专题 34 圆锥曲线存在性问题的探究

【方法技巧与总结】

解决存在性问题的技巧：

（1）特殊值（点）法：对于一些复杂的题目，可通过其中的特殊情况，解得所求要素的必要条件，然后再证明求得的要素也使得其他情况均成立．

（2）假设法：先假设存在，推证满足条件的结论．若结论正确，则存在；若结论不正确，则不存在．

【题型归纳目录】

题型一：存在点使向量数量积为定值

题型二：存在点使斜率之和或之积为定值

题型三：存在点使两角度相等

题型四：存在点使等式恒成立

题型五：存在点使线段关系式为定值

【典例例题】

题型一：存在点使向量数量积为定值

例 1．已知椭圆 C 的中心在原点，焦点在 x 轴上，椭圆长轴两个端点间的距离与两个焦点之间的距离的差为 $2(\sqrt{2}-1)$，且椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$．

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）过点 $(1,0)$ 作直线 l 交 C 于 P、Q 两点，试问：在 x 轴上是否存在一个定点 M，使 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}$ 为定值？若存在，求出这个定点 M 的坐标；若不存在，请说明理由．

例 2．已知椭圆 C 的中心在坐标原点，焦点在 x 轴上，其左、右焦点分别为 F_1，F_2，短轴长为 $2\sqrt{3}$．点 P 在椭圆 C 上，且满足△PF_1F_2 的周长为 6．

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）设过点 $(-1,0)$ 的直线 l 与椭圆 C 相交于 A，B 两点，试问在 x 轴上是否存在一个定点 M，使得 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ 恒为定值？若存在，求出该定值及点 M 的坐标；若不存在，请说明理由．

例 3．已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，椭圆经过点$A(-1,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$．

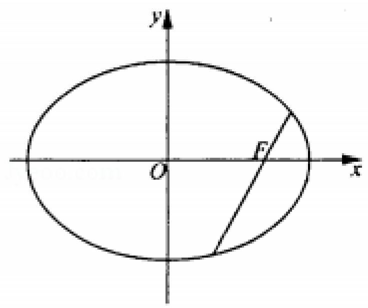
（1）求椭圆C的方程；

（2）过点$(1,0)$作直线l交C于M，N两点，试问：在x轴上是否存在一个定点P，使$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$为定值？若存在，求出这个定点$P$的坐标；若不存在，请说明理由．

变式 1．已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率$e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，过右焦点$F(c,0)$的直线$y=x-c$与椭圆交于$A$，$B$两点，$A$在第一象限，且$|AF|=\sqrt{2}$．

（1）求椭圆C的方程；

（2）在x轴上是否存在点M，满足对于过点F的任一直线l与椭圆C的两个交点P，Q，都有$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}$为定值？若存在，求出点$M$的坐标；若不存在，说明理由．



变式 2．已知$F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$，点P满足$|PF_1|-|PF_2|=2$，记点P的轨迹为E，

（1）求轨迹E的方程；

（2）若直线l过点F_2且法向量为$\vec{n}=(a,1)$，直线与轨迹E交于P、Q两点．

①过P、Q作y轴的垂线PA、QB，垂足分别为A、B，记$|PQ|=\lambda|AB|$，试确定λ的取值范围；

②在x轴上是否存在定点M，无论直线l绕点F_2怎样转动，使$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=0$恒成立？如果存在，求出定点$M$；如果不存在，请说明理由．

变式 3． 已知双曲线$E:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$的焦距为 4，以原点为圆心，实半轴长为半径的圆和直线$x-y+\sqrt{6}=0$相切．

（Ⅰ）求双曲线E的方程；

（Ⅱ）已知点F为双曲线E的左焦点，试问在x轴上是否存在一定点M，过点M任意作一条直线l交双曲线E于P，Q两点，使$\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}$为定值？若存在，求出此定值和所有的定点$M$的坐标；若不存在，请说明理由．

题型二：存在点使斜率之和或之积为定值

例 4． 已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{1}{2}$，$F_1$，$F_2$分别是椭圆的左、右焦点，$P$是椭圆上一点，且△$PF_1F_2$的周长是 6，$Q(4,0)$．

（Ⅰ）求椭圆C的方程；

（Ⅱ）设直线l经过椭圆的左焦点F_1且与椭圆C交于不同的两点M，N，试问：直线QM与直线QN的斜率的和是否为定值？若是，请求出此定值；若不是，请说明理由．

例 5． 已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，设直线$l$过椭圆$C$的上顶点和右顶点，坐标原点$O$到直线$l$的距离为$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$．

（Ⅰ）求椭圆C的方程．

（Ⅱ）过点$D(3,0)$且斜率不为零的直线l'交椭圆C于A，B两点，在x轴的正半轴上是否存在定点Q，使得直线AQ，BQ的斜率之积为非零的常数？若存在，求出定点Q的坐标；若不存在，请说明理由．

例 6． 已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，设直线$l$过椭圆$C$的上顶点和右焦点，坐标原点$O$到直线$l$的距离为 2．

（1）求椭圆C的方程．

（2）过点$P(8,0)$且斜率不为零的直线交椭圆C于M，N两点，在x轴的正半轴上是否存在定点Q，使得直线MQ，NQ的斜率之积为非零的常数？若存在，求出定点Q的坐标；若不存在，请说明理由．

变式4．已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，四点$P_1(1,\frac{\sqrt{3}}{2})$，$P_2(0,1)$，$P_3(1,\frac{\sqrt{2}}{2})$，$P_4(-1,\frac{\sqrt{3}}{2})$中恰有三点在椭圆$C$上．

（1）求椭圆C的方程；

（2）过点$(1,0)$且斜率不为0的直线l交椭圆C于B，D两点，在x轴上是否存在定点A，使得直线AB的斜率与直线AD的斜率之积为定值？若存在，求出点A的坐标；若不存在，请说明理由．

变式5．设椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率是$\frac{\sqrt{2}}{2}$，过点$P(0,1)$的动直线$L$于椭圆相交于$A$，$B$两点，当直线$L$平行于$x$轴时，直线$L$被椭圆$C$截得弦长为$2\sqrt{2}$．

（Ⅰ）求C的方程；

（Ⅱ）在y上是否存在与点P不同的定点Q，使得直线AQ和BQ的倾斜角互补？若存在，求Q的坐标；若不存在，说明理由．

题型三：存在点使两角度相等

例7．已知$F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$是椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的两个焦点，$M$是椭圆$C$上一点，当$MF_1\perp F_1F_2$时，有$|MF_2|=3|MF_1|$．

（1）求椭圆C的标准方程；

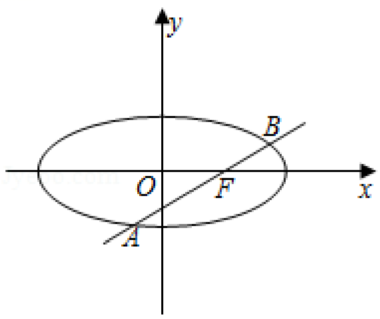
（2）设过椭圆右焦点F_2的动直线l与椭圆交于A，B两点，试问在x轴上是否存在与F_2不重合的定点T，使得$\angle ATF_2=\angle BTF_2$恒成立？若存在，求出定点$T$的坐标，若不存在，请说明理由．

例 8. 在平面直角坐标系 xOy 内，椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，右焦点 F 到右准线的距离为 2，直线 l 过右焦点 F 且与椭圆 E 交于 A、B 两点．

（1）求椭圆 E 的标准方程；

（2）若直线 l 与 x 轴垂直，C 为椭圆 E 上的动点，求 CA^2+CB^2 的取值范围；

（3）若动直线 l 与 x 轴不重合，在 x 轴上是否存在定点 P，使得 PF 始终平分 $\angle APB$？若存在，请求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由．



例 9. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，点 $P(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2})$ 满足：$|PF_1|+|PF_2|=2a$，且 $S_{\triangle PF_1F_2}=\dfrac{3}{2}$．

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）过点 $M(4,0)$ 的直线 l 与 C 交于 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ 不同的两点，且 $y_1y_2\neq 0$，问在 x 轴上是否存在定点 N，使得直线 NA，NB 与 y 轴围成的三角形始终为底边在 y 轴上的等腰三角形．若存在，求定点 N 的坐标；若不存在，请说明理由．

变式 6. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{1}{2}$，左、右焦点分别为 F_1，F_2，O 为坐标原点，点 P 在椭圆 C 上，且满足 $|\overrightarrow{PF_1}|=4$，$|\overrightarrow{PF_1}||\overrightarrow{PF_2}|-2\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$．

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）已知过点$(2,0)$且不与x轴重合的直线l与椭圆C交于M，N两点，在x轴上是否存在定点Q，使得$\angle MQO=\angle NQO$．若存在，求出点Q的坐标；若不存在，说明理由．

题型四：存在点使等式恒成立

例10． 已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为$F_2(\sqrt{3},0),A_1(-a,0),A_2(a,0)$，椭圆$C$上异于顶点的动点$P$满足直线$PA_1$与$PA_2$的斜率之积为$-\frac{1}{4}$．

（1）求椭圆C的方程．

（2）过点$M(4,0)$的直线l与椭圆C交于$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$两点，其中$y_1y_2\neq 0$，点$Q(Q$与M不重合）在x轴上，直线QA，QB分别与y轴交于S，T，是否存在定点Q，使得$|QS|=|QT|$恒成立？若存在，求出定点Q的坐标；若不存在，请说明理由．

例11． 已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右顶点为$(\sqrt{2},0)$，离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$．

（1）求椭圆C的标准方程；

（2）过椭圆C的左焦点F且斜率为$k(k\neq 0)$的直线l交椭圆C于A，B两点，O为坐标原点，问椭圆C上是否存在点P，使得$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$？若存在，求出直线$l$的方程；若不存在，请说明理由．

例12． 设F_1、F_2分别是椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点，$|F_1F_2|=2$，直线$l$过$F_1$且垂直于$x$轴，交椭圆$C$于$A$、$B$两点，连接$A$、$B$、$F_2$，所组成的三角形为等边三角形．

（Ⅰ）求椭圆C的方程；

（Ⅱ）过右焦点F_2的直线m与椭圆C相交于M、N两点，试问：椭圆C上是否存在点P，使$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$成立？若存在，求出点$P$的坐标；若不存在，说明理由．

变式 7． 已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$过点$(2\sqrt{3},-\sqrt{3})$，且椭圆的短轴长为$4\sqrt{3}$．

（Ⅰ）求椭圆C的方程；

（Ⅱ）已知动直线l过右焦点F，且与椭圆C分别交于M，N两点．试问x轴上是否存在定点Q，使得$\overrightarrow{QM}\cdot\overrightarrow{QN}=-\dfrac{135}{16}$恒成立？若存在求出点$Q$的坐标；若不存在，说明理由．

变式 8． 已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为$F(1,0)$，且点$(-1,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$在椭圆$C$上．

（1）求椭圆C的标准方程；

（2）已知动直线l过点F，且与椭圆C交于A，B两点，试问x轴上是否存在定点Q，使得$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}=-\dfrac{7}{16}$恒成立？若存在，求出点$Q$的坐标，若不存在，请说明理由．

变式 9． 已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$的右焦点为$F(1,0)$，离心率$e=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

（1）求椭圆C的标准方程；

（2）已知动直线l过点F，且与椭圆C交于A，B两点，试问x轴上是否存在定点M，使得$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=-\dfrac{11}{9}$恒成立？若存在，求出点$M$的坐标，若不存在，请说明理由．

变式 10． 已知椭圆$\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$，过右焦点$F_2$的直线$l$交椭圆于$M$，$N$两点．

（1）若$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=-3$，求直线$l$的方程；

（2）若直线l的斜率存在，在线段OF_2上是否存在点$P(a,0)$，使得$|\overrightarrow{PM}|=|\overrightarrow{PN}|$，若存在，求出$a$的范围，若不存在，请说明理由．

变式11． 设椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$的右焦点为$F$，右顶点为$A$，已知$\dfrac{1}{|OF|}+\dfrac{1}{|OA|}=\dfrac{e}{|FA|}$，其中$O$为坐标原点，$e$为椭圆的离心率．

（1）求椭圆C的方程；

（2）是否存在斜率为2的直线l，使得当直线l与椭圆C有两个不同交点M，N时，能在直线$y=\dfrac{5}{3}$上找到一点P，在椭圆C上找到一点Q，满足$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{NQ}$？若存在，求出直线$l$的方程；若不存在，说明理由．

变式12． 设椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$的左焦点为$F$，左顶点为$A$，已知$\dfrac{1}{|OF|}+\dfrac{1}{|OA|}=\dfrac{e}{|FA|}$，其中$O$为坐标原点，$e$为椭圆的离心率．

（1）求椭圆C的方程；

（2）是否存在斜率为-2的直线l，使得当直线l与椭圆C有两个不同交点M，N时，能在直线$y=-\dfrac{5}{3}$上找到一点P，在椭圆C上找到一点Q，满足$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{NQ}$？若存在，求出直线$l$的方程；若不存在，说明理由．

题型五：存在点使线段关系式为定值

例13． 已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的焦距为2，且经过点$P(1,\dfrac{3}{2})$．

（1）求椭圆C的方程；

（2）经过椭圆右焦点F且斜率为$k(k\neq 0)$的动直线l与椭圆交于A、B两点，试问x轴上是否存在异于点F的定点T，使$|AF|\cdot|BT|=|BF|\cdot|AT|$恒成立？若存在，求出$T$点坐标，若不存在，说明理由．

例 14． 椭圆 E 经过两点 $(1,\frac{\sqrt{2}}{2})$，$(\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{\sqrt{3}}{2})$，过点 P 的动直线 l 与椭圆相交于 A，B 两点．

（1）求椭圆 E 的方程；

（2）若椭圆 E 的右焦点是 P，其右准线与 x 轴交于点 Q，直线 AQ 的斜率为 k_1，直线 BQ 的斜率为 k_2，求证：$k_1+k_2=0$；

（3）设点 $P(t,0)$ 是椭圆 E 的长轴上某一点（不为长轴顶点及坐标原点），是否存在与点 P 不同的定点 Q，使得 $\frac{QA}{QB}=\frac{PA}{PB}$ 恒成立？只需写出点 Q 的坐标，无需证明．

例 15． 椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的焦点到直线 $x-3y=0$ 的距离为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$，离心率为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$．抛物线 $G:y^2=2px(p>0)$ 的焦点与椭圆 E 的焦点重合，斜率为 k 的直线 l 过 G 的焦点与 E 交于 A，B，与 G 交于 C，D．

（1）求椭圆 E 及抛物线 G 的方程；

（2）是否存在常数 λ，使得 $\frac{1}{|AB|}+\frac{\sqrt{5}\lambda}{|CD|}$ 为常数？若存在，求出 λ 的值；若不存在，请说明理由．

变式 13． 椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的焦点到直线 $x-3y=0$ 的距离为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$，离心率为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$，抛物线 $G:y^2=2px(p>0)$ 的焦点与椭圆 E 的焦点重合；斜率为 k 的直线 l 过 G 的焦点与 E 交于 A，B，与 G 交于 C，D．

（1）求椭圆 E 及抛物线 G 的方程；

（2）是否存在常数 λ，使 $\frac{1}{|AB|}+\frac{\lambda}{|CD|}$ 为常数，若存在，求 λ 的值，若不存在，说明理由．

专题 34 圆锥曲线存在性问题的探究

【方法技巧与总结】

解决存在性问题的技巧：

（1）特殊值（点）法：对于一些复杂的题目，可通过其中的特殊情况，解得所求要素的必要条件，然后再证明求得的要素也使得其他情况均成立．

（2）假设法：先假设存在，推证满足条件的结论．若结论正确，则存在；若结论不正确，则不存在．

【题型归纳目录】

题型一：存在点使向量数量积为定值

题型二：存在点使斜率之和或之积为定值

题型三：存在点使两角度相等

题型四：存在点使等式恒成立

题型五：存在点使线段关系式为定值

【典例例题】

题型一：存在点使向量数量积为定值

例 1． 已知椭圆 C 的中心在原点，焦点在 x 轴上，椭圆长轴两个端点间的距离与两个焦点之间的距离的差为 $2(\sqrt{2}-1)$，且椭圆的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）过点 $(1,0)$ 作直线 l 交 C 于 P、Q 两点，试问：在 x 轴上是否存在一个定点 M，使 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}$ 为定值？若存在，求出这个定点 M 的坐标；若不存在，请说明理由．

【解析】解：（1）$\begin{cases}a-c=\sqrt{2}-1\\ e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$，可得 $a=\sqrt{2}$，$b=1$，$c=1$，

$\therefore$ 所求椭圆 C 的方程为：$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$．

（2）当直线 l 不与 x 轴重合时，

可设直线 l 的方程为：$x=ky+1$，联立 $\begin{cases}x^2+2y^2=2\\ x=ky+1\end{cases}$，

把消去 x 可得整理得：$(k^2+2)y^2+2ky-1=0$，设 $P(x_1,\ y_1)$、$Q(x_2,\ y_2)$，

$\therefore y_1+y_2=-\dfrac{2k}{k^2+2}$，$y_1y_2=-\dfrac{1}{k^2+2}$，

假设存在定点 $M(m,0)$，使得 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}$ 为定值，

$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=(x_1-m,y_1)\cdot(x_2-m,y_2)=(x_1-m)(x_2-m)+y_1y_2=(ky_1+1-m)(ky_2+1-m)$

$=(k^2+1)y_1y_2+k(1-m)(y_1+y_2)+(1-m)^2$

$=-\dfrac{(k^2+1)}{k^2+2}-\dfrac{2k^2(1-m)}{k^2+2}+(1-m)^2$

$=\dfrac{(2m-3)k^2-1}{k^2+2}+(1-m)^2$

$=\dfrac{(2m-3)(k^2+2)+(5-4m)}{k^2+2}+(1-m)^2$.

当且仅当 $5-4m=0$，即 $m=\dfrac{5}{4}$ 时，$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=-\dfrac{7}{16}$（为定值）.

这时 $M(\dfrac{5}{4},0)$，再验证当直线 l 的倾斜角 $\alpha=0$ 时的情形，

此时取 $P(-\sqrt{2},0)$，$Q(\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{MP}=(-\sqrt{2}-\dfrac{5}{4},0)$，

$\therefore$ 存在定点 $M(\dfrac{5}{4},0)$ 使得对于经过 $(1,0)$ 点的任意一条直线 l 均有 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=-\dfrac{7}{16}$（恒为定值）.

例 2．已知椭圆 C 的中心在坐标原点，焦点在 x 轴上，其左、右焦点分别为 F_1，F_2，短轴长为 $2\sqrt{3}$．点 P 在椭圆 C 上，且满足△PF_1F_2 的周长为 6．

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）设过点 $(-1,0)$ 的直线 l 与椭圆 C 相交于 A，B 两点，试问在 x 轴上是否存在一个定点 M，使得 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ 恒为定值？若存在，求出该定值及点 M 的坐标；若不存在，请说明理由．

【解析】解：(I) 由题意知：$\begin{cases}2b=2\sqrt{3}\\2a+2c=6\\a^2=b^2+c^2\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}a=2\\b=\sqrt{3}\\c=1\end{cases}$，

$\therefore$ 椭圆 C 方程为：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$

(II) 设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，$M(m,0)$．

设直线 l 的方程为：$y=k(x+1)(k$ 存在）

联立 $\begin{cases}y=k(x+1)\\3x^2+4y^2=12\end{cases}$，得：$(4k^2+3)x^2+8k^2x+4k^2-12=0$，

则 $x_1+x_2=\dfrac{-8k^2}{4k^2+3};x_1\cdot x_2=\dfrac{4k^2-12}{4k^2+3}$

又 $y_1\cdot y_2=k^2(x_1+1)(x_2+1)=k^2(x_1x_2+x_1+x_2+1)$

$=k^2(\dfrac{4k^2-12}{4k^2+3}-\dfrac{8k^2}{4k^2+3}+1)=\dfrac{-9k^2}{4k^2+3}$

而 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(x_1-m)(x_2-m)+y_1y_2$

$=\dfrac{4k^2-12}{4k^2+3}-m\times\dfrac{-8k^2}{4k^2+3}-\dfrac{9k^2}{4k^2+3}+m^2$

$=\dfrac{4k^2-12+8mk^2-9k^2+m^2(4k^2+3)}{4k^2+3}$

$=\dfrac{(4m^2+8m-5)k^2+3m^2-12}{4k^2+3}$ 为定值.

只需 $\dfrac{4m^2+8m-5}{4}=\dfrac{3m^2-12}{3}$，

解得： $m=-\dfrac{11}{8}$，从而 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=-\dfrac{135}{64}$.

当 k 不存在时， $A(-1,\dfrac{3}{2}),B(-1,-\dfrac{3}{2})$

此时，当 $m=-\dfrac{11}{8}$ 时， $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(-1-m)(-1-m)-\dfrac{9}{4}=-\dfrac{135}{64}$

故：存在 $M(-\dfrac{11}{8},0)$，使得 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=-\dfrac{135}{64}$.

例 3. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，椭圆经过点 $A(-1,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）过点 $(1,0)$ 作直线 l 交 C 于 M，N 两点，试问：在 x 轴上是否存在一个定点 P，使 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$ 为定值？若存在，求出这个定点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.

【解析】解：（1）由题意得 $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，即 $b=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，

又椭圆经过点 $A(-1,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$，可得 $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{2b^2}=1$，

解得 $a=\sqrt{2}$，$b=c=1$，

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$；

（2）假设存在符合条件的点 $P(m,0)$，

设 $M(x_1,\ y_1)$，$N(x_2,\ y_2)$，

则 $\overrightarrow{PM}=(x_1-m，\ y_1)$，$\overrightarrow{PN}=(x_2-m，\ y_2)$，

$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=(x_1-m)(x_2-m)+y_1y_2=x_1x_2-m(x_1+x_2)+m^2+y_1y_2$，

①当直线 l 的斜率存在时，设直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$，

由 $\begin{cases}y=k(x-1)\\x^2+2y^2=2\end{cases}$，得 $(2k^2+1)x^2-4k^2x+(2k^2-2)=0$，

可得△ >0 成立，且 $x_1+x_2=\dfrac{4k^2}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{2k^2-2}{1+2k^2}$，

$\therefore y_1y_2=k^2[-(x_1+x_2)+x_1x_2+1]=-\dfrac{k^2}{1+2k^2}$，

$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=\dfrac{(2m^2-4m+1)k^2+m^2-2}{1+2k^2}$，

对于任意的 k 值，上式为定值，

故 $2m^2-4m+1=2(m^2-2)$，解得：$m=\dfrac{5}{4}$，

此时，$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=-\dfrac{7}{16}$ 为定值；

②当直线 l 的斜率不存在时，

直线 $l:x=1$，$x_1x_2=1$，$x_1+x_2=2$，$y_1y_2=-\dfrac{1}{2}$，

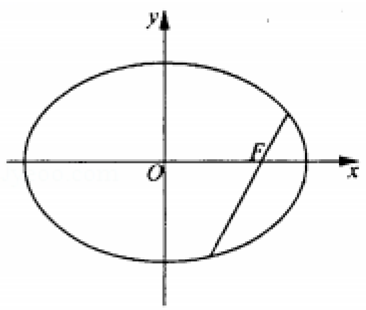
由 $m=\dfrac{5}{4}$，得 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=1-2\times\dfrac{5}{4}+\dfrac{25}{16}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{7}{16}$ 为定值，

综合①②知，符合条件的点 P 存在，其坐标为 $(\dfrac{5}{4}，\ 0)$.

变式 1. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率 $e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，过右焦点 $F(c,0)$ 的直线 $y=x-c$ 与椭圆交于 A，B 两点，A 在第一象限，且 $|AF|=\sqrt{2}$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）在 x 轴上是否存在点 M，满足对于过点 F 的任一直线 l 与椭圆 C 的两个交点 P，Q，都有 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}$ 为定值？若存在，求出点 M 的坐标；若不存在，说明理由.



【解析】解：（1）$\because$ 直线 $y=x-c$ 的倾斜角为 $45°$，且 $|AF|=\sqrt{2}$，

$\therefore$ 点 $A(c+1,1)$，

$\therefore \begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \dfrac{(c+1)^2}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a=3\sqrt{2}\\ b=3\\ c=3\end{cases}$，

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为：$\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{9}=1$．

（2）设 $M(m,0)$，直线 l 的方程为：$x=ty+3$，$P(x_1,\ y_1)$，$Q(x_2,\ y_2)$，

联立方程 $\begin{cases}x=ty+3\\ \dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{9}=1\end{cases}$，消去 x 得：$(t^2+2)y^2+6ty-9=0$，

$\therefore y_1+y_2=-\dfrac{6t}{t^2+2}$，$y_1y_2=-\dfrac{9}{t^2+2}$，

$\therefore \overrightarrow{MP}=(x_1-m,\ y_1)$，$\overrightarrow{MQ}=(x_2-m,\ y_2)$，

$\therefore \overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=(x_1-m)(x_2-m)+y_1y_2$

$=x_1x_2-m(x_1+x_2)+m^2+y_1y_2$

$=(ty_1+3)(ty_2+3)-m(ty_1+3+ty_2+3)+m^2+y_1y_2$

$=t^2y_1y_2+3t(y_1+y_2)+9-mt(y_1+y_2)-6m+m^2+y_1y_2$

$=(t^2+1)(-\dfrac{9}{t^2+2})+(3t-mt)(-\dfrac{6t}{t^2+2})+m^2-6m+9$

$=\dfrac{-27t^2-9+6mt^2}{t^2+2}+m^2-6m+9$

令 $\dfrac{-27t^2-9+6mt^2}{t^2+2}=\dfrac{(6m-27)t^2-9}{t^2+2}$ 为定值，

则 $\dfrac{6m-27}{1}=\dfrac{-9}{2}$，解得：$m=\dfrac{15}{4}$，

此时 $\dfrac{-27t^2-9+6mt^2}{t^2+2}=\dfrac{(6m-27)t^2-9}{t^2+2}=-\dfrac{9}{2}$ 为定值，$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}$ 也为定值，

所以存在 $M(\dfrac{15}{4},\ 0)$，使得 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}$ 为定值．

变式 2．已知 $F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$，点 P 满足 $|PF_1|-|PF_2|=2$，记点 P 的轨迹为 E，

（1）求轨迹 E 的方程；

（2）若直线 l 过点 F_2 且法向量为 $\vec{n}=(a,1)$，直线与轨迹 E 交于 P、Q 两点．

①过 P、Q 作 y 轴的垂线 PA、QB，垂足分别为 A、B，记 $|PQ|=\lambda|AB|$，试确定 λ 的取值范围；

②在 x 轴上是否存在定点 M，无论直线 l 绕点 F_2 怎样转动，使 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=0$ 恒成立？如果存在，求出定点 M；如果不存在，请说明理由．

【解析】解：（1）由 $|PF_1|-|PF_2|=2<|F_1F_2|$ 知，点 P 的轨迹是以 F_1，F_2 为焦点的双曲线的右支．

轨迹方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1(x\geqslant 1)$．

（2）直线 l 的方程为 $a(x-2)+y=0$，

由 $\begin{cases}y=-a(x-2)\\x^2-\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 得 $(a^2-3)x^2-4a^2x+4a^2+3=0$，设 $P(x_1,\ y_1)$，$Q(x_2,\ y_2)$，

由条件得 $\begin{cases}a^2-3\neq 0\\\Delta=16a^4-4(a^2-3)(4a^2+3)>0\\x_1+x_2=\dfrac{4a^2}{a^2-3}>0\\x_1x_2=\dfrac{4a^2+3}{a^2-3}>0\end{cases}$

解得 $a^2>3$ 即 $a\in(-\infty,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},+\infty)$．

①$|PQ|=\sqrt{1+a^2}\,|x_1-x_2|$，$|AB|=|y_1-y_2|=|a||x_1-x_2|$

由条件 $\vec{n}=(a,1)$，故 $x_1\neq x_2$，$\therefore\ \lambda=\dfrac{|PQ|}{|AB|}=\dfrac{\sqrt{1+a^2}}{|a|}=\sqrt{1+\dfrac{1}{a^2}}$，

因为 $a^2>3$，因此 $\lambda\in(1,\dfrac{2}{3}\sqrt{3})$．

②设存在点 $M(m,0)$ 满足条件，由

$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=(x_1-m)(x_2-m)+y_1y_2=(a^2+1)x_1x_2-(2a^2+m)(x_1+x_2)+m^2+4a^2$

$=\dfrac{3-(4m+5)a^2}{a^2-3}+m^2=0$，

得 $3(1-m^2)+a^2(m^2-4m-5)=0$ 对任意 $a^2>3$ 恒成立，

所以 $\begin{cases}1-m^2=0\\m^2-4m-5=0\end{cases}$，解得 $m=-1$，

因此存在定点 $M(-1,0)$ 满足条件．

变式 3．已知双曲线 $E:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的焦距为 4，以原点为圆心，实半轴长为半径的圆和直线

$x-y+\sqrt{6}=0$ 相切.

（Ⅰ）求双曲线 E 的方程；

（Ⅱ）已知点 F 为双曲线 E 的左焦点，试问在 x 轴上是否存在一定点 M，过点 M 任意作一条直线 l 交双曲线 E 于 P，Q 两点，使 $\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}$ 为定值？若存在，求出此定值和所有的定点 M 的坐标；若不存在，请说明理由.

【解析】解：（Ⅰ）原点到直线 $x-y+\sqrt{6}=0$ 的距离 $d=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}$，

$\therefore c=2,a=\sqrt{3}$，$\therefore b=1$，

$\therefore$ 双曲线 E 的方程为 $E:\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$；

（Ⅱ）解法一：假设存在点 $M(m,0)$ 满足条件，

①当直线 l 方程为 $y=0$ 时，则 $P(-\sqrt{3},0),Q(\sqrt{3},0),F(-2,0)$，$\therefore$

$\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}=(-\sqrt{3}+2,0)\cdot(\sqrt{3}+2,0)=1$；

②当直线 l 方程不是 $y=0$ 时，可设直线 $l:x=ty+m$，$(t\neq\pm\sqrt{3})$ 代入 $E:\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$

整理得 $(t^2-3)y^2+2mty+m^2-3=0\ (t\neq\pm\sqrt{3})$，*

由△ >0 得 $m^2+t^2>3$，

设方程*的两个根为 y_1，y_2，满足 $y_1+y_2=-\dfrac{2mt}{t^2-3},y_1y_2=\dfrac{m^2-3}{t^2-3}$，$\therefore$

$\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}=(ty_1+m+2,y_1)\cdot(ty_2+m+2,y_2)=(t^2+1)y_1y_2+t(m+2)(y_1+y_2)+(m+2)^2=\dfrac{t^2-2m^2-12m-15}{t^2-3}$

，

当且仅当 $2m^2+12m+15=3$ 时，$\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}$ 为定值 1，

解得 $m=-3\pm\sqrt{3}$，

$\because m=-3+\sqrt{3}$ 不满足对任意 $t\neq\pm\sqrt{3}$，△ >0，$\therefore$ 不合题意，舍去.

而且 $m=-3-\sqrt{3}$ 满足△ >0；

综上得：过定点 $M(-3-\sqrt{3},0)$ 任意作一条直线 l 交双曲线 E 于 P，Q 两点，使 $\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}$ 为定值 1.

解法二：前同解法一，得 $\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}=\dfrac{t^2-2m^2-12m-15}{t^2-3}$，

由 $\dfrac{t^2-2m^2-12m-15}{t^2-3}=1\Rightarrow 2m^2+12m+15=3$，

解得 $m=-3\pm\sqrt{3}$，下同解法一.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：
https://d.book118.com/106035231100010135