北京市第二中学2024-2025学年高三上学期12月月考数学试卷

学校:__________姓名：__________班级：__________考号：__________

一、单选题

1．设集合 $A=\left\{x\left|x^{2}<4\right.\right\}$，$B=\left\{x\left|-1\leq x-1\leq 1\right.\right\}$，则 $A\cup B=$（　）

A．$\left\{x\left|-2<x\leq 2\right.\right\}$　B．$\{x|0\leq x<2\}$　C．$\left\{x\left|-2<x<2\right.\right\}$　D．$\left\{x\left|0\leq x\leq 2\right.\right\}$

2．已知 $z=\dfrac{1+\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$（i 为虚数单位），则 $\overline{z}$ 的虚部为（　）

A．$-\dfrac{1}{5}$　B．$-\dfrac{1}{5}\mathrm{i}$　C．$\dfrac{1}{5}$　D．$\dfrac{1}{5}\mathrm{i}$

3．在平面直角坐标系 xOy 中，圆 C 经过点 $A(1,0)$，$B(-1,2)$ 且圆心在直线 $2x-y+2=0$ 上，若直线 $x=ay+1$ 被圆 C 截得弦长为 $2\sqrt{3}$，则正实数 a 的值为（　）

A．1　B．$\sqrt{2}$　C．$\sqrt{3}$　D．2

4．已知点 P 是抛物线 $y^{2}=4x$ 上的一个动点，则点 P 到点 $(0,2\sqrt{2})$ 的距离与点 P 到 y 轴的距离之和的最小值为（　）

A．$\sqrt{3}$　B．2　C．3　D．4

5．在 $\vee ABC$ 中，$(a+c)(\sin A-\sin C)=b(\sin A-\sin B)$，则 $\angle C=$（　）

A．$\dfrac{\pi}{6}$　B．$\dfrac{\pi}{3}$　C．$\dfrac{2\pi}{3}$　D．$\dfrac{5\pi}{6}$

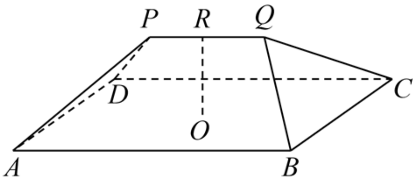
6．若 $(3-x)(1+2x)^{10}=a_0+a_1x+\ldots+a_{11}x^{11}$，$x\in R$，则 $a_1\cdot 3+a_2\cdot 3^2+\ldots+a_{11}\cdot 3^{11}$ 的值为（　）

A．3^9　B．3^9-1　C．0　D．-3

7．设 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 均为单位向量，则“$\vec{a}\perp\vec{b}$”是“$|\vec{a}-2\vec{b}|=|2\vec{a}+\vec{b}|$”的（　）条件.

A．充分而不必要　B．必要而不充分　C．充分必要　D．既不充分也不必要

8．《九章算术》是中国古代的第一部自成体系的数学专著．其中卷五记载：“今有刍甍，下广三丈，表四丈，上袤二丈，无广，高一丈．问积几何？”问题即为：今有如图所示的屋脊状楔体 $PQ-ABCD$，下底面 $ABCD$ 是矩形，假设屋脊没有歪斜，即 PQ 中点 R 在底面 $ABCD$ 上的投影为矩形 $ABCD$ 的中心 O，$PQ//AB$，$AB=4$，$AD=3$，$PQ=2$，$OR=1$(长度单位：丈)．则楔体 $PQ-ABCD$ 的体积为(体积单位：立方丈)（　）



A．10　　　　B．8　　　　C．6　　　　D．5

9．已知非零向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{e}$在同一平面，其中$\vec{e}$是单位向量.$\vec{a}$与$\vec{e}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，$\left|\vec{b}-2\vec{e}\right|=1$，则$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$的最小值是（　　）

A．2　　　　B．1　　　　C．$\sqrt{3}$　　　　D．$\sqrt{3}-1$

10．已知函数$f\left(x\right)=x^2+m$与函数$g\left(x\right)=-\ln\frac{1}{x}-3x\left(x\in\left[\frac{1}{2},2\right]\right)$的图象上至少存在一对关于$x$轴对称的点，则实数$m$的取值范围是（　　）

A．$\left[\frac{5}{4}+\ln 2,2\right]$　B．$\left[2-\ln 2,\frac{5}{4}+\ln 2\right]$　C．$\left[\frac{5}{4}+\ln 2,2+\ln 2\right]$　D．$\left[2-\ln 2,2\right]$

二、填空题

11．已知双曲线$y^2+\frac{x^2}{m}=1$的渐近线方程为$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$，则双曲线的离心率e=_____.

12．在等差数列$\{a_n\}$中，公差d不为0，$a_1=9$，且a_1,a_4,a_5成等比数列，则$d=$_________；当$n=$_________时，数列$\{a_n\}$的前n项和S_n有最大值.

13．已知椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$的左焦点为$F$，点$P$在椭圆上且在$x$轴的上方，若线段$PF$的中点在以原点$O$为圆心，$\left|OF\right|$为半径的圆上，则直线$PF$的斜率是______.

14．设函数$f\left(x\right)=\begin{cases}\left(x-a+1\right)\left(x+1\right), & x<1,\\ \lg x-a & x\ge 1.\end{cases}$

①当$a=0$时，$f(f(10))=$_______；

②若$f(x)$恰有2个零点，则a的取值范围是_______.

15．对于数列$\{a_n\}$，若存在$M>0$，使得对任意$n\in\mathrm{N}^*$，有$\left|a_2-a_1\right|+\left|a_3-a_2\right|+\cdots+\left|a_{n+1}-a_n\right|<M$，则称$\{a_n\}$为“有界变差数列”.给出以下四个结论：

①若等差数列$\{a_n\}$为“有界变差数列”，则$\{a_n\}$的公差d等于0；

②若各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$为"有界变差数列"，则其公比q的取值范围是$(0,1)$；

③若数列$\{a_n\}$是"有界变差数列"，则存在$T>0$，使得对任意$n\in\mathrm{N}^*$，有$-T<a_n<T$；

④若数列$\{a_n\}$是"有界变差数列"，则数列$\left\{\dfrac{a_n}{2^n}\right\}$必是"有界变差数列".

其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题

16．设函数$f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x+A\cos^2\omega x\,(A>0,\omega>0)$，从条件①、条件②、条件③、条件④这四个条件中选择两个作为已知，使得$f(x)$存在且唯一.

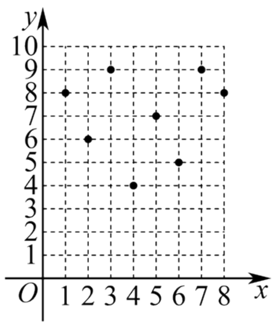
(1)求函数$f(x)$的解析式；

(2)求$f(x)$在区间$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上的最大值和最小值.

条件①：$f(x)=f(-x)$；条件②：$f(0)=1$；条件③：$f(x)$的最大值为$\dfrac{3}{2}$；条件④：$f(x)$的图象的相邻两条对称轴之间的距离为$\dfrac{\pi}{2}$.

注：如果选择的条件不符合要求，得0分；如果选择多组条件分别解答，按第一组解答计分.

17．为了解某中学高一年级学生身体素质情况，对高一年级的1班~8班进行了抽测，采取如下方式抽样：每班随机各抽10名学生进行身体素质监测.经统计，每班10名学生中身体素质监测成绩达到优秀的人数散点图如下（x轴表示对应的班号，y轴表示对应的优秀人数）：

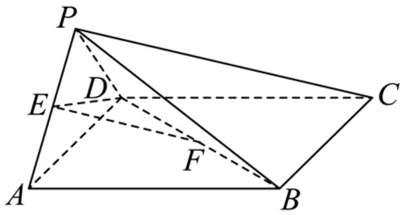


(1)若用散点图预测高一年级学生身体素质情况，从高一年级学生中任意抽测1人，试估计该生身体素质监测成绩达到优秀的概率；

(2)若从高一2班抽测的10人中随机抽取1人，从高一5班抽测的10人中随机抽取1人，设X表示这2人中身体素质监测成绩达到优秀的人数，求X的分布列和数学期望；

(3)假设每个班学生身体素质优秀的概率与该班随机抽到的10名学生的身体素质优秀率相等.现在从每班中分别随机抽取1名同学，用“$\xi_k=1$”表示第k班抽到的这名同学身体素质优秀，“$\xi_k=0$”表示第k班抽到的这名同学身体素质不是优秀$\left(k=1,2,\cdots,8\right)$.直接写出方差$D\left(\xi_1\right)$，$D\left(\xi_2\right)$，$D\left(\xi_3\right)$，$D\left(\xi_4\right)$的大小关系（无需过程）.

18．如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是正方形，侧面$PAD\perp$底面$ABCD$，F为BD中点，点E在棱PA上，$PC//$平面EDF，$PA=PD=AD=2$.



(1)求证：E为PA中点；

(2)求二面角$F-ED-P$的余弦值；

(3)设G为棱PC上任意一点，求证：GF与平面EDF不垂直.

19．已知椭圆$\Gamma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点为$F(-2,0)$，直线$l$过点$F$交椭圆$\Gamma$于$A$，$B$两点．当直线$l$垂直于$x$轴时，$\triangle OAB$的面积为$\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

(1)求椭圆Γ的方程；

(2)直线$l_1:x=-3$上是否存在点C，使得$\vee ABC$为正三角形？若存在，求出点C的坐标及直线l的方程；若不存在，请说明理由.

20．已知函数$f\left(x\right)=\ln x-2ax$（其中$a\in\mathbf{R}$）.

(1)当$a=2$时，求函数$f\left(x\right)$的图象在$x=1$处的切线方程；

(2)若$f\left(x\right)\le 2$恒成立，求a的取值范围；

(3)设$g\left(x\right)=f\left(x\right)+\dfrac{1}{2}x^2$，且函数$g\left(x\right)$有极大值点$x_0$，求证：$x_0f\left(x_0\right)+1+ax_0^2>0$.

21．已知集合$S=\left\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\right\}\left(n\ge 3\right)$，集合$T\subseteq\left\{\left(x,y\right)\middle|x\in S,y\in S,x\ne y\right\}$且满足：$\forall a_i,a_j\in S\left(i,j=1,2,3,\cdots,n,i\ne j\right)$，$\left(a_i,a_j\right)\in T$与$\left(a_j,a_i\right)\in T$恰有一个成立，对于$T$定义

$$d_T\left(a,b\right)=\begin{cases}1,\left(a,b\right)\in T,\\0,\left(b,a\right)\in T,\end{cases}$$，

$l_T(a_i)=d_T(a_i,a_1)+d_T(a_i,a_2)+\cdots+d_T(a_i,a_{i-1})+d_T(a_i,a_{i+1})+\cdots+d_T(a_i,a_n)(i=1,2,3,\cdots,n)$.

(1)若$n=4$，$(a_1,a_2),(a_3,a_2),(a_2,a_4)\in T$，求$l_T(a_2)$的值及$l_T(a_4)$的最大值；

(2)从$l_T(a_1)$，$l_T(a_2)$，…，$l_T(a_n)$中任意删去两个数，记剩下的$n-2$个数的和为M，证明：$M\geq\frac{1}{2}n(n-5)+3$；

(3)求证：对于满足$l_T(a_i)<n-1(i=1,2,3,\cdots,n)$的每一个集合$T$，集合$S$中都存在三个不同的元素$e$，$f$，$g$，使得$d_T(e,f)+d_T(f,g)+d_T(g,e)=3$.

参考答案：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	A	C	B	B	D	C	D	D	D

1．A

【分析】解出集合中的不等式，得到这两个集合，由并集的定义求 $A\cup B$.

【详解】$A=\left\{x\left|x^2<4\right.\right\}=\left\{x\left|-2<x<2\right.\right\}$，又 $B=\left\{x\left|-1\le x-1\le 1\right.\right\}=\left\{x\left|0\le x\le 2\right.\right\}$，

所以 $A\cup B=\left\{x\left|-2<x\le 2\right.\right\}$.

故选：A

2．A

【分析】利用复数的除法运算求出 z，再求出 $\overline{z}$ 的虚部.

【详解】依题意，$z=\dfrac{(1+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}=\dfrac{3+\mathrm{i}}{5}=\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{5}\mathrm{i}$，

所以 $\overline{z}=\dfrac{3}{5}-\dfrac{1}{5}\mathrm{i}$ 的虚部为 $-\dfrac{1}{5}$.

故选：A

3．C

【分析】由题意可先借助待定系数法计算出圆 C 方程，再借助点到直线的距离公式与垂径定理计算即可得解.

【详解】设 $C\left(m,2m+2\right)$，圆 C 半径为 r，

则有 $\begin{cases}\left(1-m\right)^2+\left(2m+2\right)^2=r^2\\ \left(-1-m\right)^2+\left(2-2m-2\right)^2=r^2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}m=-1\\ r=2\end{cases}$，

即圆 C 的方程为 $\left(x+1\right)^2+y^2=4$，

由直线 $x=ay+1$ 被圆 C 截得弦长为 $2\sqrt{3}$，

则有 $d=\sqrt{2^2-\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\dfrac{\left|-1-1\right|}{\sqrt{a^2+1}}$，即 $\sqrt{a^2+1}=2$，解得 $a=\pm\sqrt{3}$，

又 a 为正实数，故 $a=\sqrt{3}$.

故选：C.

4．B

【分析】根据给定条件，将问题转化为点 P 到点 $(0,2\sqrt{2})$ 的距离与点 P

到准线距离之和的最小值，再利用抛物线的定义求解即得.

【详解】抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 $F(1,0)$，准线 $l:x=-1$，

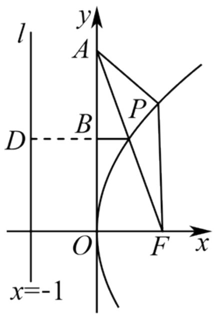
过 P 作 $PD\perp l$ 于 D，交 y 于点 B，则 $|PF|=|PD|=|PB|+1$，$|PB|=|PF|-1$，

记点 $(0,2\sqrt{2})$ 为A，于是 $|PA|+|PB|=|PA|+|PF|-1\geq|AF|-1=\sqrt{1^2+(2\sqrt{2})^2}-1=2$，

当且仅当 P 为线段 AF 与抛物线的交点时取等号，

所以点 P 到点 $(0,2\sqrt{2})$ 的距离与点 P 到 y 轴的距离之和的最小值为 2.

故选：2



5．B

【分析】利用正弦定理的边角变换与余弦定理即可得解.

【详解】因为 $(a+c)(\sin A-\sin C)=b(\sin A-\sin B)$，

所以由正弦定理得 $(a+c)(a-c)=b(a-b)$，即 $a^2-c^2=ab-b^2$，

则 $a^2+b^2-c^2=ab$，故 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{ab}{2ab}=\dfrac{1}{2}$，

又 $0<C<\pi$，所以 $C=\dfrac{\pi}{3}$.

故选：B.

6．D

【分析】应用赋值法可知 $S=a_0+a_1\cdot3+a_2\cdot3^2+a_3\cdot3^3+\ldots+a_{11}\cdot3^{11}=0$，由二项式展开项的通项公式可求 a_0，即可求 $a_1\cdot3+a_2\cdot3^2+a_3\cdot3^3+\ldots+a_{11}\cdot3^{11}$ 的值.

【详解】$x=3$ 时，由 $3-x=0$ 知：$S=a_0+a_1\cdot3+a_2\cdot3^2+a_3\cdot3^3+\ldots+a_{11}\cdot3^{11}=0$，而

$a_0=3\times C_{10}^0\cdot1^{10}\cdot(2x)^0=3$，

$\therefore a_1\cdot3+a_2\cdot3^2+a_3\cdot3^3+\ldots+a_{11}\cdot3^{11}=-a_0=-3$.

故选：D

7．C

【分析】利用充分条件、必要条件的定义，结合数量积的运算律判断即得.

【详解】向量$\vec{a}$，$\vec{b}$均为单位向量，若$\vec{a}\perp\vec{b}$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，$|\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{\vec{a}^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}^2}=\sqrt{5}$，

$|2\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{\vec{a}^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}^2}=\sqrt{5}$，因此$|\vec{a}-2\vec{b}|=|2\vec{a}+\vec{b}|$；

若$|\vec{a}-2\vec{b}|=|2\vec{a}+\vec{b}|$，则$\vec{a}^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}^2=4\vec{a}^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$，

即$5-4\vec{a}\cdot\vec{b}=5+4\vec{a}\cdot\vec{b}$，整理得$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，因此$\vec{a}\perp\vec{b}$，

所以“$\vec{a}\perp\vec{b}$”是“$|\vec{a}-2\vec{b}|=|2\vec{a}+\vec{b}|$”的充分必要条件.

故选：C

8．D

【分析】根据题意，把楔体$PQ-ABCD$分成一个三棱柱和两个四棱锥，即可求解.

【详解】根据题意，分别过点P，Q作平面$ABCD$的垂直平面，则可以把楔体$PQ-ABCD$分成一个三棱柱和两个四棱锥.

三棱柱的体积$V_1=\frac{1}{2}\times3\times1\times2=3$(立方丈)，

四棱锥的体积$V_2=\frac{1}{3}\times\frac{1\times3}{2}\times2=1$(立方丈)，

故楔体$PQ-ABCD$的体积$V=V_1+2V_2=5$(立方丈).

故选：D.

9．D

【分析】先确定向量$\vec{a},\vec{b}$所表示的点的轨迹，一个为直线，一个为圆，再根据直线与圆的位置关系求最小值.

【详解】以向量$\vec{e}$的起点为原点，以$\vec{e}$为x轴的正方向，建立平面直角坐标系，

则$\vec{e}=(1,0)$，设$\vec{a}=(c,d)$，$\vec{b}=(m,n)$，

则由$\vec{a}$与$\vec{e}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$得$\vec{a}\cdot\vec{e}=|\vec{a}|\cdot|\vec{e}|\cos\frac{\pi}{3}$，得$c=\frac{1}{2}\sqrt{c^2+d^2}$，$d=\pm\sqrt{3}c$，

由$|\vec{b}-2\vec{e}|=1$得$(m-2)^2+n^2=1$，

所以点(c,d)在直线$y=\pm\sqrt{3}x$上，点(m,n)在圆上$(x-2)^2+y^2=1$，

又$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{(c-m)^2+(d-n)^2}$，

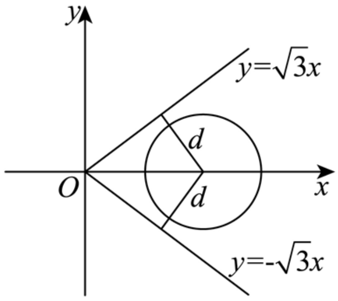
因此，$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$等于点$(c,d)$到点$(m,n)$的距离，

圆$(x-2)^2+y^2=1$的圆心到直线$y=\pm\sqrt{3}x$的距离为$d=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3+1}}=\sqrt{3}>1$，

所以直线$y=\pm\sqrt{3}x$与圆$(x-2)^2+y^2=1$相离，

因此$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$的最小值为圆心(2,0)到直线$y=\pm\sqrt{3}$的距离$\dfrac{\left|\pm2\sqrt{3}\right|}{\sqrt{1+3}}=\sqrt{3}$减去半径 1，

即为$\sqrt{3}-1$.



故选：D.

【点睛】方法点睛: 以向量为载体求相关变量的取值范围，是向量与函数、不等式、三角函数、曲线方程等相结合的一类综合问题.通过向量的坐标运算，将问题转化为解方程、解不等式、求函数值域或直线与曲线的位置关系，是解决这类问题的一般方法.

10．D

【分析】由题可得$h(x)=f(x)+g(x)=x^2+\ln x-3x+m$在$\left[\dfrac{1}{2},2\right]$有零点，利用导数研究函数的性质进而可得$m-2\le0\le m+\ln2-2$，即得.

【详解】原问题等价于$h(x)=f(x)+g(x)=x^2+\ln x-3x+m$在$\left[\dfrac{1}{2},2\right]$有零点，

而$h'(x)=2x+\dfrac{1}{x}-3=\dfrac{1}{x}(2x-1)(x-1)$，

$\therefore x\in\left(\dfrac{1}{2},1\right),h'(x)<0$，$h(x)$单调递减，　$x\in(1,2],h'(x)>0$，$h(x)$单调递增，

又$h(1)=m-2,h(2)=\ln2-2+m,h\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\ln2-\dfrac{5}{4}+m$，

由$\ln2>\dfrac{1}{2}$可判断$h(2)>h\left(\dfrac{1}{2}\right)$，

因而$h(x)$的值域为$[m-2,m+\ln2-2]$，