

（1）请你探究线段CE与FE之间的数量关系（直接写出结果，不需说明理由）；

（2）将图1中的△AED绕点A顺时针旋转，使△AED的一边AE恰好与△ACB的边AC在同一条直线上（如图2），连接BD，取BD的中点F，问（1）中的结论是否仍然成立，并说明理由；

（3）将图1中的△AED绕点A顺时针旋转任意的角度（如图3），连接BD，取BD的中点F，问（1）中的结论是否仍然成立，并说明理由．

【答案】（1）线段CE与FE之间的数量关系是CE=$\sqrt{2}$FE；（2）（1）中的结论仍然成立．理由见解析；（3）（1）中的结论仍然成立．理由见解析

【解析】

【分析】

（1）连接CF，直角△DEB中，EF是斜边BD上的中线，因此EF=DF=BF，∠FEB=∠FBE，同理可得出CF=DF=BF，∠FCB=∠FBC，因此CF=EF，由于∠DFE=∠FEB+∠FBE=2∠FBE，同理∠DFC=2∠FBC，因此∠EFC=∠EFD+∠DFC=2（∠EBF+∠CBF）=90°，因此△EFC是等腰直角三角形，CF=$\sqrt{2}$EF；

（2）思路同（1）也要通过证明△EFC是等腰直角三角形来求解．连接CF，延长EF交CB于点G，先证△EFC是等腰三角形，可通过证明CF是斜边上的中线来得出此结论，那么就要证明EF=FG，就需要证明△DEF和△FGB全等．这两个三角形中，已知的条件有一组对顶角，DF=FB，只要再得出一组对应角相等即可，我们发现DE∥BC，因此∠EDB=∠CBD，由此构成了两三角形全等的条件．EF=FG，那么也就能得出△CFE是个等腰三角形了，下面证明△CFE是个直角三角形．由上面的全等三角形可得出ED=BG=AD，又由AC=BC，因此CE=CG，∠CEF=45°，在等腰△CFE中，∠CEF=45°，那么这个三角形就是个等腰直角三角形，因此就能得出（1）中的结论了；

（3）思路同（2）通过证明△CFE来得出结论，通过全等三角形来证得CF=FE，取AD的中点M，连接EM，MF，取AB的中点N，连接FN、CN、CF．那么关键就是证明△MEF和△CFN全等，利用三角形的中位线和直角三角形斜边上的中线，我们不难得出EM=PN=$\frac{1}{2}$AD，EC=MF=$\frac{1}{2}$AB，我们只要再证得两对应边的夹角相等即可得出全等的结

论．我们知道 PN 是△ABD的中位线，那么我们不难得出四边形 AMPN为平行四边形，那么对角就相等，于是 90°+∠CNF=90°+∠MEF，因此∠CNF=∠MEF，那么两三角形就全等了．证明∠CFE是直角的过程与（1）完全相同．那么就能得出△CEF是个等腰直角三角形，于是得出的结论与（1）也相同．

【详解】

（1）如图 1，连接 CF，线段 CE与 FE之间的数量关系是 CE=$\sqrt{2}$FE；

解法 1：

∵∠AED=∠ACB=90°

∴B、C、D、E 四点共圆

且 BD是该圆的直径，

∵点 F 是 BD的中点，

∴点 F 是圆心，

∴EF=CF=FD=FB，

∴∠FCB=∠FBC，∠ECF=∠CEF，

由圆周角定理得：∠DCE=∠DBE，

∴∠FCB+∠DCE=∠FBC+∠DBE=45°

∴∠ECF=45°=∠CEF，

∴△CEF是等腰直角三角形，

∴CE=$\sqrt{2}$EF．

解法 2：

易证∠BED=∠ACB=90°，

∵点 F 是 BD的中点，

∴CF=EF=FB=FD，

∵∠DFE=∠ABD+∠BEF，∠ABD=∠BEF，

∴∠DFE=2∠ABD，

同理∠CFD=2∠CBD，

∴∠DFE+∠CFD=2（∠ABD+∠CBD）=90°，

即∠CFE=90°，

∴CE=$\sqrt{2}$EF．

（2）（1）中的结论仍然成立．

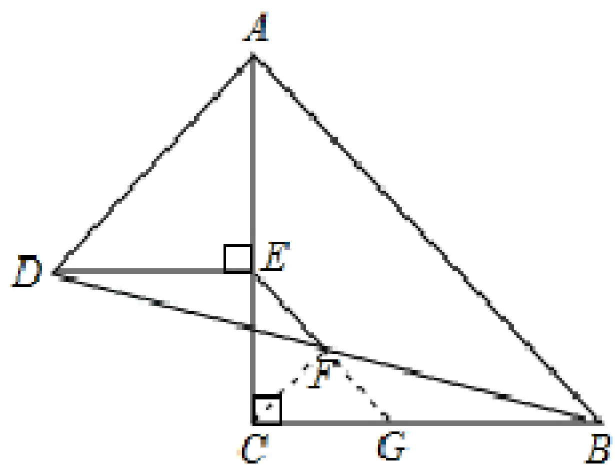


图2-1

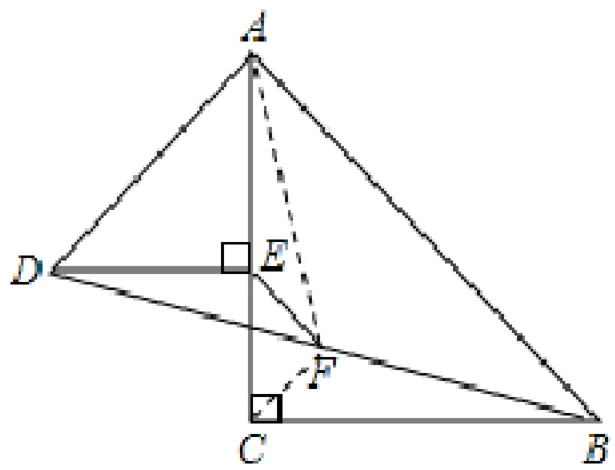


图2-2

解法 1：如图 2－1，连接 CF，延长 EF交 CB于点 G，

∵∠ACB=∠AED=90°，
∴DE∥BC，
∴∠EDF=∠GBF，
又∵∠EFD=∠GFB，DF=BF，
∴△EDF≌△GBF，
∴EF=GF，BG=DE=AE，
∵AC=BC，
∴CE=CG，
∴∠EFC=90°，CF=EF，
∴△CEF为等腰直角三角形，
∴∠CEF=45°，
∴CE= $\sqrt{2}$ FE；
解法2：如图2－2，连结CF、AF，
∵∠BAD=∠BAC+∠DAE=45°+45°=90°，
又点F是BD的中点，
∴FA=FB=FD，
而AC=BC，CF=CF，
∴△ACF≌△BCF，
∴∠ACF=∠BCF= $\frac{1}{2}$ ∠ACB=45°，
∵FA=FB，CA=CB，
∴CF所在的直线垂直平分线段AB，
同理，EF所在的直线垂直平分线段AD，
又DA⊥BA，
∴EF⊥CF，
∴△CEF为等腰直角三角形，
∴CE= $\sqrt{2}$ EF.
（3）（1）中的结论仍然成立.

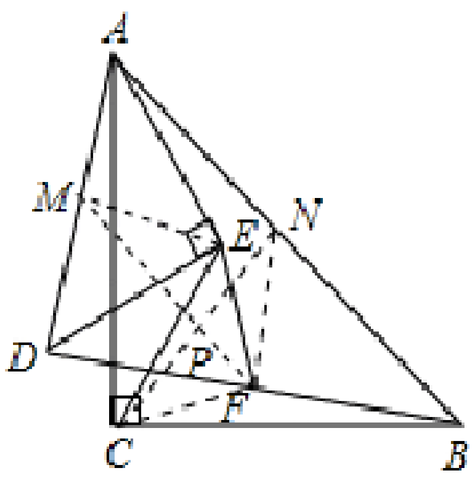


图3−1

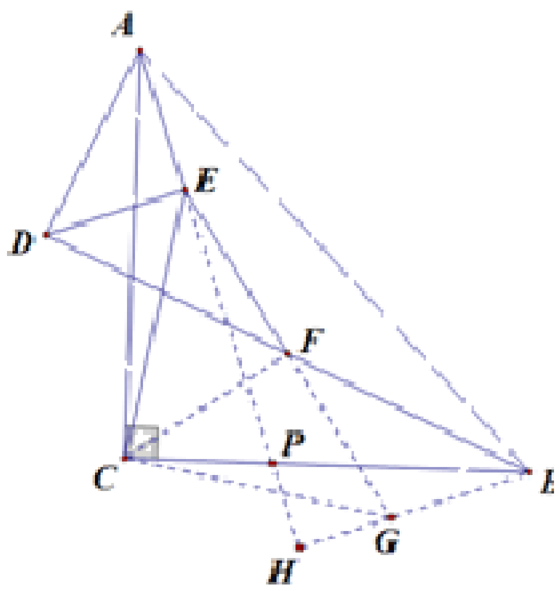


图3−2

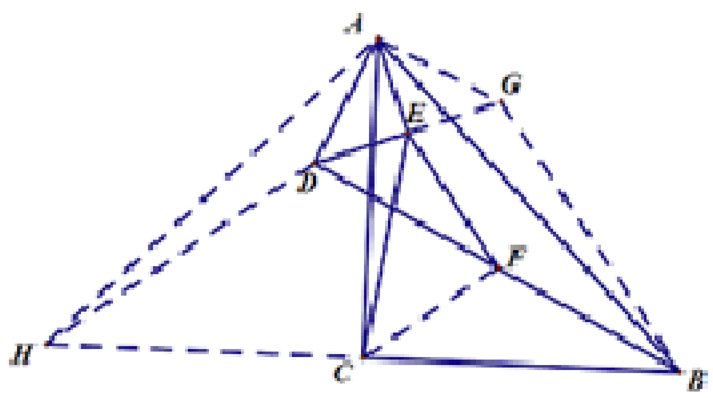


图3−3

解法1：如图3－1，取AD的中点M，连接EM，MF，取AB的中点N，连接FN、CN、 CF,

∵DF＝BF,

∴FM∥AB，且 FM＝$\frac{1}{2}$AB,

∵AE＝DE，∠AED＝90°，

∴AM＝EM，∠AME＝90°，

∵CA＝CB，∠ACB＝90°

∴CN=AN=$\frac{1}{2}$AB，∠ANC＝90°，

∴MF∥AN，FM＝AN＝CN,

∴四边形 MFNA为平行四边形，

∴FN＝AM＝EM，∠AMF＝∠FNA,

∴∠EMF＝∠FNC,

∴△EMF≌△FNC,

∴FE＝CF，∠EFM＝∠FCN,

由 MF∥AN，∠ANC＝90°，可得∠CPF＝90°，

∴∠FCN+∠PFC＝90°，

∴∠EFM+∠PFC＝90°，

∴∠EFC＝90°，

∴△CEF为等腰直角三角形，

∴∠CEF＝45°，

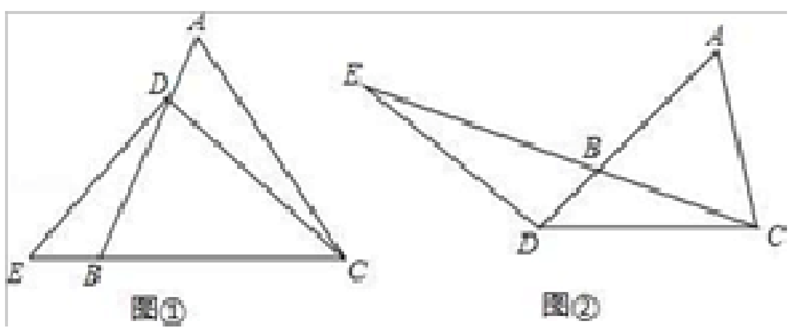
∴CE＝$\sqrt{2}$FE.

【点睛】

本题解题的关键是通过全等三角形来得出线段的相等，如果没有全等三角形的要根据已知条件通过辅助线来构建.

2．（1）已知△ABC是等腰三角形，其底边是 BC,点 D 在线段 AB上，E是直线 BC上一点，且∠DEC=∠DCE,若∠A 等于 60°（如图①）.求证：EB=AD;

（2）若将（1）中的“点 D 在线段 AB上”改为“点 D 在线段 AB的延长线上”，其他条件不变（如图②），（1）的结论是否成立，并说明理由.




【答案】（1）证明见解析（2）证明见解析

【解析】

试题分析：（1）作 DF□BC交 AC于 F□□□□□□□□□□□□ADF=□ABC□□AFD=□ACB□□FDC=□DCE□□□□ABC□□□□□□□□□□ABC=□ACB=60°□□□□ADF 是等边三角

□□□DFC=120°□□□　AD=DF□□□□□□□□FDC=□DEC□　ED=CD由AAS证明□DBE□□CFD□□□　EB=DF即可得出结论；

（2）作DF□BC交AC的延长线于F，同（1□□□□DBE□□CFD□□□　EB=DF即可得出结论.

试题解析：（1）证明：如图，作DF∥BC交AC于F，

则△ADF为等边三角形

∴AD=DF，又∵∠DEC=∠DCB，

∠DEC+∠EDB=60°，

∠DCB+∠DCF=60°，

∴∠EDB=∠DCA，DE=CD，

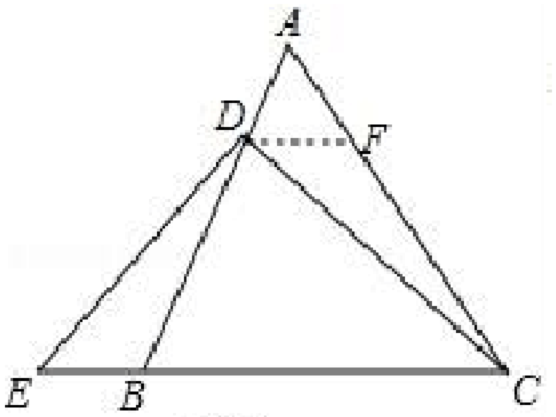
在△DEB和△CDF中，

$$\begin{cases}\angle EBD=\angle DFC=120^\circ,\\ \angle EDB=\angle DCF,\\ DE=CD\end{cases}$$

∴△DEB≌△CDF，

∴BD=DF，

∴BE=AD .




(2) EB=AD成立；

理由如下：作DF∥BC交AC的延长线于F，如图所示：

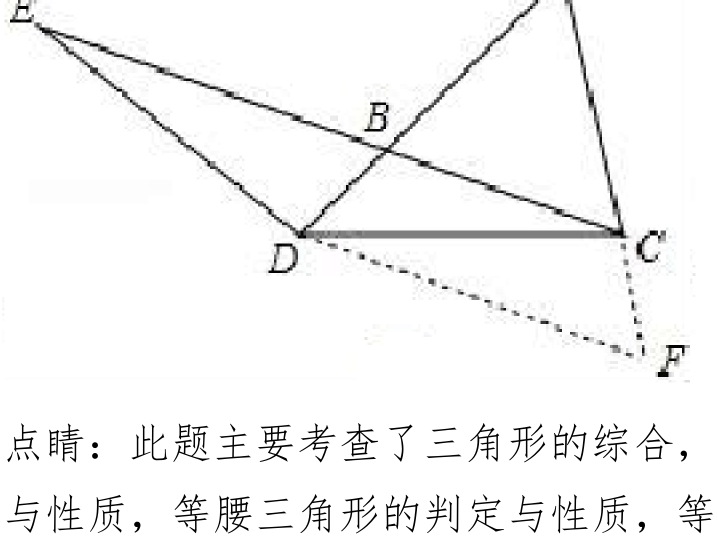
同（1）得：AD=DF，∠FDC=∠ECD，∠FDC=∠DEC，ED=CD，

又∵∠DBE=∠DFC=60°，

∴△DBE≌△CFD（AAS），

∴EB=DF，

∴EB=AD.




点睛：此题主要考查了三角形的综合，考查等边三角形的判定与性质，全等三角形的判定与性质，等腰三角形的判定与性质，等腰直角三角形的判定与性质，平行线的性质等知

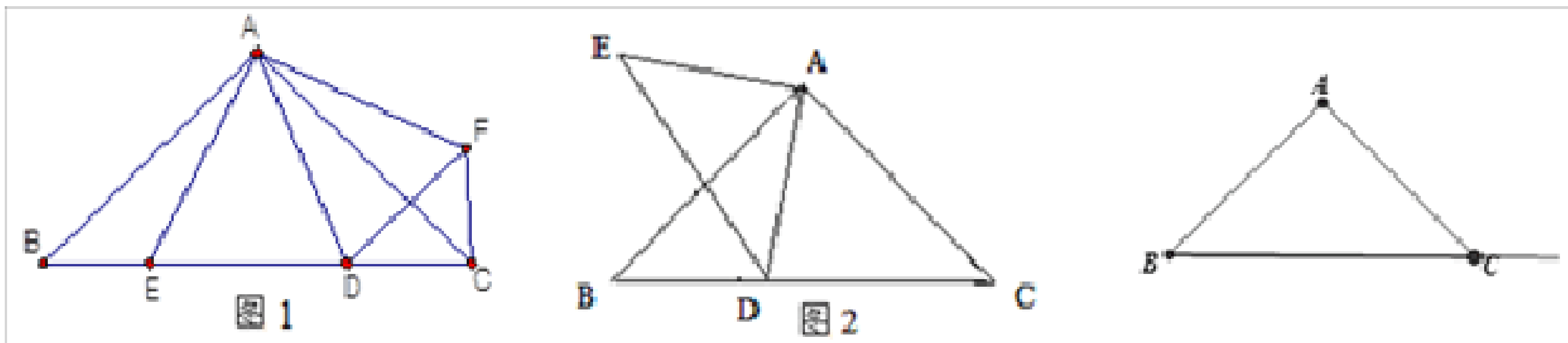
识，综合性强，有一定的难度，证明三角形全等是解决问题的关键.

3．（1）如图 1，在 Rt△ABC中， AB□AC，D、E 是斜边 BC上两动点，且 ∠DAE=45°，将△ ABE绕点 A逆时针旋转 90 后，得到△ AFC，连接 DF .

（1）试说明：△ AED ≌△ AFD；

（2）当 BE=3,CE=9时，求∠BCF的度数和 DE的长；

（3）如图 2，△ABC和△ADE都是等腰直角三角形，∠BAC=∠DAE=90°，D 是斜边 BC所在直线上一点，BD=3，BC=8，求 $DE^2$ 的长.




【答案】（1）略（2□□BCF=90° DE=5 □ 3）34 或 130

【解析】

试题分析：□1□由 ABE≌ AFC，得到 AE □AF，□BAE □□CAF，

□EAD □45 ，□ □BAE □□CAD □45 ，□ □CAF □□CAD □45 ，即

□DAF □45. □EAD □□DAF，从而得到 AED≌ AFD.

□2□ 由△ AED≌ AFD 得到 ED □FD ，再证明 □DCF □90□，利用勾股定理即可得出结论.

□3□ 过点 A作 AH□BC 于 H ，根据等腰三角形三线合一得， AH □BH $\square\frac{1}{2}$BC □4.

DH □BH □BD □1 或 DH □BH □BD □7，求出 AD 的长，即可求得 $DE^2$ .

试题解析：□1□ ABE≌ AFC，

AE □AF，□BAE □□CAF，

□EAD □45 ，□BAC □90 ，

□ □BAE □□CAD □45 ，

□ □CAF □□CAD □45 ，

即 □DAF □45.

在 AED 和 AFD 中，{ AF □AE ; □EAF □□DAE ; AD □AD，

□ AED≌ AFD.

□2□ AED≌ AFD，

□ED □FD，

∵△ △

$AB = AC, \angle BAC = 90^\circ$,

$\therefore \angle B = \angle ACB = 45^\circ$,

$\because \angle ACF = 45^\circ$,

$\therefore \angle BCF = 90^\circ$.

设 $DE = x$.

$DF = DE = x, CD = 9 - x$. $FC = BE = 3$.

$FC^2 + DC^2 = DF^2$,

$\therefore 3^2 + (9 - x)^2 = x^2$.

解得：$x = 5$.

故 $DE = 5$.

(3) 过点 A 作 $AH \perp BC$ 于 H ,根据等腰三角形三线合一得，

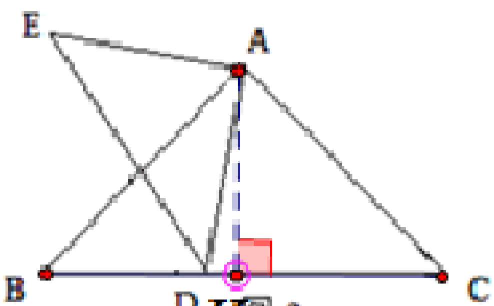
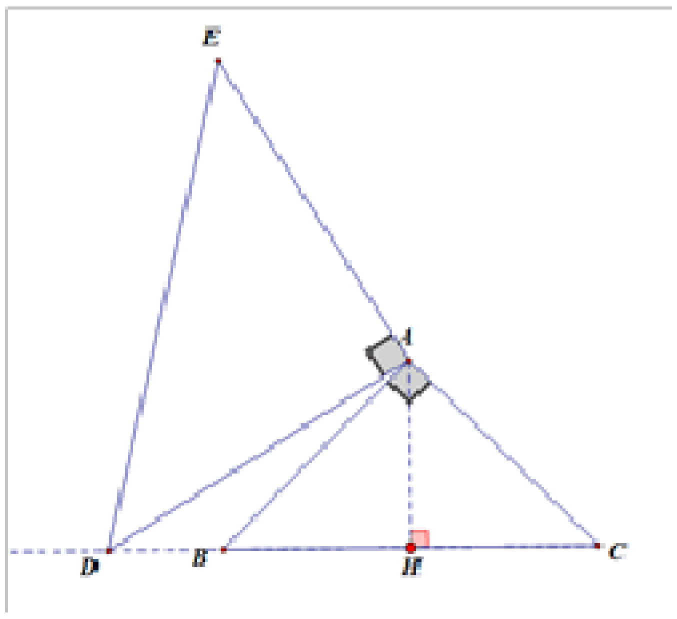


图 2




$AH = BH = \frac{1}{2}BC = 4$.

$DH = BH - BD = 1$ 或 $DH = BH + BD = 7$,

$AD^2 = AH^2 + DH^2 = 17$ 或 $65$.

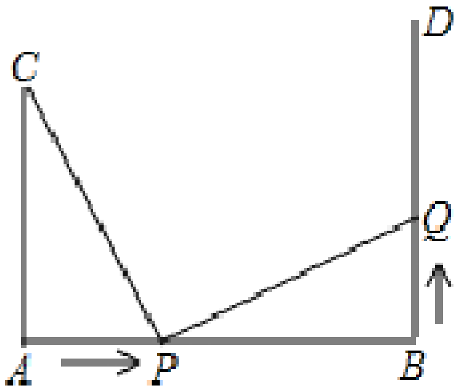
$DE^2 = 2AD^2 = 34$ 或 $130$.

点睛：D 是斜边 BC 所在直线上一点,注意分类讨论.

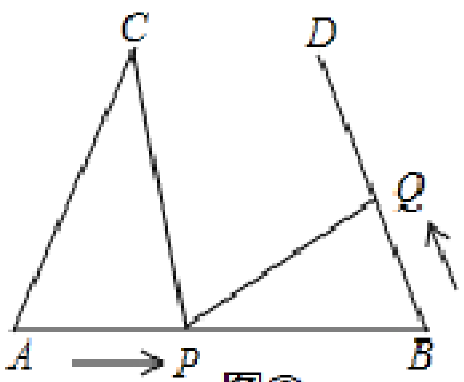
4. 已知 $AB = 4cm$， $AC = BD = 3cm$ .点 P 在 AB 上以 $1cm/s$ 的速度由点 A 向点 B 运动，同时点 Q 在 BD 上由点 B 向点 D 运动，它们运动的时间为 $t(s)$.

（1）如图①，$AC \perp AB$，$BD \perp AB$，若点 Q 的运动速度与点 P 的运动速度相等，当 $t = 1$ 时，$\triangle ACP$ 与 $\triangle BPQ$ 是否全等，请说明理由，并判断此时线段 PC 和线段 PQ 的位置关系；

（2）如图②，将图①中的“$AC \perp AB$，$BD \perp AB$”为改“$\angle CAB = \angle DBA = 60^\circ$”，其他条件不变．设点 Q 的运动速度为 $xcm/s$，是否存在实数 $x$，使得 $\triangle ACP$ 与 $\triangle BPQ$ 全等？若存在，求出相应的 $x$、$t$ 的值；若不存在，请说明理由．



图①



图②

【答案】（1）全等，PC与PQ垂直；（2）存在，$\begin{cases} t=1 \\ x=1 \end{cases}$或$\begin{cases} t=2 \\ x=\frac{3}{2} \end{cases}$

【解析】

【分析】

（1）利用SAS证得△ACP≌△BPQ，得出∠ACP=∠BPQ，进一步得出∠APC+∠BPQ=∠APC+∠ACP=90°得出结论即可；

（2）由△ACP≌△BPQ，分两种情况：①AC=BP，AP=BQ，②AC=BQ，AP=BP，建立方程组求得答案即可．

【详解】

解：（1）当t=1时，AP=BQ=1，BP=AC=3，

又∠A=∠B=90°，

在△ACP和△BPQ中，

$$\begin{cases} AP=BQ \\ \angle A=\angle B \\ AC=BP \end{cases},$$

∴△ACP≌△BPQ（SAS）．

∴∠ACP=∠BPQ，

∴∠APC+∠BPQ=∠APC+∠ACP=90°．

∴∠CPQ=90°，

即线段PC与线段PQ垂直．

（2）①若△ACP≌△BPQ，

则AC=BP，AP=BQ，

$$\begin{cases} 3=4-t \\ t=xt \end{cases},$$

解得$\begin{cases} t=1 \\ x=1 \end{cases}$，

②若△ACP≌△BQP，

则AC=BQ，AP=BP，

$$\begin{cases} 3=xt \\ t=4-t \end{cases},$$

解得 $\begin{cases} t=2 \\ x=\dfrac{3}{2} \end{cases}$，

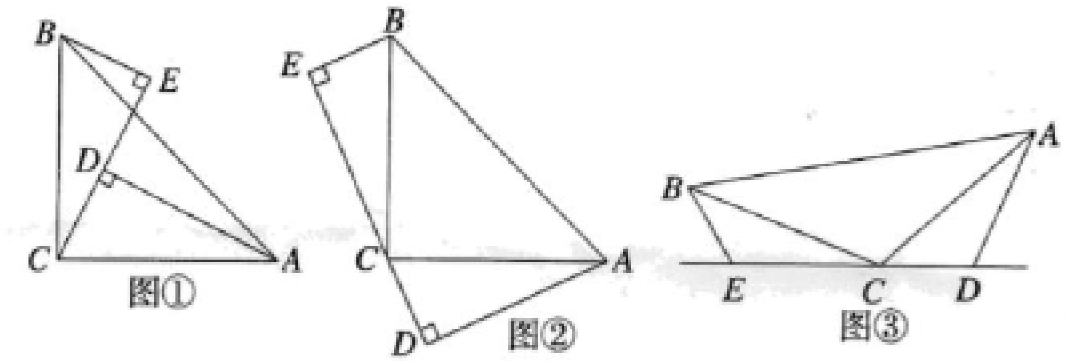
综上所述，存在 $\begin{cases} t=1 \\ x=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} t=2 \\ x=\dfrac{3}{2} \end{cases}$ 使得△ACP与△BPQ全等.

【点睛】

本题考查全等三角形的判定与性质，在解题时注意分类讨论思想的运用.

5．综合实践

如图①，$\angle ACB=90°$，$AC=BC$，$AD\perp CE$，$BE\perp CE$，垂足分别为点D、E，$AD=2.5cm$，$DE=1.7cm$.




（1）求BE的长；

（2）将CE所在直线旋转到△ABC的外部，如图②，猜想AD、DE、BE之间的数量关系，直接写出结论，不需证明；

（3）如图③，将图①中的条件改为：在△ABC中，$AC=BC$，D、C、E三点在同一直线上，并且$\angle BEC=\angle ADC=\angle BCA=\alpha$，其中$\alpha$为任意钝角．猜想AD、DE、BE之间的数量关系，并证明你的结论.

【答案】(1)0.8cm;

(2)DE=AD+BE;

(3)DE=AD+BE，证明见解析.

【解析】

【分析】

(1)本小题只要先证明△ACD≌△CBE，得到$AD=CE$，$CD=BE$，再根据$AD=2.5cm$，$DE=1.7cm$，$CD=CE-DE$，易求出BE的值；

(2)先证明△ACD≌△CBE，得到$AD=CE$，$CD=BE$，由图②ED=EC+CD，等量代换易得到AD、DE、BE之间的关系；

（3）本题先证明$\angle EBC=\angle DCA$，然后运用“AAS”定理判定△BEC≌△CDA，从而得到$BE=CD$，$EC=AD$，再结合图③中线段ED的特点易找到AD、DE、BE之间的数量关系.

【详解】

解：(1)∵$AD\perp CD$，$BE\perp CE$

$\angle E=90^\circ$

$\therefore \angle ACD+\angle DAC=90^\circ$

$\because \angle ACB=90^\circ$

$\therefore \angle ACD+\angle BCE=90^\circ$

$\therefore \angle ACD=\angle BCE$

在 $\triangle ACD$ 与 $\triangle CBE$ 中，$\begin{cases}\angle ADC=\angle E=90^\circ\\ \angle ACD=\angle BCE\\ AC=BC\end{cases}$

$\therefore \triangle ACD\cong\triangle CBE$

$\therefore AD=CE, CD=BE$

又 $\because AD=2.5cm, DE=1.7cm$，$CD=CE-DE=AD-DE=2.5-1.7=0.8(cm)$

$\therefore BE=0.8cm$

(2) $\because AD\perp CD, BE\perp CE$

$\therefore \angle ADC=\angle E=90^\circ$

$\therefore \angle ACD+\angle DAC=90^\circ$

$\therefore \angle ACB=90^\circ$

$\therefore \angle ACD+\angle BCE=90^\circ$

$\therefore \angle ACD=\angle BCE$

在 $\triangle ACD$ 与 $\triangle CBE$ 中，$\begin{cases}\angle ADC=\angle E=90^\circ\\ \angle ACD=\angle BCE\\ AC=BC\end{cases}$

$\therefore \triangle ACD\cong\triangle CBE$

$\therefore AD=CE, CD=BE$

又 $\because ED=EC+CD$

$\therefore ED=AD+BE$

(3) $\because \angle BEC=\angle ADC=\angle BCA=\alpha$

$\therefore \angle BCE+\angle ACD=180^\circ-\alpha$

$\angle BCE+\angle BCE=180^\circ-\alpha$

$\therefore \angle ACD=\angle BCE$

在 $\triangle ACD$ 与 $\triangle CBE$ 中，$\begin{cases}\angle ADC=\angle E=\alpha\\ \angle ACD=\angle BCE\\ AC=BC\end{cases}$

$\therefore \triangle ACD\cong\triangle CBE$

$\therefore AD=CE, CD=BE$

EC □CD

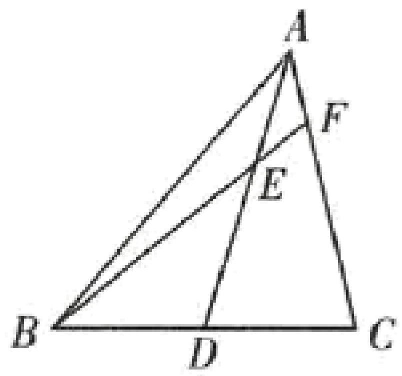
∴ ED □AD□BE

【点睛】

本题考查的知识点是全等三角形的判定，确定一种判定定理，根据已知条件找到判定全等所需要的边相等或角相等的条件是解决这类题的关键．

二、八年级数学 轴对称解答题压轴题（难）

6．如图，在△ABC中，已知AD是BC边上的中线，E是AD上一点，且BE □AC，延长BE交AC于点F，求证：AF □EF．




【答案】证明见解析

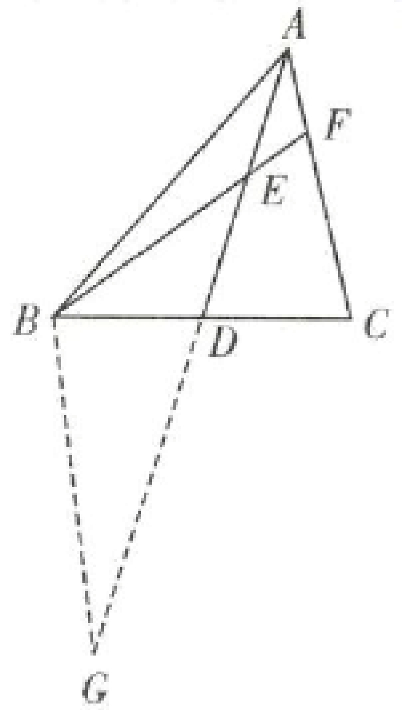
【解析】

【分析】

延长AD到点G，使得AD □DG，连接BG，结合D是BC的中点，易证△ADC和△GDB全等，利用全等三角形性质以及等量代换，得到△AEF中的两个角相等，再根据等角对等边证得AE=EF.

【详解】

如图，延长AD到点G，延长AD到点G，使得AD □DG，连接BG．




∵ AD是BC边上的中线，

∴ DC □DB．

在　ADC和△GDB中，

△

□ DG
□□ADC □□GDB
□DC □DB

∴ ADC≌△GDB（ ）.

∴□CAD □□G，BG □AC .

又 BE □AC，

∴ BE □BG .

∴□BED □□G .

∵□BED □□AEF

∴□AEF □□CAD，即□AEF □□FAE

∴ AF □EF .

【点睛】

本题考查的是全等三角形的判定与性质，根据题意构造全等三角形是解答本题的关键.

7．如图，在等腰直角△ABC中，AB □AC，□BAC □90□，点 D 是△ABC 内一点，连接 AD，AE □AD 且 AE □AD，连接 BD、CE 交于点 F .

（1）如图 1，求□BFC 的度数；

（2）如图 2，连接 ED 交 BC 于点 G，连接 AG，若 AG平分□BAD，求证：□EAC □2□EDF ；

（3）如图 3，在（2）的条件下，BF 交 AG、AC分别于点 M 、N，DH □AM，连接 HN，若□ADN的面积与 DHN 的面积差为 6，DF □6，求四边形 AMFE 的面积.

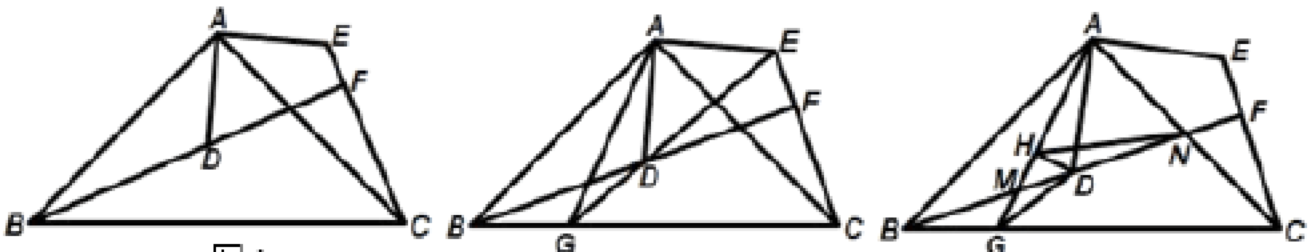


图 1　图 2　图 3

【答案】（1）∠ =90°；（2）见解析；（3）$S_{四边形AMFE}$ □20

【解析】

【分析】

（1）根据 SAS证明 ABD≌ ACE，所以□ABD □□ACF，所以□BFC □□BAC □90□

（2）根据题意先求出□ABG□ □ADG □180□，在AB上截取 AK □AD，连接KG，由 AKG≌ ADG，□BKG□ □AKG □180□，可证得□BKG □□KBG，GB □GK □DG，所以□DBG □□BDG □□EDF □□，因为□CAE □□BAD □2□，所以□CAE □2□EDF .

（3）根据题意和（2）中结论先证明 AD □AN □AE，过 A作 BF 、CE 垂线，垂足分别为 R、T，连接 AF，证明 ANR≌ AET，所以 AR □AT，然后根据等腰三角形的

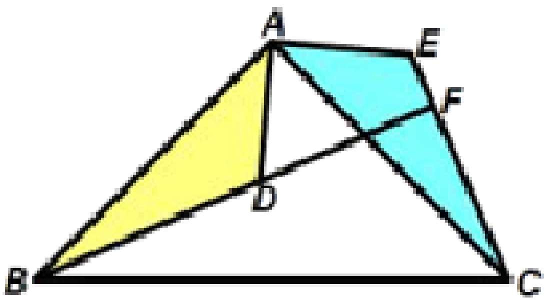
FN，过点 H 作 HP □FM，垂足为 P，所以 HP □PM □DP，设 DP □x， DR □y，

所以 $S_{□ADN}$ □$S_{□DHN}$ □$\frac{1}{2}$□DN □AR □$\frac{1}{2}$DN □HP □y □x □y □□6， DF □2x □2y □6，求出 x，y，不难得到 $S_{□AEF}$ □$S_{□ANF}$ □$S_{□ADM}$ =4，然后可得 $S_{四边形AMFE}$ □20．

【详解】

（1）因为 ABC是等腰直角三角形，所以 AB □AC， □BAC □90□□□DAE， 所以 □BAD □□CAE，因为 AD □AE，所以 ABD≌ ACE，所以 □ABD □□ACF，所以 □BFC □□BAC □90□．

△ △ △




（2）因为 AD □AE， □DAE □90□，所以 □AED □45□□□ACG，所以 □CAE □□CGE，

由（1）知：□BAD □□CAE，所以 □BAD □□CGD，

设 □BAD □2□□□CGD， 所以 □BGD □180□ 2□， 所以 □BAD □□BGD □180□，

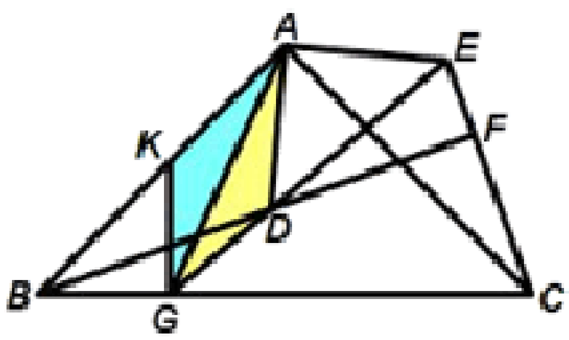
所以 □ABG□ □ADG □180□， 因为 AG平分 □BAD，所以 □BAG □□DAG □□，

在 AB上截取 AK □AD，连接 KG，

因为 AG □AG，所以 AKG≌ ADG，所以 □AKG □□ADG，DG □KG，

因为 □BKG □□AKG □180□，所以 □BKG □□KBG，

所以 GB □GK □DG，△所以 □DBG □□BDG □□EDF □□， 因为 □CAE □□BAD □2□，所以 □CAE □2□EDF ．




（3）由（2）知：□BAG □□DBG □□， 因为 □BAC □90□， □ABC □45□， 所以 □ABN □45□ □，

因为 □BAD □2□， 所以 □ADN □45□ □， 因为 □DAN □90□ 2□， 所以 □AND □45□ □□□ADN， 所以AD □AN， 因为 AD □AE， 所以 AE □AN，

作BF、CE垂线，垂足分别为R、T，连接AF，

因为□ACE □□ABD □45□ □， □CAE □2□, 所以□AET □45□ □□□ANR,

因为AE □AN，所以 ANR≌ AET，所以AR □AT，所以FA平分□BFT，

所以□AFN □□AFE □45□, 因为□AMN □45□, 所以□AFM □□AMF，所以

AF □AM，

所以FR □MR，因为 DR □RN，所以DM □FN，过点H作HP □FM，垂足为P，

因为□AMN □45□, □DHM □90□, 所以□MHP □□DHP □□HDP □45□, 所以

HP □PM □DP，

设DP □x，所以DM □FN □2x，设DR □y，所以DN □2y，所以MR □2x □y，因为□MAR □45□,

所以AR □MR □2x □y，所以 $S_{□ADN}$ □$S_{□DHN}$ □$\frac{1}{2}$□DN □AR□$\frac{1}{2}$DN □HP

□y □x □y □□6，

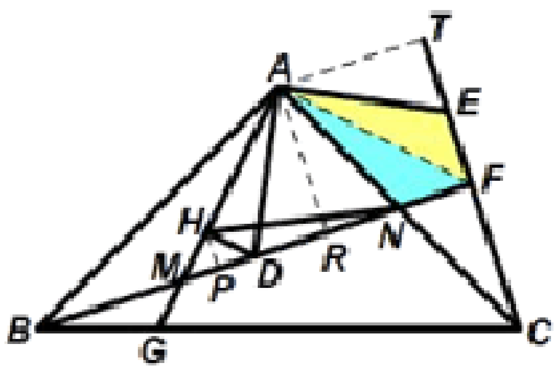
因为DF □2x □2y □6，所以x □y □3，所以y □2， x □1，

因为AF □AF， □ANF □□AEF，所以 AEF≌ ANF，所以FN □EF，因为

AR □AT，

所以 $S_{□AEF}$ □$S_{□ANF}$ □$S_{□ADM}$，因为 $S_{□ADM}$ □$\frac{1}{2}$□DM□AR □4，

所以 $S_{四边形AMFE}$ □$S_{□ADM}$ □$S_{□ADN}$ □$S_{□ANF}$ □$S_{□AEF}$ □20.




【点睛】

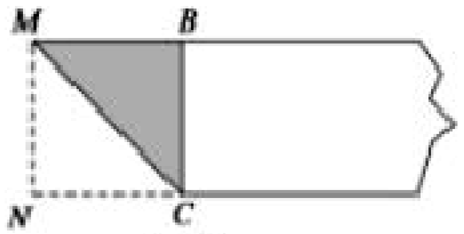
本题是三角形综合题，考查了等腰三角形的性质、三角形内角和定理、全等三角形的判定和性质等知识点，解题的难点在于学会添加常用辅助线，构造三角形全等解决问题，属于中考压轴题.

8．再读教材:

宽与长的比是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$(约为 0.618)的矩形叫做黄金矩形，黄金矩形给我们以协调,匀称的美感.世界各国许多著名的建筑.为取得最佳的视觉效果,都采用了黄金矩形的设计，下面我们用宽为 2 的矩形纸片折叠黄金矩形. (提示; MN=2)

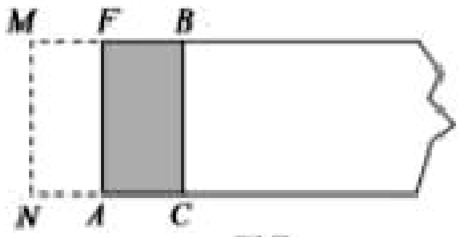
第一步,在矩形纸片一端.利用图①的方法折出一个正方形,然后把纸片展平.

把这个正方形折成两个相等的矩形,再把纸片展平.



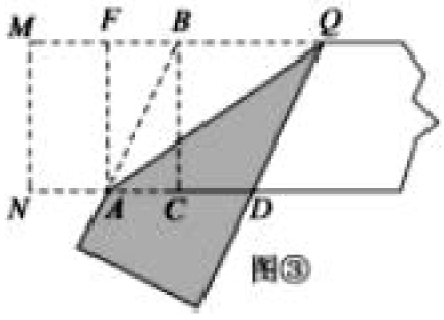


图①



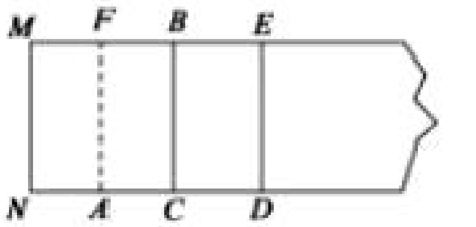


图②





图③





图④

第三步,折出内侧矩形的对角线 AB,并把 AB 折到图③中所示的 AD 处,

第四步,展平纸片,按照所得的点 D 折出 DE,使 DE⊥ND,则图④中就会出现黄金矩形,

问题解决:

1）图③中 AB=________(保留根号);

（2）如图③,判断四边形 BADQ 的形状,并说明理由;

（3）请写出图④中所有的黄金矩形,并选择其中一个说明理由.

（4）结合图④.请在矩形 BCDE 中添加一条线段,设计一个新的黄金矩形,用字母表示出来,并写出它的长和宽.

【答案】（1）$\sqrt{5}$；(2) 见解析; (3) 见解析; (4) 见解析.

【解析】

分析:（1）由勾股定理计算即可;

（2）根据菱形的判定方法即可判断;

（3）根据黄金矩形的定义即可判断;

（4）如图④－1 中，在矩形　　上添加线段 GH，使得四边形 GCDH 为正方形，此时四边形 BGHE 为所求是黄金矩形.

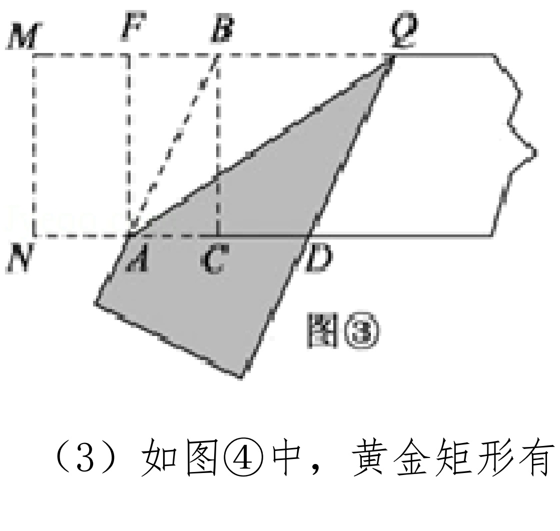
详解:（1）如图 3 中．在 Rt ABC 中，$AB=\sqrt{\quad{}^{2}\ BC^{2}}=\sqrt{1^{2}\ \square 2^{2}}=\sqrt{5}$．

故答案为 $\sqrt{5}$．

（2）结论：四边形 BADQ 是菱形．理由如下：

如图③中，∵四边形 ACBF 是矩形，∴BQ∥AD.

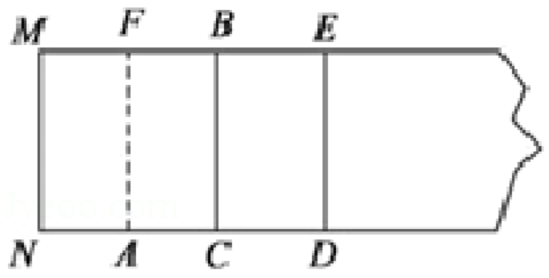
∵AB∥DQ，∴四边形 ABQD 是平行四边形，由翻折可知：AB=AD，∴四边形 ABQD 是菱形．





图③

（3）如图④中，黄金矩形有矩形 BCDE，矩形 MNDE



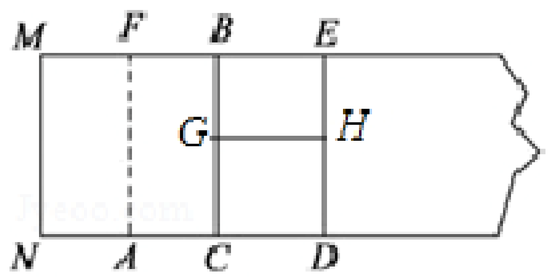
图④

∵AD=$\sqrt{5}$．AN=AC=1，CD=AD−AC=$\sqrt{5}$－1.

∵BC=2，∴ $\frac{CD}{BC}=\frac{\sqrt{5}\square}{2}$，∴矩形 BCDE是黄金矩形.

∵ $\frac{MN}{DN}=\frac{2}{1\square\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}\square}{2}$，∴矩形 MNDE是黄金矩形.

（4）如图④－1 中，在矩形 BCDE上添加线段 GH，使得四边形 GCDH为正方形，此时四边形 BGHE为所求是黄金矩形.

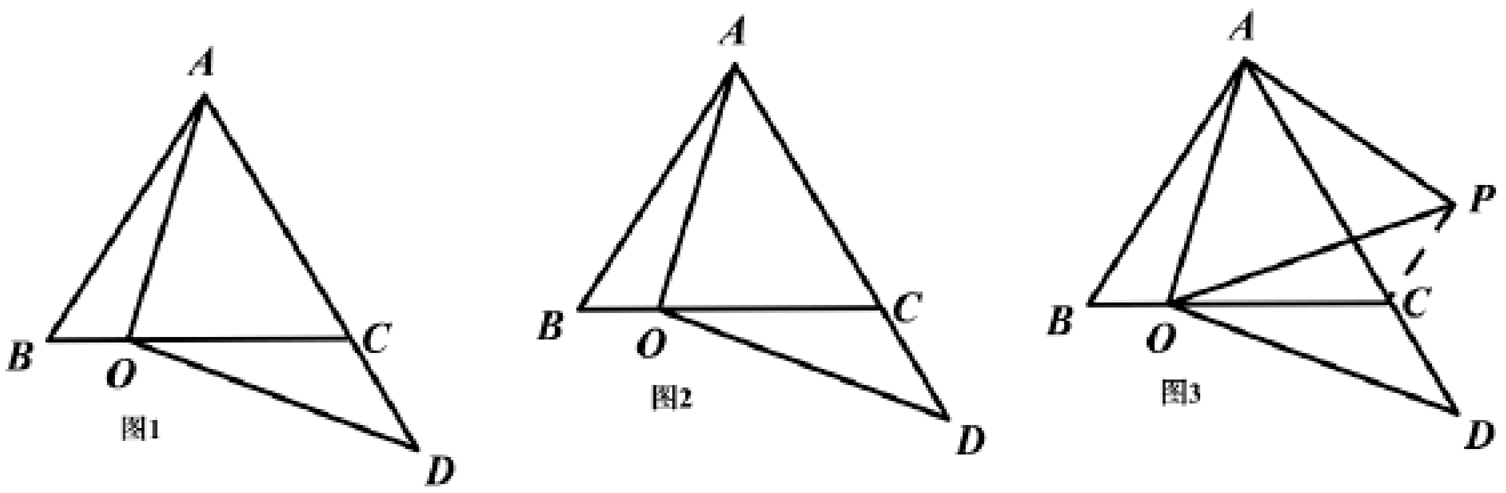


图④ -1

长 GH=$\sqrt{5}$－1，宽 HE=3－$\sqrt{5}$．

点睛：本题考查了几何变换综合题、黄金矩形的定义、勾股定理、翻折变换等知识，解题的关键是理解题意，灵活运用所学知识解决问题，属于中考创新题目.

9．在等边$\square ABC$中，点$O$在$BC$边上，点$D$在$AC$的延长线上且$OA\square OD$．




（1）如图 1，若点$O$为$BC$中点，求$\square COD$的度数；

（2）如图 2，若点$O$为$BC$上任意一点，求证$AD\square AB\square BO$.

（3）如图 3，若点$O$为$BC$上任意一点，点$D$关于直线$BC$的对称点为点$P$，连接$AP,OP$，请判断$\square AOP$的形状，并说明理由.

【答案】（1）30°；（2）见解析；（3）$\square AOP$是等边三角形，理由见解析.

【解析】

【分析】

（1）根据三角形的等边三角形的性质可求□CAO □$\frac{1}{2}$□BAC □30□且

AO □BC,□AOC □90□, 根据 OA □OD，等腰三角形的性质得到□D 的度数，再通过内角和定理求□AOD，即可求出□COD 的度数.

（2）过 O 作 OE //AB，OE 交 AD 于 E 先证明□COE 为等边三角形，再根据等边三角形的性质求□AEO □120□, □DCO □120□, 再证明□AOE □□DOC (AAS)，得到 CD □EA，再通过证明得到 EA □BO 、AB □AC 通过，又因为 AD □AC □CD，通过等量代换即可得到答案.

（3）通过作辅助线先证明□ODF □□OPF (SAS)，得到 OP □OD，又因为 OA □OD，得到 AO=OP，证得□AOP 为等腰三角形，如解析辅助线，由（2）可知得□AOE □□DOC 得到□AOE □□DOC ,通过角的关系得到□AOP □□COE □60°，即可证得□AOP 是等边三角形.

【详解】

（1）∵ □ABC 为等边三角形

∴ □BAC □60□

∵ O 为 BC 中点

∴ □CAO □$\frac{1}{2}$□BAC □30□

且 AO □BC,□AOC □90□

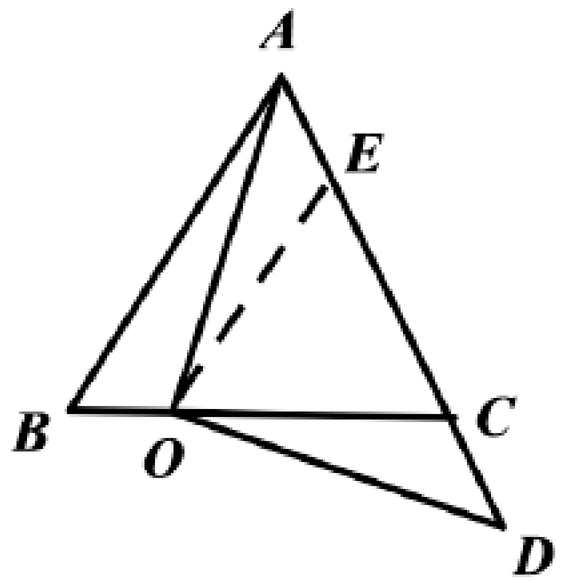
∵ OA □OD

∴ □AOD 中，□D □□CAO □30□

∴ □AOD □180□ □D□ □CAO □120□

∴ □COD □□AOD □ □AOC □30□

（2）过 O 作 OE //AB，OE 交 AD 于 E




∵ OE //AB

∴ □EOC □□ABC □60□

□CEO □□CAB □60□

∴ □COE 为等边三角形

∴ OE □OC □CE

$\angle AEO = 180^\circ - \angle CEO = 120^\circ$

$\angle DCO = 180^\circ - \angle ACB = 120^\circ$

又∵$OA = OD$

∴$\angle EAO = \angle CDO$

在$\triangle AOE$和$\triangle COD$中

$$\begin{cases} \angle AOE = \angle DOC \\ \angle EAO = \angle CDO \\ OA = OD \end{cases}$$

∴$\triangle AOE \cong \triangle DOC$ (AAS)

∴$CD = EA$

∵$EA = AC - CE$

$BO = BC - CO$

∴$EA = BO$

∴$BO = CD$,

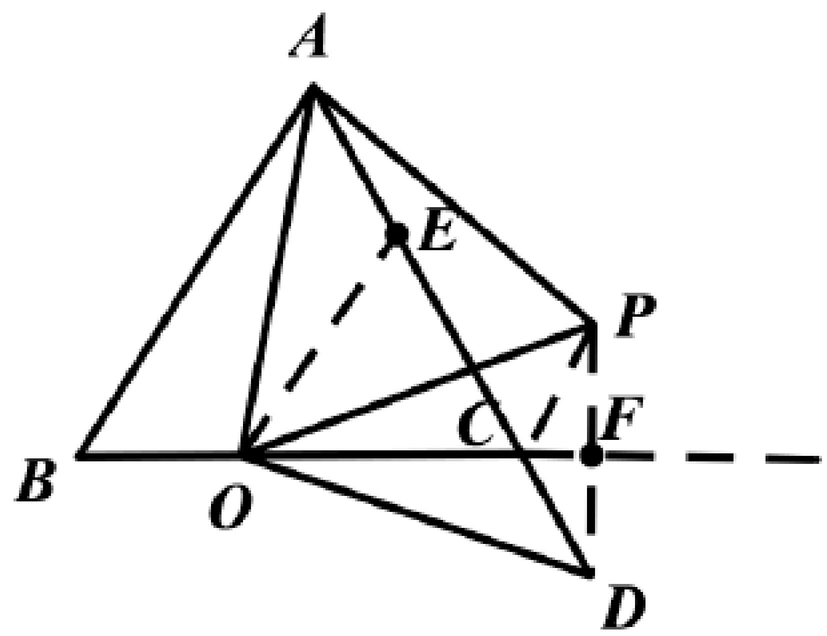
∵$AB = AC$, $AD = AC + CD$

∴$AD = AB + BO$

（3）$\triangle AOP$为等边三角形

证明过程如下：

连接$PC$,$PD$，延长$OC$交$PD$于$F$




∵P、D关于OC对称

∴$PF = DF$, $\angle PFO = \angle DFO = 90^\circ$

在$\triangle ODF$与$\triangle OPF$中，

$$\begin{cases} PF = DF \\ \angle PFO = \angle DFO \\ OF = OF \end{cases}$$

∴$\triangle ODF \cong \triangle OPF$ (SAS)

∴$OP = OD$, $\angle POC = \angle DOC$