专题 9.8　四边形中的折叠问题专项训练（30 道）

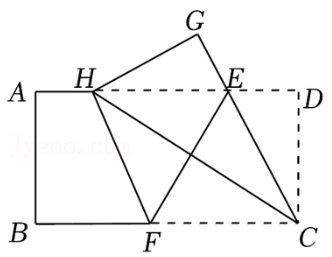
【苏科版】

考卷信息：

本套训练卷共 30 题，选择 10 题，填空 10 题，解答 10 题，题型针对性较高，覆盖面广，选题有深度，可加强学生对折叠问题的理解！

一．选择题（共 10 小题）

1．（2022•绥化一模）如图，在一张矩形纸片 $ABCD$ 中 $AB=4$，$BC=8$，点 E，F 分别在 AD，BC 上，将纸片 $ABCD$ 沿直线 EF 折叠，点 C 落在 AD 上的点 H 处，点 D 落在点 G 处，连接 CE，CH．有以下四个结论：①四边形 $CFHE$ 是菱形；②CE 平分 $\angle DCH$；③线段 BF 的取值范围为 $3\leqslant BF\leqslant 4$；④当点 H 与点 A 重合时，$EF=5$．以上结论中，其中正确结论的个数有（　　）



A．1 个　　　　B．2 个　　　　C．3 个　　　　D．4 个

【分析】①先判断出四边形 $CFHE$ 是平行四边形，再根据翻折的性质可得 $CF=FH$，然后根据邻边相等的平行四边形是菱形证明，判断出①正确；

②根据菱形的对角线平分一组对角线可得 $\angle BCH=\angle ECH$，然后求出只有 $\angle DCE=30°$ 时 EC 平分 $\angle DCH$，判断出②错误；

③点 H 与点 A 重合时，设 $BF=x$，表示出 $AF=FC=8-x$，利用勾股定理列出方程求解得到 BF 的最小值，点 G 与点 D 重合时，$CF=CD$，求出 $BF=4$，然后写出 BF 的取值范围，判断出③正确；

④过点 F 作 $FM\perp AD$ 于 M，求出 ME，再利用勾股定理列式求解得到 EF，判断出④错误．

【解答】解：①∵FH 与 EG，EH 与 CF 都是原来矩形 $ABCD$ 的对边 AD、BC 的一部分，

∴$FH\parallel CG$，$EH\parallel CF$，

∴四边形 $CFHE$ 是平行四边形，

由翻折的性质得，$CF=FH$，

∴四边形 $CFHE$ 是菱形，故①正确；

②∵四边形 $CFHE$ 是菱形，

∴$\angle BCH=\angle ECH$，

∴只有$\angle DCE=30^\circ$时EC平分$\angle DCH$，故②错误；

③点H与点A重合时，设$BF=x$，则$AF=FC=8-x$，

在Rt$\triangle ABF$中，$AB^2+BF^2=AF^2$，

即$4^2+x^2=(8-x)^2$，

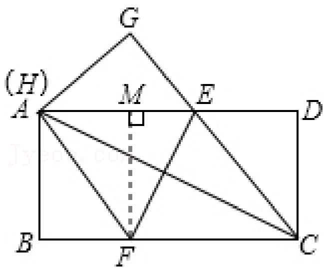
解得$x=3$，

点G与点D重合时，$CF=CD=4$，

∴$BF=4$，

∴线段BF的取值范围为$3\leqslant BF\leqslant 4$，故③正确；

④如图，过点F作$FM\perp AD$于M，



则$ME=(8-3)-3=2$，

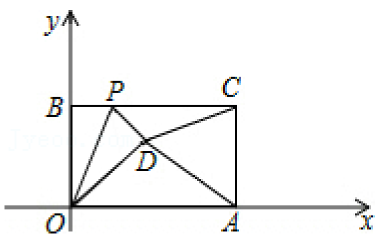
由勾股定理得，

$EF=\sqrt{MF^2+ME^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，故④错误．

综上所述，结论正确的有①③，共2个．

故选：B．

2．（2022•沿河县二模）如图，已知一个矩形纸片$OACB$，将该纸片放置在平面直角坐标系中，点A（10，0），点B（0，6），点P为BC边上的动点，将$\triangle OBP$沿OP折叠得到$\triangle OPD$，连接CD、AD．则下列结论中：①当$\angle BOP=45^\circ$时，四边形$OBPD$为正方形；②当$\angle BOP=30^\circ$时，$\triangle OAD$的面积为15；③当P在运动过程中，CD的最小值为$2\sqrt{34}-6$；④当$OD\perp AD$时，$BP=2$．其中结论正确的有（　　）



A．1个　　　　B．2个　　　　C．3个　　　　D．4个

【分析】①由矩形的性质得到$\angle OBC=90°$，根据折叠的性质得到$OB=OD$，$\angle PDO=\angle OBP=90°$，$\angle BOP=\angle DOP$，推出四边形$OBPD$是矩形，根据正方形的判定定理即可得到四边形$OBPD$为正方形；故①正确；

②过D作$DH\perp OA$于H，得到$OA=10$，$OB=6$，根据直角三角形的性质得到$DH=\frac{1}{2}OD=3$，根据三角形的面积公式得到$\triangle OAD$的面积为$\frac{1}{2}OA\cdot DH=\frac{1}{2}\times3\times10=15$，故②正确；

③连接OC，于是得到$OD+CD\geqslant OC$，即当$OD+CD=OC$时，CD取最小值，根据勾股定理得到CD的最小值为$2\sqrt{34}-6$；故③正确；

④根据已知条件推出P，D，A三点共线，根据平行线的性质得到$\angle OPB=\angle POA$，等量代换得到$\angle OPA=\angle POA$，求得$AP=OA=10$，根据勾股定理得到$BP=BC-CP=10-8=2$，故④正确．

【解答】解：①∵四边形$OACB$是矩形，

∴$\angle OBC=90°$，

∵将$\triangle OBP$沿OP折叠得到$\triangle OPD$，

∴$OB=OD$，$\angle PDO=\angle OBP=90°$，$\angle BOP=\angle DOP$，

∵$\angle BOP=45°$，

∴$\angle DOP=\angle BOP=45°$，

∴$\angle BOD=90°$，

∴$\angle BOD=\angle OBP=\angle ODP=90°$，

∴四边形$OBPD$是矩形，

∵$OB=OD$，

∴四边形$OBPD$为正方形；故①正确；

②过D作$DH\perp OA$于H，

∵点A（10，0），点B（0，6），

∴$OA=10$，$OB=6$，

∴$OD=OB=6$，$\angle BOP=\angle DOP=30°$，

∴$\angle DOA=30°$，

∴$DH=\frac{1}{2}OD=3$，

∴$\triangle OAD$的面积为$\frac{1}{2}OA\cdot DH=\frac{1}{2}\times3\times10=15$，故②正确；

③连接OC，

则 $OD+CD \geqslant OC$，

即当 $OD+CD=OC$ 时，CD 取最小值，

∵$AC=OB=6$，$OA=10$，

∴$OC=\sqrt{OA^2+AC^2}=\sqrt{10^2+6^2}=2\sqrt{34}$，

∴$CD=OC-OD=2\sqrt{34}-6$，

即 CD 的最小值为 $2\sqrt{34}-6$；故③正确；

④∵$OD \perp AD$，

∴$\angle ADO=90°$，

∵$\angle ODP=\angle OBP=90°$，

∴$\angle ADP=180°$，

∴P，D，A 三点共线，

∵$OA // CB$，

∴$\angle OPB=\angle POA$，

∵$\angle OPB=\angle OPD$，

∴$\angle OPA=\angle POA$，

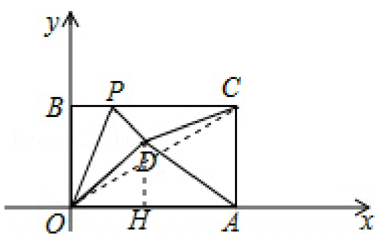
∴$AP=OA=10$，

∵$AC=6$，

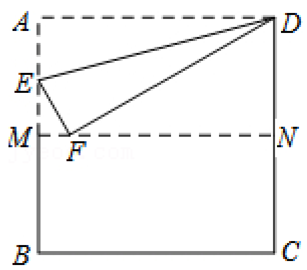
∴$CP=\sqrt{10^2-6^2}=8$，

∴$BP=BC-CP=10-8=2$，故④正确；

故选：D.



3．（2022 春•溧阳市期末）如图，把正方形纸片 $ABCD$ 沿对边中点所在直线折叠后展开，折痕为 MN；再过点 D 折叠，使得点 A 落在 MN 上的点 F 处，折痕为 DE，则$\frac{EM}{FN}$的值是（　　）



A．$\sqrt{3}$　　B．$\sqrt{3}-1$　　C．$2-\sqrt{3}$　　D．$3-\sqrt{3}$

【分析】设正方形纸片 $ABCD$ 的边长为 $2a$，由折叠的性质与正方形的性质可得 $AM=BM=DN=NC=a$，$AD=DF=MN=2a$，$AE=EF$，$\angle EMF=\angle DNF=90°$，由勾股定理可求 FN 的长，进而可求 FM 的长，设 $AE=EF=x$，再利用勾股定理可求 x，得到 EM 的长，代入$\frac{EM}{FN}$，计算即可．

【解答】解：设正方形纸片 $ABCD$ 的边长为 $2a$．

由题意可知：$AM=BM=DN=NC=a$，$AD=DF=MN=2a$，$AE=EF$，$\angle EMF=\angle DNF=90°$，

$\therefore FN=\sqrt{DF^2-DN^2}=\sqrt{(2a)^2-a^2}=\sqrt{3}a$，

$\therefore FM=MN-FN=(2-\sqrt{3})a$．

设 $AE=EF=x$，则 $EM=AM-AE=a-x$．

在 Rt△EMF 中，$\because EM^2+MF^2=EF^2$，

$\therefore (a-x)^2+[(2-\sqrt{3})a]^2=x^2$，

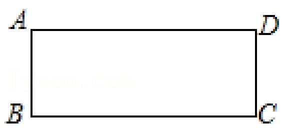
$\therefore x=(4-2\sqrt{3})a$，

$\therefore EM=a-(4-2\sqrt{3})a=(2\sqrt{3}-3)a$，

$\therefore \frac{EM}{FN}=\frac{(2\sqrt{3}-3)a}{\sqrt{3}a}=2-\sqrt{3}$．

故选：C．

4．（2022•衢州模拟）如图矩形 $ABCD$ 纸片，我们按如下步骤操作：（1）以过点 A 的直线为折痕，折叠纸片，使点 B 落在 AD 上，折痕与 BC 交于点 E；（2）将纸片展开后，再次折叠纸片，以过点 E 所在的直线为折痕，使点 A 落在 BC 或 BC 的延长线上，折痕 EF 交直线 AD 或直线 AB 于 F，则 $\angle AFE$ 的值为(　　)



A．22.5°　　B．67.5°

C．22.5° 或 67.5°　　D．45° 或 135°

【分析】可动手操作，观察折叠得到的图形及展开图，确定折线的位置，然后进一步求解．

【解答】解：以过点 A 的直线为折痕，折叠纸片，使点 B 落在 AD 上，折痕与 BC 交于点 E，实际上是折成一个正方形；

①将纸片展开后，再次折叠纸片，以过点 E 所在的直线为折痕，使点 A 落在 BC 或 BC 的延长线上，折痕 EF 交直线 AD 于 F，$\angle AEC=45°+90°=135°$．

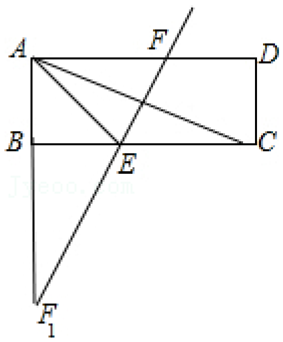
所以，$\angle AFE=\angle FEC=\frac{1}{2}\angle AEC=67.5°$；

②交 AB 的延长线交于一点 F_1 时，

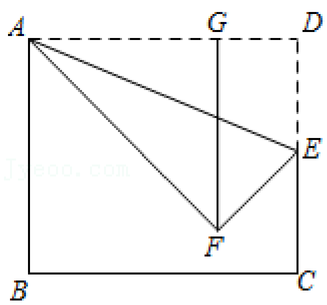
$\angle BEF=\angle MEC=67.5°$，

$\therefore \angle AFE=90°-\angle BEF=22.5°$，

故选：C．



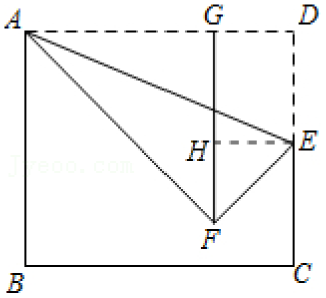
5．（2022•嘉兴二模）如图，矩形纸片 $ABCD$ 中，$AD=6$，E 是 CD 上一点，连结 AE，$\triangle ADE$ 沿直线 AE 翻折后点 D 落到点 F，过点 F 作 $FG\perp AD$，垂足为 G．若 $AD=3GD$，则 DE 的值为（　　）



A．$\sqrt{5}$　　B．$\frac{5}{2}$　　C．$\frac{6\sqrt{5}}{5}$　　D．$\frac{5\sqrt{3}}{3}$

【分析】过点 E 作 $EH\perp FG$，易得四边形 $GHED$ 为矩形，则 $GH=DE$，$HE=GD$；由已知可得：$GD=2$，$AG=4$，利用勾股定理可求 $FG=2\sqrt{5}$；设 $DE=x$，则 $GH=EF=x$，$HF=2\sqrt{5}-x$，在 Rt$\triangle HEF$ 中，由勾股定理列出方程，解方程可求 DE．

【解答】解：过点 E 作 $EH\perp FG$，交 FG 于点 H，如图，



由题意：$\triangle AEF\cong\triangle AED$，则 $AF=AD=6$，$DE=EF$.

∵$AD=6$，$AD=3GD$，

∴$GD=2$.

∴$AG=AD-DG=6-2=4$.

∵$FG\perp AD$，

∴$FG=\sqrt{AF^2-AG^2}=\sqrt{6^2-4^2}=2\sqrt{5}$.

∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴$\angle D=90°$，

∵$FG\perp AD$，$EH\perp FG$，

∴四边形 $GHED$ 为矩形.

∴$GH=DE$，$HE=GD=2$.

设 $DE=x$，则 $GH=EF=x$，$HF=2\sqrt{5}-x$，

在 Rt$\triangle HEF$ 中，

∵$HF^2+HE^2=EF^2$，

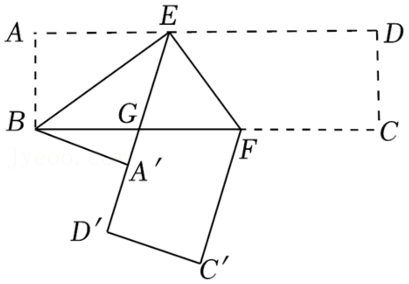
∴$(2\sqrt{5}-x)^2+2^2=x^2$.

解得：$x=\frac{6\sqrt{5}}{5}$.

∴$DE=\frac{6\sqrt{5}}{5}$.

故选：C.

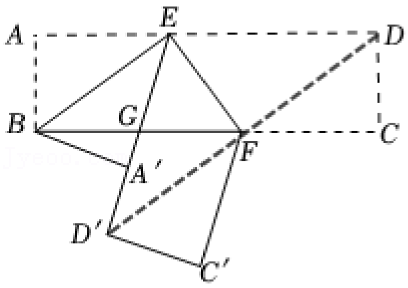
6．（2022 春•宝安区期末）如图，在长方形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$AB\parallel CD$，E 在 AD 上．$AD=m$，$AE=n$（$m>n>0$）．将长方形沿着 BE 折叠，A 落在 A' 处，$A'E$ 交 BC 于点 G，再将$\angle A'ED$ 对折，点 D 落在直线 $A'E$ 上的 D' 处，C 落在 C' 处，折痕 EF，F 在 BC 上，若 D、F、D' 三点共线，则 $BF=$（　　）



A．$m+\frac{1}{2}n$　　B．$\frac{m-n}{2}$　　C．$\frac{m+n}{2}$　　D．$m-n$

【分析】连接 DD'，证明∠EFD 是直角，然后证明△BEF 和△EFE 全等即可得出结论．

【解答】解：如图，



连接 DD'，

∵D、F、D' 三点共线，四边形 $EFC'D'$ 是由四边形 $EFCD$ 翻折得到，

∴△EFD≌△EFD'，∠DEF＝∠$D'EF$，

∴∠EFD＝90°，

∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴AD∥BC，

∴∠DEF＝∠BFE，

∵∠AEB＝∠$A'EB$，

∴∠BEF＝90°，

在△BEF 和△DFE 中，

$$\begin{cases}\angle DEF=\angle BFE,\\ EF=EF\\ \angle BEF=\angle EFD\end{cases},$$

∴△BEF≌△DFE（ASA），

∴BF＝ED，

∵AD＝m，AE＝n，

∴BF＝ED＝$m-n$．

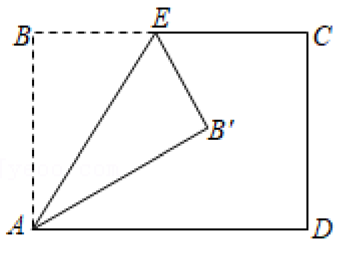
故选：D．

7．（2022春•普洱期末）有一张长方形纸片 $ABCD$，按下面步骤进行折叠：

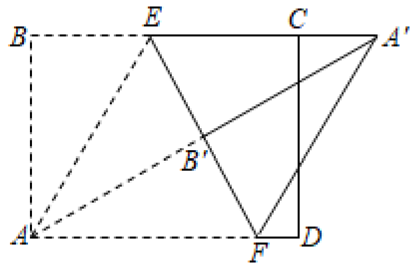
第一步：如图①，点 E 在边 BC 上，沿 AE 折叠，点 B 落在点 B'处；

第二步：如图②，沿 EB'折叠，使点 A 落在 BC 延长线上的点 A'处，折痕为 EF．

下列结论中错误的是（　　）



图①



图②

A．$\triangle AEF$ 是等边三角形　　B．EF 垂直平分 AA'

C．$CA'=FD$　　D．$EA'=AF$

【分析】根据翻折性质和矩形性质可得$\angle BEA=\angle EAF=\angle EFA=60°$，由此判断选项 A；根据翻折性质可判断 选项 D；根据菱形的判定与性质可判断选项 B；由于 AB、BC 的长度不确定，可判断选项 C．

【解答】解：$\because \angle BEA=\angle AEF=\angle A'EF$，$\angle BEA+\angle AEF+\angle A'EF=180°$，

$\therefore \angle BEA=\angle AEF=\angle A'EF=60°$，

$\because BC/\!/AD$，

$\therefore \angle BEA=\angle EAF=60°$，

$\therefore \angle BEA=\angle EAF=\angle EFA=60°$，

$\therefore \triangle AEF$ 是等边三角形，故 A 正确，

$\therefore \triangle EFA'$ 是等边三角形，

$\therefore AE=EA'=A'F=AF$，故 D 正确，

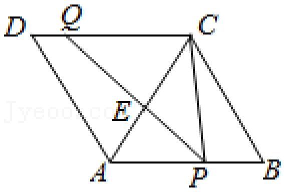
$\therefore$四边形 $AEA'F$ 是菱形，

$\therefore EF$ 垂直平分 AA'，故 B 正确，

由于 AB、BC 的长度不确定，所以 AC 不一定等于 DF，故 C 错误．

故选：C．

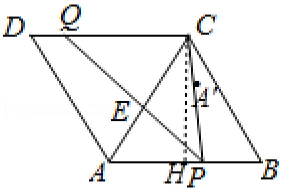
8．（2022•槐荫区二模）如图，菱形 $ABCD$ 的边 $AB=8$，$\angle B=60°$，P 是 AB 上一点，$BP=3$，Q 是 CD 边上一动点，将四边形 $APQD$ 沿直线 PQ 折叠，A 的对应点 A'．当 CA' 的长度最小时，CQ 的长为（　　）



A．5　　　　　　　B．7　　　　　　　C．8　　　　　　　D．6.5

【分析】作 $CH\perp AB$ 于 H，如图，根据菱形的性质可判断△ABC 为等边三角形，则 $CH=\frac{\sqrt{3}}{2}AB=4\sqrt{3}$，$AH=BH=4$，在 Rt△$CHP$ 中，利用勾股定理计算出 $CP=7$，再根据折叠的性质得点 A' 在以 P 点为圆心，PA 为半径的弧上，利用点与圆的位置关系得到当点 A' 在 PC 上时，CA' 的值最小，然后证明 $CQ=CP$ 即可．

【解答】解：作 $CH\perp AB$ 于 H，如图，



∵菱形 $ABCD$ 的边 $AB=8$，$\angle B=60°$，

∴△ABC 为等边三角形，

∴$CH=\frac{\sqrt{3}}{2}AB=4\sqrt{3}$，$AH=BH=4$，

∵$PB=3$，

∴$HP=1$，

在 Rt△CHP 中，$CP=\sqrt{CH^2+HP^2}=\sqrt{48+1}=7$，

∵梯形 $APQD$ 沿直线 PQ 折叠，A 的对应点 A'，

∴点 A' 在以 P 点为圆心，PA 为半径的弧上，

∴当点 A' 在 PC 上时，CA' 的值最小，

∴$\angle APQ=\angle CPQ$，而 $CD\parallel AB$，

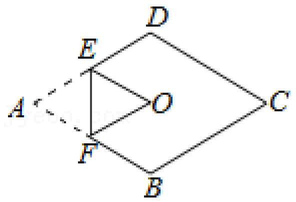
∴$\angle APQ=\angle CQP$，

∴$\angle CQP=\angle CPQ$，

∴$CQ=CP=7$．

故选：B．

9．（2022 春•泰兴市月考）如图，将菱形纸片 $ABCD$ 折叠，使点 A 恰好落在菱形的对称中心 O 处，折痕为 EF．若菱形 $ABCD$ 的边长为 8，$\angle B=120°$，则 EF 的值是（　　）



A．$2\sqrt{3}$　　　　B．4　　　　C．$4\sqrt{3}$　　　　D．6

【分析】连接 AC，BD．证明△ABD 是等边三角形，推出 $BD=AB=8$，再证明 EF 是△ABD 的中位线，可得结论．

【解答】解：如图所示，连接 AC，BD．

∵四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴$AB=AD=CD=BC$，$AC\perp BD$，$\angle ABD=\angle CBD=\frac{1}{2}\angle ABC=60^{\circ}$，

∴△ABD 是等边三角形，

∴$BD=AB=8$，

∵A 沿 EF 折叠与 O 重合，

∴$EF\perp AC$，EF 平分 AO，

∵$AC\perp BD$，

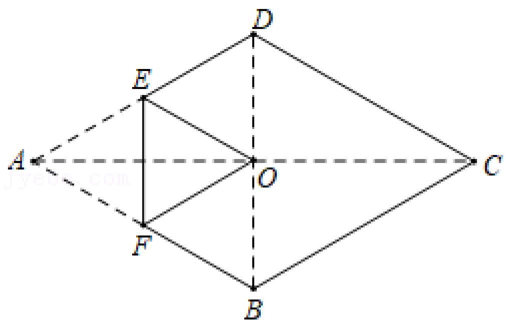
∴$EF/\!/BD$，

∴E、F 分别为 AB、AD 的中点，

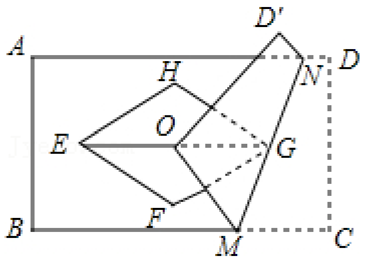
∴EF 为△ABD 的中位线，

∴$EF=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}\times 8=4$，

故选：B．



10．（2022•资阳）如图，矩形 $ABCD$ 与菱形 $EFGH$ 的对角线均交于点 O，且 $EG/\!/BC$，将矩形折叠，使点 C 与点 O 重合，折痕 MN 恰好过点 G 若 $AB=\sqrt{6}$，$EF=2$，$\angle H=120^{\circ}$，则 DN 的长为（　　）



A．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{2}$　　C．$\sqrt{6}-\sqrt{3}$　　D．$2\sqrt{3}-\sqrt{6}$

【分析】延长 EG 交 DC 于 P 点，连接 GC、FH，则△GCP 为直角三角形，证明四边形 $OGCM$ 为菱形，则可证 $CG=OM=CM=OG=\sqrt{3}$，由勾股定理求得 GP 的值，再由梯形的中位线定理 $CM+DN=2GP$，即可得出答案.

【解答】解：延长 EG 交 DC 于 P 点，连接 GC、FH；如图所示：

则 $CP=DP=\frac{1}{2}CD=\frac{\sqrt{6}}{2}$，△$GCP$ 为直角三角形，

∵四边形 $EFGH$ 是菱形，$\angle EHG=120°$，

∴$GH=EF=2$，$\angle OHG=60°$，$EG\perp FH$，

∴$OG=GH\cdot\sin60°=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，

由折叠的性质得：$CG=OG=\sqrt{3}$，$OM=CM$，$\angle MOG=\angle MCG$，

∴$PG=\sqrt{CG^2-CP^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

∵$OG/\!/CM$，

∴$\angle MOG+\angle OMC=180°$，

∴$\angle MCG+\angle OMC=180°$，

∴$OM/\!/CG$，

∴四边形 $OGCM$ 为平行四边形，

∵$OM=CM$，

∴四边形 $OGCM$ 为菱形，

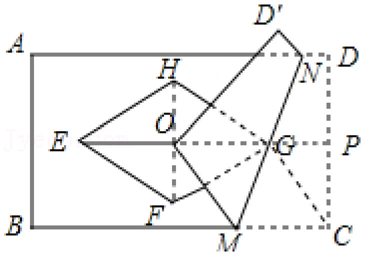
∴$CM=OG=\sqrt{3}$，

根据题意得：PG 是梯形 $MCDN$ 的中位线，

∴$DN+CM=2PG=\sqrt{6}$，

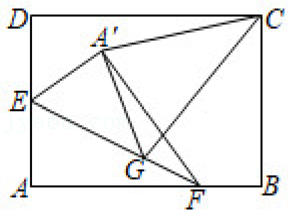
∴$DN=\sqrt{6}-\sqrt{3}$；

故选：C.



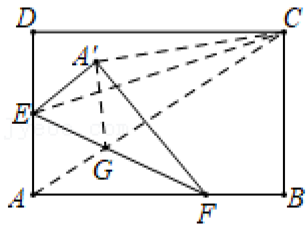
二．填空题（共 10 小题）

11．（2022•成华区模拟）如图，在矩形纸片 $ABCD$ 中，$AB=8$，$BC=6$，点 E 是 AD 的中点，点 F 是 AB 上一动点．将△AEF 沿直线 EF 折叠，点 A 落在点 A'处．在 EF 上任取一点 G，连接 GC，GA'，CA'，则△CGA'的周长的最小值为 ___$7+\sqrt{73}$___．



【分析】如图，当点 F 固定时，连接 AC 交 EF 于 G，连接 $A'G$，此时△CGA'的周长最小，最小值＝$A'G+GC+CA'=GA+GC+CA'=AC+CA'$．当 CA'最小时，△CGA'的周长最小，求出 CA'的最小值即可解决问题．

【解答】解：如图，当点 F 固定时，连接 AC 交 EF 于 G，连接 $A'G$，此时△$A'GC$ 的周长最小，最小值＝$A'G+GC+CA'=GA+GC+CA'=AC+CA'$．



∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴$\angle D=90°$，$AD=BC=6$，$CD=AB=8$，

∴$AC=\sqrt{AD^2+DC^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$，

∴△$A'CG$ 的周长的最小值＝$10+CA'$，

当 CA'最小时，△CGA'的周长最小，

∵$AE=DE=EA'=3$，

∴$CE=\sqrt{DE^2+CD^2}=\sqrt{3^2+8^2}=\sqrt{73}$，

∵$CA'\geqslant EC-EA'$，

∴$CA'\geq\sqrt{73}-3$，

∴CA' 的最小值为$\sqrt{73}-3$，

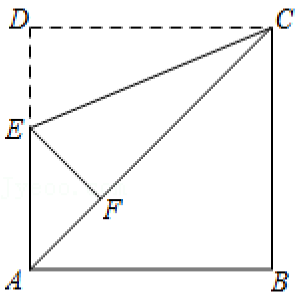
∴△CGA' 的周长的最小值为 $7+\sqrt{73}$，

故答案为：$7+\sqrt{73}$.

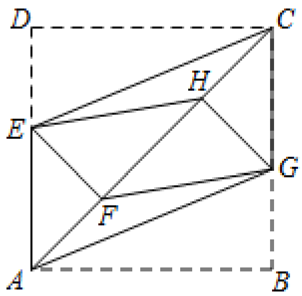
12. （2022•安徽二模）如图（1），四边形 $ABCD$ 是正方形，点 E 是边 AD 上的点，将△CDE 沿着直线 CE 折叠，使得点 D 落在 AC 上，对应点为 F.

（1）$\frac{CD}{EF}=$ __$\sqrt{2}+1$__；

（2）如图（2），点 G 是 BC 上的点，将△ABG 沿着直线 AG 折叠，使得点 B 落在 AC 上，对应点为 H，连接 FG，EH，则$\frac{S_{正方形ABCD}}{S_{四边形EFGH}}=$ __$\frac{4+3\sqrt{2}}{2}$__.



图(1)



图(2)

【分析】（1）由正方形的性质得到$\angle CDA=90°$，再由翻折的性质得到△CDE≌△CFE，$\angle CFE=90°$，进而证明△AFE 为等腰直角三角形，设 $AF=EF=x$，解得正方形的边长为（$\sqrt{2}+1$）x，继而求解；

（2）由折叠的性质可得△CDE≌△CFE≌△ABG≌AHG，设 $AF=EF=HG=HC=x$，由（1）可知，$AB=$（$\sqrt{2}+1$）x，继而证明四边形 $EFGH$ 是平行四边形，分别解得 $S_{正方形ABCD}$，$S_{四边形EFGH}$的值即可解题.

【解答】解：（1）∵四边形 $ABCD$ 是正方形，AC 是对角线，

∴$\angle CDA=90°$，$\angle DAC=90°$，

由折叠的性质得：△CDE≌△CFE，$\angle CFE=90°$，

∴△AFE 为等腰直角三角形，$EF=AF$，

设 $AF=EF=x$，则 $AE=\sqrt{2}x$，$DE=EF=x$，

∴$CD=AD=AE+DE=$（$\sqrt{2}+1$）x，

∴$\frac{CD}{EF}=\frac{(\sqrt{2}+1)x}{x}=\sqrt{2}+1$；

故答案为：$\sqrt{2}+1$；

（2）由折叠的性质得：△CDE≌△CFE，△ABG≌AHG，$\angle DCE=\angle ECF$，$\angle GAB=\angle GAC$，

$\because \angle DCA=\angle CAB=45°$，

$\therefore \angle DCE=\angle GAB=22.5°$，

$\because AB=CD$，$\angle EDC=\angle GBA=90°$，

$\therefore \triangle CDE \cong \triangle ABG \cong \triangle AHG \cong \triangle CFE$，

$\therefore EF=HG$，

$\because \angle EFA=\angle GHC=90°$，$\angle EAF=\angle GCH$，

$\therefore \triangle EAF \cong \triangle GCH$（$AAS$），且$\triangle EAF$和$\triangle GCH$都为等腰直角三角形，

$\therefore EF=AF=HC=HG$，

设$EF=AF=HC=HG=x$，由（1）可知，$AB=(\sqrt{2}+1)x$，

$\therefore AC=\sqrt{2}AB=(2+\sqrt{2})x$，

$\therefore FH=AC-2AF=\sqrt{2}x$，

$\because \triangle AHG \cong \triangle CFE$，

$\therefore \angle EFC=\angle GHA$，

$\therefore EF \parallel HG$，

$\because EF=HG$，

$\therefore$四边形$EFGH$是平行四边形，

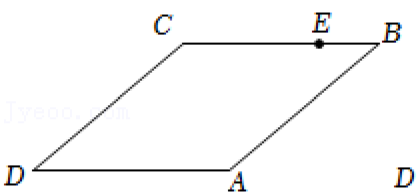
$\therefore S_{四边形EFGH}=FH \cdot HG=\sqrt{2}x^2$，

$S_{正方形ABCD}=[(\sqrt{2}+1)x]^2=(\sqrt{2}+1)^2x^2$，

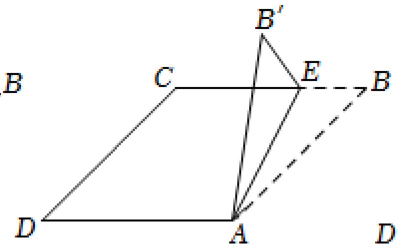
$\therefore \frac{S_{正方形ABCD}}{S_{四边形EFGH}}=\frac{(2+1)^2x^2}{\sqrt{2}x^2}=\frac{4+3\sqrt{2}}{2}$，

故答案为：$\frac{4+3\sqrt{2}}{2}$．

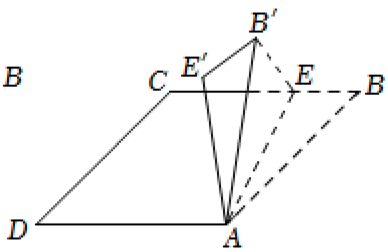
13．（2022•邓州市一模）如图（1）是一张菱形纸片，其中$\angle A=135°$，$AB=\sqrt{3}+1$，点E为BC边上一动点．如图（2），将纸片沿AE翻折，点B的对应点为B'；如图（3），将纸片再沿AB'折叠，点E的对应点为E'．当AE'与菱形的边垂直时，BE的长为__$\frac{\sqrt{6}}{3}$或$\sqrt{2}$__．



图(1)



图(2)



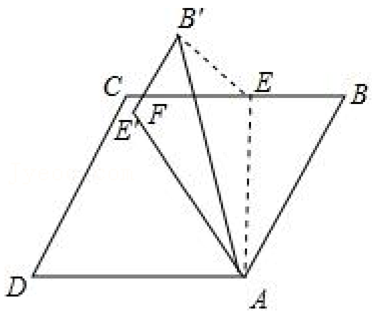
图(3)

【分析】分两种情况讨论：①当 $AE'\perp BC$ 时，设 AE'，BC 交于点 F，②当 $AE'\perp AB$ 时，过点 E 作 $EG\perp AB$ 于点 G，设 $BG=x$，则 $EG=BG=x$，然后利用含 30 度角的直角三角形即可解决问题．

【解答】解：$\because BC\parallel AD$，$\angle DAB=135°$，

$\therefore \angle B=45°$，

分两种情况讨论：①当 $AE'\perp BC$ 时，如图，



设 AE'，BC 交于点 F，

则 $\angle FAB=45°$，$FA=FB=(\sqrt{3}+1)\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$，

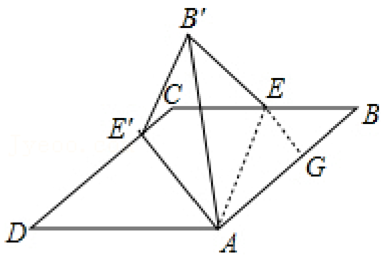
$\therefore \angle E'AB'=\angle B'AE=\angle BAE=15°$，

$\therefore \angle FAE=30°$，

$\therefore EF=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{3}=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6}$，

$\therefore BE=\frac{1}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})-\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6}=\frac{\sqrt{6}}{3}$；

②当 $AE'\perp AB$ 时，如图，



则 $\angle E'AB=90°$，

$\therefore \angle E'AB'=\angle B'AE=\angle BAE=30°$，

过点 E 作 $EG\perp AB$ 于点 G，

设 $BG=x$，则 $EG=BG=x$，

$\therefore AG=\sqrt{3}x$，

$\therefore \sqrt{3}x+x=\sqrt{3}+1$，

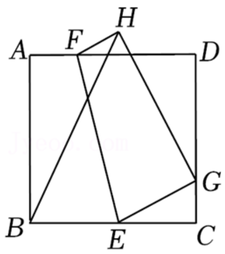
解得 $x=1$，

∴$BE=\sqrt{2}BG=\sqrt{2}$，

综上可知，BE 的长为$\frac{\sqrt{6}}{3}$或$\sqrt{2}$.

故答案为：$\frac{\sqrt{6}}{3}$或$\sqrt{2}$.

14．（2022春•成都期末）如图，在边长为2的正方形 $ABCD$ 中，点 E，F 分别是边 BC，AD 上的点，连接 EF，将四边形 $ABEF$ 沿 EF 折叠，点 B 的对应点 G 恰好落在 CD 边上，点 A 的对应点为 H，连接 BH. 则 $BH+EF$ 的最小值是 ___$2\sqrt{5}$___.



【分析】如图，过点 F 作 $FK\perp BC$ 于点 K，延长 BC 到点 M，使 $CM=BC$，连接 AM 交 CD 于点 N，连接 MG、GA、BG，由翻折可得△ABG≌△HGB（SAS），再证得△FEK≌△BGC（ASA），即可推出 $BH+EF=AG+MG$，利用三角形三边关系可得 $BH+EF\geqslant AM$，由于当点 G 与点 N 重合时，$AG+MA=AM$，此时 $AG+MA$ 的值最小，故 $BH+EF=AM$ 的值也最小，运用勾股定理即可求得答案.

【解答】解：如图，过点 F 作 $FK\perp BC$ 于点 K，延长 BC 到点 M，使 $CM=BC$，连接 AM 交 CD 于点 N，连接 MG、GA、BG，

∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴$\angle BAD=\angle ABC=\angle BCD=90°$，$AB=BC$，

∴$CD\perp BM$，

∴CD 垂直平分 BM，

∴$MG=BG$，

由翻折得 $AB=HG$，$\angle ABG=\angle HGB$，

∵$BG=GB$，

∴△ABG≌△HGB（SAS），

∴$GA=BH$，

由翻折知 $EF\perp BG$，

又∵$FK\perp BC$，

∴$\angle FKE=\angle BCG=90°$，

∴$\angle EFK+\angle FEK=\angle GBC+\angle FEK=90°$，

∴$\angle EFK=\angle GBC$，

∵$\angle BAD=\angle ABC=\angle BKF=90°$，

∴四边形 $ABKF$ 是矩形，

∴$AB=FK$，

∴$FK=BC$，

∴$\triangle FEK\cong\triangle BGC$（$ASA$），

∴$EF=BG$，

∴$EF=MG$，

∴$BH+EF=AG+MG$，

∵$AG+MG\geqslant AM$，

∴$BH+EF\geqslant AM$，

∴当点 G 与点 N 重合时，$AG+MA=AM$，此时 $AG+MA$ 的值最小，

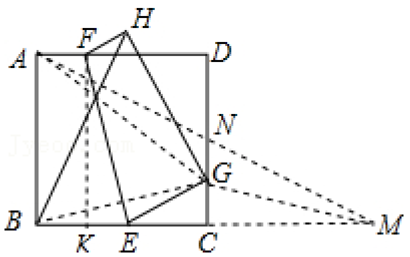
∴$BH+EF=AM$ 的值也最小，

∵$\angle ABM=90°$，$AB=2$，$BM=2BC=4$，

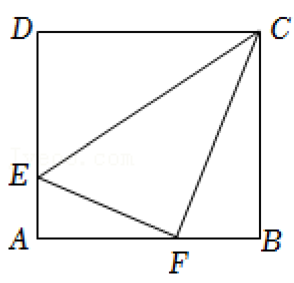
∴$AM=\sqrt{AB^2+BM^2}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$，

∴$BH+EF$ 的最小值是 $2\sqrt{5}$．

故答案为：$2\sqrt{5}$．



15．（2022•微山县一模）已知矩形 $ABCD$ 中，$AB=6$．点 E 为 AD 上一个动点，连接 CE，将$\triangle CDE$ 沿 CE 折叠，点 D 落在点 F 处，当点 F 为线段 AB 的三等分点时，AE 的长 __$\sqrt{2}$或$\frac{4}{3}$__．



【分析】由矩形的性质先求解 $AF=4$，$BF=2$，由折叠的性质及勾股定理可求解 AD 的长，再利用勾股定理可求解 AE 的长．

【解答】解：矩形 $ABCD$ 中，$CD=AB=6$，

∵点 F 为线段 AB 的三等分点，

∴$AF=2$ 或 4，

当 $AF=4$ 时，$BF=2$，

由折叠可知：$CF=CD=6$，$EF=DE=AD-AE$，

∴$BC=\sqrt{CF^2-BF^2}=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$，

∴$AD=BC=4\sqrt{2}$，

∴$EF=4\sqrt{2}-AE$，

∵$AE^2+AF^2=EF^2$，

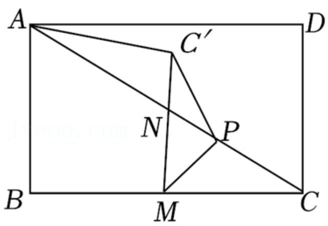
∴$AE^2+4^2=(4\sqrt{2}-AE)^2$，

解得 $AE=\sqrt{2}$．

当 $AF=2$ 时，同理得 $AE=\frac{4}{3}$，

故答案为：$\sqrt{2}$或$\frac{4}{3}$．

16．（2022 春•蜀山区期末）如图，矩形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$\angle DAC=30°$，点 M 是 BC 边的中点，点 P 是对角线 AC 上一动点（$0<CP<1.5$），将△CPM 沿 PM 折叠，点 C 落在点 C'处，线段 MC' 交 AC 于点 N，连接 AC，当△ANC' 是直角三角形时，线段 AC' 的长度为 __$\sqrt{7}$或 2__．



【分析】分两种情况讨论，①当$\angle ANC'=90°$时，先求出 CN 的长，再得出 AN 的长，最后利用勾股定理得出结果；②当$\angle AC'N=90°$时，先得出 AM 的长，再利用勾股定理求解即可．

【解答】解：∵四边形 $ABCD$ 为矩形，

∴$AD\parallel BC$，$\angle B=90°$，

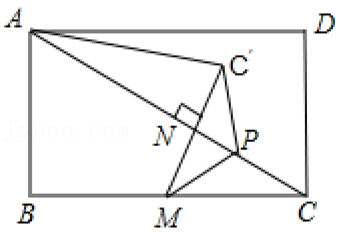
∴$\angle DAC=\angle ACB=30°$，

∵$AB=2$，

∴$AC=2AB=4$，

∴$BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$，

①如图，



当$\angle ANC'=90°$时，

∵点M是BC边的中点，

∴$CM=BM=\frac{BC}{2}=\sqrt{3}$，

∵$\angle ACB=30°$，

∴$MN=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\angle CMC'=60°$，

由折叠的性质得：

$MC=MC'=\sqrt{3}$，$\angle CMP=\angle C'MP=30°$，$\angle MCP=\angle MC'P=30°$，

∴$\angle\angle MC'P=\angle C'MP$，

∴$MP=C'P$，

∵$\angle ANC'=90°$，

∴$MN=NC'=\frac{1}{2}MC'=\frac{1}{2}MC=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

在 Rt△MCN中，

$CN=\sqrt{MC^2-MN^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\frac{3}{2}$，

∴$AN=AC-CN=4-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$，

在 Rt△ANC'中，$AC'=\sqrt{AN^2+C'N^2}=\sqrt{7}$；

②如图，