

## 【新结构】江苏省南通市 2024 届新高考适应性调研试题

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑; 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在试卷上无效。
3. 考试结束后, 本试卷和答题卡一并交回。

一、单选题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 数据 68,70,80,88,89,90,96,98 的第 15 百分位数为 ( )

- A. 69                                      B. 70                                      C. 75                                      D. 96

2. 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的渐近线方程为  $y = \pm 3x$ , 则双曲线的离心率是

( )

- A.  $\sqrt{10}$                                       B.  $\frac{\sqrt{10}}{10}$                                       C.  $\frac{3\sqrt{10}}{10}$                                       D.  $3\sqrt{10}$

3. 等差数列  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和分别记为  $S_n$  与  $T_n$ , 若  $\frac{S_{2n}}{T_n} = \frac{8n}{3n+5}$ , 则  $\frac{a_2+a_9}{b_3} =$  ( )

- A.  $\frac{12}{7}$                                       B.  $\frac{32}{17}$                                       C.  $\frac{16}{7}$                                       D. 2

4. 已知  $\alpha, \beta$  是两个平面,  $m, n$  是两条直线, 则下列命题错误的是 ( )

- A. 如果  $\alpha // \beta, n \subset \alpha$ , 那么  $n // \beta$
- B. 如果  $m \perp \alpha, n // \alpha$ , 那么  $m \perp n$
- C. 如果  $m // n, m \perp \alpha$ , 那么  $n \perp \alpha$
- D. 如果  $m \perp n, m \perp \alpha, n // \beta$ , 那么  $\alpha \perp \beta$

5. 为了更好的了解党的历史, 宣传党的知识, 传颂英雄事迹, 某校团委 6 人组建了“党史宣讲”、“歌曲演唱”、“诗歌创作”三个小组, 每组 2 人, 其中甲不会唱歌, 乙不能胜任诗歌创作, 则组建方法有种 ( )

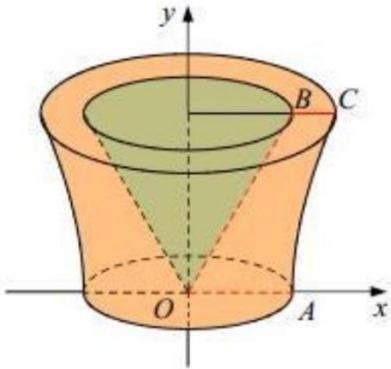
- A. 60                                      B. 72                                      C. 30                                      D. 42

6. 已知直线  $l_1: (m-1)x + my + 3 = 0$  与直线  $l_2: (m-1)x + 2y - 1 = 0$  平行, 则“ $m = 2$ ”是“ $l_1$  平行于  $l_2$ ”的

( )



和点C为直线 $y = \sqrt{3}$ 分别与双曲线一条渐近线及右支的交点，则线段BC旋转一周所得的图形的面积是\_\_\_\_\_，几何体 $\Gamma$ 的体积为\_\_\_\_\_。



14. 已知 $X$ 为包含 $v$ 个元素的集合( $v \in \mathbb{N}^*, v \geq 3$ ). 设 $A$ 为由 $X$ 的一些三元子集(含有三个元素的子集)组成的集合, 使得 $X$ 中的任意两个不同的元素, 都恰好同时包含在唯一的一个三元子集中, 则称 $(X, A)$ 组成一个 $v$ 阶的Steiner三元系. 若 $(X, A)$ 为一个7阶的Steiner三元系, 则集合 $A$ 中元素的个数为\_\_\_\_\_.

四、解答题: 本题共5小题, 共77分。解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤。

15. (本小题 13 分)

已知函数 $f(x) = \ln x + ax - a^2 x^2 (a \geq 0)$ .

(1) 若 $x = 1$  是函数 $y = f(x)$ 的极值点, 求 $a$ 的值;

(2) 求函数 $y = f(x)$ 的单调区间.

16. (本小题 15 分)

$A, B, C, D$ 四人进行羽毛球单打循环练习赛, 其中每局有两人比赛, 每局比赛结束时, 负的一方下场, 第1局由 $A, B$ 对赛, 接下来按照 $C, D$ 的顺序上场第2局、第3局(来替换负的那个人), 每次负的人其上场顺序排到另外2个等待上场的人之后(即排到最后一个), 需要再等2局(即下场后的第3局)才能参加下一场练习赛. 设各局中双方获胜的概率均为 $\frac{1}{2}$ , 各局比赛的结果相互独立.

(1) 求前4局 $A$ 都不下场的概率;

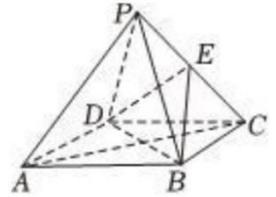
(2) 用 $X$ 表示前4局中 $B$ 获胜的次数, 求 $X$ 的分布列和数学期望.

17. (本小题 15 分)

四棱锥 $P - ABCD$ 中, 四边形 $ABCD$ 为菱形,  $AD = 2$ ,  $\angle BAD = 60^\circ$ , 平面 $PBD \perp$ 平面 $ABCD$ .

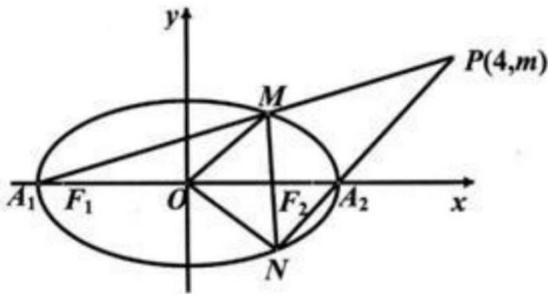
(1) 证明:  $PB \perp AC$ ;

(2)若 $PB = PD$ ，且 $PA$ 与平面 $ABCD$ 成角为 $60^\circ$ ，点 $E$ 在棱 $PC$ 上，且 $\overrightarrow{PE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PC}$ ，求平面 $EBD$ 与平面 $BCD$ 的夹角的余弦值.



18.(本小题 17 分)

如图，已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点分别为 $A_1, A_2$ ，左右焦点分别为 $F_1, F_2$ ，离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $|F_1F_2| = 2\sqrt{3}$ ， $O$ 为坐标原点.



(I)求椭圆 $C$ 的方程;

(II)设过点 $P(4, m)$ 的直线 $PA_1, PA_2$ 与椭圆分别交于点 $M, N$ ，其中 $m > 0$ ，求 $\triangle OMN$ 的面积 $S$ 的最大值.

19.(本小题 17 分)

已知 $A_m = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,m} \end{pmatrix} (m \geq 2)$ 是 $m^2$ 个正整数组成的 $m$ 行 $m$ 列的数表，当 $1 \leq i < s \leq m, 1 \leq$

$j < t \leq m$ 时，记 $d(a_{i,j}, a_{s,t}) = |a_{i,j} - a_{s,j}| + |a_{s,j} - a_{s,t}|$ . 设 $n \in \mathbb{N}^*$ ，若 $A_m$ 满足如下两个性质：

- ① $a_{i,j} \in \{1, 2, 3, \dots, n\} (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, m)$ ;
- ②对任意 $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ，存在 $i \in \{1, 2, \dots, m\}, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ ，使得 $a_{i,j} = k$ ，则称 $A_m$ 为 $\Gamma_n$ 数表.

(1)判断 $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 是否为 $\Gamma_3$ 数表，并求 $d(a_{1,1}, a_{2,2}) + d(a_{2,2}, a_{3,3})$ 的值;

(2)若 $\Gamma_2$ 数表 $A_4$ 满足 $d(a_{i,j}, a_{i+1,j+1}) = 1 (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3)$ ，求 $A_4$ 中各数之和的最小值;

(3)证明：对任意 $\Gamma_4$ 数表 $A_{10}$ ，存在 $1 \leq i < s \leq 10, 1 \leq j < t \leq 10$ ，使得 $d(a_{i,j}, a_{s,t}) = 0$ .

# 【新结构】江苏省南通市 2024 届新高考适应性调研试题

## 答案和解析

### 【答案】

1. B    2. A    3. D    4. D    5. D    6. B    7. B

8. A

9. BC    10. BD    11. ACD

12. 18

13.  $\pi$  ;  $\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi$

14. 7

15. 解: (1) 函数定义域为  $(0, +\infty)$ ,  $f(x) = \frac{-2a^2x^2 + ax + 1}{x}$

因为  $x=1$  是函数  $y=f(x)$  的极值点, 所以  $f'(1) = 1 + a - 2a^2 = 0$ , 解得  $a = -\frac{1}{2}$  或  $a=1$ ,

因为  $a \geq 0$ , 所以

此时  $f'(x) = \frac{-2x^2 + x + 1}{x} = -\frac{(x+1)(x-1)}{x}$

$f'(x) > 0$  得  $0 < x < 1$  函数单调递增,  $f'(x) < 0$  得  $x > 1$  函数单调递减,

所以  $x=1$  是函数的极大值.

所以  $a=1$ .

(2) 若  $a=0$ ,  $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$ ,

则函数  $f(x)$  的单调增区间为  $(0, +\infty)$ ;

若  $a > 0$ ,  $f'(x) = \frac{-2a^2x^2 + ax + 1}{x} = \frac{(2ax+1)(-ax+1)}{x}$ ,

因为  $a > 0$ ,  $x > 0$ , 则  $2ax+1 > 0$ ,

由  $f'(x) > 0$ , 结合函数的定义域, 可得  $0 < x < \frac{1}{a}$ ;

由  $f'(x) < 0$ , 可得  $x > \frac{1}{a}$ ;

$\therefore$  函数的单调增区间为  $(0, \frac{1}{a})$ ;  $\frac{1}{a}$  单调减区间为  $(\frac{1}{a}, +\infty)$ .

综上所述: 当  $a=0$  时, 函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 无递减;

当  $a>0$  时, 函数  $f(x)$  在  $(0, \frac{1}{a})$  上单调递增, 在  $(\frac{1}{a}, +\infty)$  上单调递减.

16. 解: (1) 前 4 局  $A$  都不下场说明前 4 局  $A$  都获胜,

故前 4 局  $A$  都不下场的概率为  $P = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$ .

(2)  $X$  的所有可能取值为 0, 1, 2, 3, 4,

其中,  $X=0$  表示第 1 局  $B$  输, 第 4 局是  $B$  上场, 且  $B$  输, 则  $P(X=0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ;

$X=1$  表示第 1 局  $B$  输, 第 4 局是  $B$  上场, 且  $B$  赢; 或第 1 局  $B$  赢, 且第 2 局  $B$  输,

则  $P(X=1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ;

$X=2$  表示第 1 局  $B$  赢, 且第 2 局  $B$  赢, 第 3 局  $B$  输,

则  $P(X=2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ ;

$X=3$  表示第 1 局  $B$  赢, 且第 2 局  $B$  赢, 第 3 局  $B$  赢, 第 4 局  $B$  输,

则  $P(X=3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$ ;

$X=4$  表示第 1 局  $B$  赢, 且第 2 局  $B$  赢, 第 3 局  $B$  赢, 第 4 局  $B$  赢,

则  $P(X=4) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$ .

所以  $X$  的分布列为

|     |               |               |               |                |                |
|-----|---------------|---------------|---------------|----------------|----------------|
| $X$ | 0             | 1             | 2             | 3              | 4              |
| $P$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |

故  $X$  的数学期望为  $E(X) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{1}{16} + 4 \times \frac{1}{16} = \frac{19}{16}$ .

17. 解: (1) 证明: 因为四边形  $ABCD$  为菱形,

所以  $BD \perp AC$ ,

因为平面  $PBD \perp$  平面  $ABCD$ , 平面  $PBD \cap$  平面  $ABCD = BD$ ,  $AC \subset$  平面  $ABCD$ ,

所以  $AC \perp$  平面  $PBD$ ,

因为  $PB \subset$  平面  $PBD$ , 故  $AC \perp PB$ .

(2) 设  $AC \cap BD = O$ , 则  $O$  为  $AC$ 、 $BD$  的中点,

又因为  $PB = PD$ ,

所以  $PO \perp BD$ ,

又因为  $AC \perp$  平面  $PBD$ ,  $PO \subset$  平面  $PBD$ ,

所以  $PO \perp AC$ ,

因为  $AC \cap BD = O$ ,  $AC, BD \subset$  平面  $ABCD$ ,

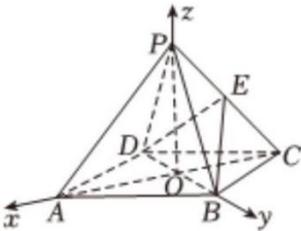
所以  $PO \perp$  平面  $ABCD$ ,

所以  $\angle PAO$  为  $PA$  与平面  $ABCD$  所成角, 故  $\angle PAO = 60^\circ$ ,

由于四边形  $ABCD$  为边长为  $AD = 2$ ,  $\angle BAD = 60^\circ$  的菱形,

所以  $AO = AD \sin 60^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ ,  $PO = AO \tan \angle PAO = \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$ ,

以点  $O$  为坐标原点,  $OA, OB, OP$  所在直线分别为  $x, y, z$  轴建立如下图所示的空间直角坐标系:



则  $A(\sqrt{3}, 0, 0)$ ,  $C(-\sqrt{3}, 0, 0)$ ,  $B(0, 1, 0)$ ,  $D(0, -1, 0)$ ,  $P(0, 0, 3)$ ,

由  $\overrightarrow{PE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PC} = \frac{1}{3}(-\sqrt{3}, 0, -3) = (-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, -1)$ ,

得  $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PE} = (0, -1, 3) + (-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, -1) = (-\frac{\sqrt{3}}{3}, -1, 2)$ , 且  $\overrightarrow{DB} = (0, 2, 0)$ ,

设平面  $BEC$  的法向量为  $m = (x, y, z)$ ,

$$\begin{cases} \overrightarrow{m} \cdot \overrightarrow{DB} = 2y = 0 \\ \overrightarrow{m} \cdot \overrightarrow{BE} = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

取  $x = 2\sqrt{3}$ , 则  $z = 1, y = 0$ ,

所以  $\overrightarrow{m} = (2\sqrt{3}, 0, 1)$ ,

又平面  $BCD$  的一个法向量为  $n = (0, 0, 1)$ ,

所以  $|\cos\langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{13} \times 1} = \frac{\sqrt{13}}{13}$ ,

所以平面  $EBD$  与平面  $BCD$  的夹角的余弦值为  $\frac{\sqrt{13}}{13}$ .

18. 解: (I)  $\because$  离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $|F_1F_2| = 2\sqrt{3}$ ,  $\therefore \begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2c = 2\sqrt{3} \end{cases}$ ,

$\therefore a = 2, c = \sqrt{3}$ , 则  $b = 1$ ,

$\therefore$  椭圆  $C$  的方程为:  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ .

(II) 由 (I) 得  $A_1(-2, 0), A_2(2, 0)$ ,

直线  $PA_1, PA_2$  的方程分别为:  $y = \frac{m}{6}(x+2), y = \frac{m}{2}(x-2)$ ,

由  $\begin{cases} y = \frac{m}{6}(x+2) \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}$  得  $(9+m^2)x^2 + 4m^2x + 4m^2 - 36 = 0$ ,

$\therefore -2 + x_M = \frac{-4m^2}{9+m^2}$ , 可得  $x_M = \frac{18-2m^2}{9+m^2}, y_M = \frac{m}{6}(x_M+2) = \frac{6m}{9+m^2}$

由  $\begin{cases} y = \frac{m}{2}(x-2) \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}$ , 可得  $(1+m^2)x^2 - 4mx + 4m^2 - 4 = 0$ ,

$\therefore 2 + x_N = \frac{4m^2}{1+m^2}$ , 可得  $x_N = \frac{2m^2-2}{1+m^2}, y_N = \frac{m}{2}(x_N-2) = \frac{-2m}{1+m^2}$ ,

$k_{MN} = \frac{y_M - y_N}{x_M - x_N} = \frac{2m}{3-m^2}$ ,

直线  $MN$  的方程为:  $y - \frac{-2m}{1+m^2} = \frac{2m}{3-m^2}(x - \frac{2m^2-2}{1+m^2})$ ,

$y = \frac{2m}{3-m^2}(x - \frac{2m^2-2}{1+m^2}) - \frac{2m}{1+m^2} = \frac{2m}{3-m^2}(x - \frac{2m^2-2}{1+m^2} - \frac{3-m^2}{1+m^2}) = \frac{2m}{3-m^2}(x-1)$ ,

可得直线  $MN$  过定点  $(1, 0)$ , 故设  $MN$  的方程为:  $x = ty + 1$ ,

由  $\begin{cases} x = ty + 1 \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}$  得  $(t^2 + 4)y^2 + 2ty - 3 = 0$ ,

设  $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ , 则  $y_1 + y_2 = \frac{-2t}{t^2 + 4}, y_1 y_2 = \frac{-3}{t^2 + 4}$ ,

$|y_1 - y_2| = \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = \frac{4\sqrt{t^2 + 3}}{t^2 + 4}$ ,

∴  $\square OMN$  的面积  $S = \frac{1}{2} \times 1 \times (y_1 - y_2) = 2 \frac{\sqrt{t^2 + 3}}{t^2 + 4}$ ,

令  $\sqrt{t^2 + 3} = d, (d \geq \sqrt{3})$ , 则  $S = \frac{2d}{d^2 + 1} = \frac{2}{d + \frac{1}{d}}$ ,

∵  $d \geq \sqrt{3}$ , 且函数  $f(d) = d + \frac{1}{d}$  在  $[\sqrt{3}, +\infty)$  递增,

∴ 当  $d = \sqrt{3}$ ,  $S$  取得最小值  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

19. 解: (1)  $A_3 = (1 \ 2 \ 3 \ 2 \ 3 \ 1 \ 2)$  是  $\Gamma_3$  数表,

$$d(a_{1,1}, a_{2,2}) + d(a_{2,2}, a_{3,3}) = 2 + 3 = 5.$$

(2) 由题可知  $d(a_{i,j}, a_{i+1,j+1}) = |a_{i,j} - a_{i+1,j+1}| + |a_{i+1,j} - a_{i+1,j+1}| = 1 \ (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3)$ .

当  $a_{i+1,j} = 1$  时, 有  $d(a_{i,j}, a_{i+1,j+1}) = |a_{i,j} - 1| + |1 - 1| = 1$ ,

所以  $a_{i,j} + a_{i+1,j+1} = 3$ .

当  $a_{i+1,j} = 2$  时, 有  $d(a_{i,j}, a_{i+1,j+1}) = |a_{i,j} - 2| + |2 - 1| = 1$ ,

所以  $a_{i,j} + a_{i+1,j+1} = 3$ .

所以  $a_{i,j} + a_{i+1,j+1} = 3 (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3)$ .

所以  $a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} + a_{4,4} = 3 + 3 = 6, a_{1,3} + a_{2,4} = 3, a_{3,1} + a_{4,2} = 3$ .

$a_{1,2} + a_{2,3} + a_{3,4} = 3 + 1 = 4$  或者  $a_{1,2} + a_{2,3} + a_{3,4} = 3 + 2 = 5$ ,

$a_{2,1} + a_{3,2} + a_{4,3} = 3 + 1 = 4$  或者  $a_{2,1} + a_{3,2} + a_{4,3} = 3 + 2 = 5$ ,

$a_{1,4} = 1$  或  $a_{1,4} = 2, a_{4,1} = 1$  或  $a_{4,1} = 2$ ,

故各数之和  $\geq 6 + 3 + 3 + 4 + 4 + 1 + 1 = 22$ ,

当  $A_4 = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2 \ 1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 1 \ 2)$  时, 各数之和取得最小值 22.

(3) 由于  $\Gamma_4$  数表  $A_{10}$  中共 100 个数字,

必然存在  $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ , 使得数表中  $k$  的个数满足  $T \geq 25$ .

设第  $i$  行中  $k$  的个数为  $r_i (i = 1, 2, \dots, 10)$ .

当  $r_i \geq 2$  时，将横向相邻两个  $k$  用从左向右的有向线段连接，

则该行有  $r_i - 1$  条有向线段，

$$\text{所以横向有向线段的起点总数 } R = \sum_{r_i \geq 2} (r_i - 1) \geq \sum_{i=1}^{10} (r_i - 1) = T - 10.$$

设第  $j$  列中  $k$  的个数为  $c_j (j=1, 2, \dots, 10)$  .

当  $c_j \geq 2$  时，将纵向相邻两个  $k$  用从上到下的有向线段连接，

则该列有  $c_j - 1$  条有向线段，

$$\text{所以纵向有向线段的起点总数 } C = \sum_{c_j \geq 2} (c_j - 1) \geq \sum_{j=1}^{10} (c_j - 1) = T - 10.$$

所以  $R + C \geq 2T - 20$  ,

因为  $T \geq 25$  , 所以  $R + C - T \geq 2T - 20 - T = T - 20 > 0$

所以必存在某个  $k$  既是横向有向线段的起点，又是纵向有向线段的终点，

即存在  $1 < u < v \leq 10, 1 < p < q \leq 10$ ,

使得  $a_{u,p} = a_{v,p} = a_{v,q} = k$  ,

所以  $d(a_{u,p}, a_{v,q}) = |a_{u,p} - a_{v,p}| + |a_{v,p} - a_{v,q}| = 0$  ,

则命题得证.

### 【解析】

#### 1. 【分析】

本题考查求百分位数，属于基础题.

根据百分位数的定义即可得到答案.

#### 【解答】

解：因为  $8 \times 15\% = 1.2$ ，根据百分位数的定义可知，该数学成绩的第 15 百分位数为第 2 个数据 70.

故选：B.

#### 2. 【分析】