2022-2023 年研究生入学《数学二》预测试题（答案解析）

第壹卷

一. 综合考点题库(共 50 题)

1. 设 A 为 4 阶实对称矩阵，且 A2＋A＝0。若 A 的秩为 3，则 A 相似于（　　）。

A. $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

A. 见图 A

B. 见图 B

C. 见图 C

D. 见图 D

正确答案：D

本题解析：

设 λ 为 A 的特征值，由于 A2＋A＝O，所以 λ2＋λ＝0，即（λ＋1）λ＝0。这样 A 的特征值为－1 或 0。由于 A 为实对称矩阵，故 A 可相似对角化，即 A～Λ，r（A）＝r（Λ）＝3。

因此

$$\Lambda=\begin{bmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{bmatrix}$$

即

$$A\sim\Lambda=\begin{bmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{bmatrix}$$

2. 已知曲线 L：y＝4x2/9（x≥0），点 O（0，0），点 A（0，1），设 P 是 L 上的动点，S 是直线 OA 与直线 AP 及曲线 L 所围成图形的面积，若 P 运动到点（3，4）时沿 x 轴正向的速度是 4，求此时 S 关于时间 t 的变化率。

正确答案：

本题解析：

设点 P（x，y），为使 S 不恒为 0，则直线 OA 与 AP 不能共线，即 x≠0，此时直线 AP 的方程为：Y＝（4x/9－1/x）X＋1（x≠0）。

设 S 所成面积为区域 D，D＝{（X，Y）|4X2/9≤Y≤（4x/9－1/x）X＋1，0≤X≤x}，则

$$S=\iint_D dXdY=\int_0^x dX\int_{\frac{4}{9}X^2}^{(\frac{4}{9}x-\frac{1}{x})X+1}dY$$

$$=\int_0^x[(\frac{4}{9}x-\frac{1}{x})X+1-\frac{4}{9}X^2]dX$$

$$=\frac{2}{27}x^3+\frac{1}{2}x$$

当 **x=3** 时，

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=3}=4$$

因此

$$\left.\frac{dS}{dt}\right|_{x=3}=\frac{dS}{dx}\cdot\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=3}=\frac{d(\frac{2}{27}x^3+\frac{1}{2}x)}{dx}\cdot\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=3}$$

$$=(\frac{2}{9}x^2+\frac{1}{2})\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=3}=(\frac{2}{9}\times 9+\frac{1}{2})\times 4$$

$$=10$$

$$\int_0^1 dy\int_0^1\sqrt{e^{2x}-y^2}\,dx+\int_1^e dy\int_{\ln y}^1\sqrt{e^{2x}-y^2}\,dx=$$

A $\frac{\pi}{8}(e^2-1)$.

B $\frac{\pi}{8}(e^2+1)$.

C $\frac{\pi}{4}(e^2-1)$.

D $\frac{\pi}{4}(e^2+1)$.

3.

A. 见图 A

B. 见图 B

C. 见图 C

D. 见图 D

正确答案：**A**

本题解析：

由积分上、下限知，积分区域 $D=D_1\cup D_2=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}\cup\{(x,y)|\ln y\leqslant x\leqslant 1,1\leqslant y\leqslant e$

原式 $=\int_0^1 dx\int_0^{e^x}\sqrt{e^{2x}-y^2}\,dy$. **而** $\int_0^{e^x}\sqrt{e^{2x}-y^2}\,dy$ **可看作圆心在原点，半径为** e^x **的** $\frac{1}{4}$ **圆的面积，为** $\frac{\pi}{4}(e^x)^2$.

原式 $=\int_0^1 dx\int_0^{e^x}\sqrt{e^{2x}-y^2}\,dy=\frac{\pi}{4}\int_0^1 e^{2x}dx=\frac{\pi}{8}(e^2-1)$.

4. 设 f（x）＝x2（x—1）（x—2），则 f′（x）的零点个数为（　　）。

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

正确答案：D

本题解析：

f′（x）＝4x3＋3x2－4x＝x（4x2＋3x－4）。令 f′（x）＝0，可得 f′（x）有三个零点。

设 $f(x)=x^2$，$f[\varphi(x)]=-x^2+2x+3$ 且 $\varphi(x)\geqslant 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum\limits_{i=1}^{n}i^2(n-i)\frac{1}{n+\varphi(x)}=$

A $\frac{1}{12}$.

B $\frac{1}{6}$.

C $\frac{1}{3}$.

D $\frac{2}{3}$.

5.

A. 见图 A

B. 见图 B

C. 见图 C

D. 见图 D

正确答案：A

本题解析：

由题设，$f[\varphi(x)]=\varphi^2(x)=-x^2+2x+3$，则 $\varphi(x)=\sqrt{-x^2+2x+3}$，其中 $-x^2+2x+3\geqslant 0$，即 $(x-3)(x+1)\leqslant 0$，有 $-1\leqslant x\leqslant 3$，此为

又 $(-x^2+2x+3)'=-2x+2\xlongequal{令}0$，解得 $x=1$，故当 $-1\leqslant x<1$ 时，导数大于 0；当 $1<x\leqslant 3$ 时，导数小于 0. 所以 $\varphi(1)=2$ 为最大值，$\varphi(-1)=\varphi(3)=0$ $\varphi(-1)=\varphi(3)=0$ 为最小值，即 $[0,2]$ 为 $\varphi(x)$ 的值域. 由

$\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\left(1-\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n+2}\leqslant$ 原式 $\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\left(1-\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}$，又因 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\left(1-\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}=\int_0^1 x^2(1-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{12}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\left(1-\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}=1\cdot\int_0^1 x^2(1-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{12}$，故由夹逼

6. 设函数 z＝f（xy，yg（x）），其中函数 f 具有二阶连续偏导数，函数 g（x）可导且在 x＝1 处取得极值 g（1）＝1，求 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1,\\y=1}}$

正确答案：

本题解析：

由 g（x）可导且在 x＝1 处取极值 g（1）＝1，所以 g′（1）＝0。又因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'(xy,yg(x))y+f_2'yg(x)$$

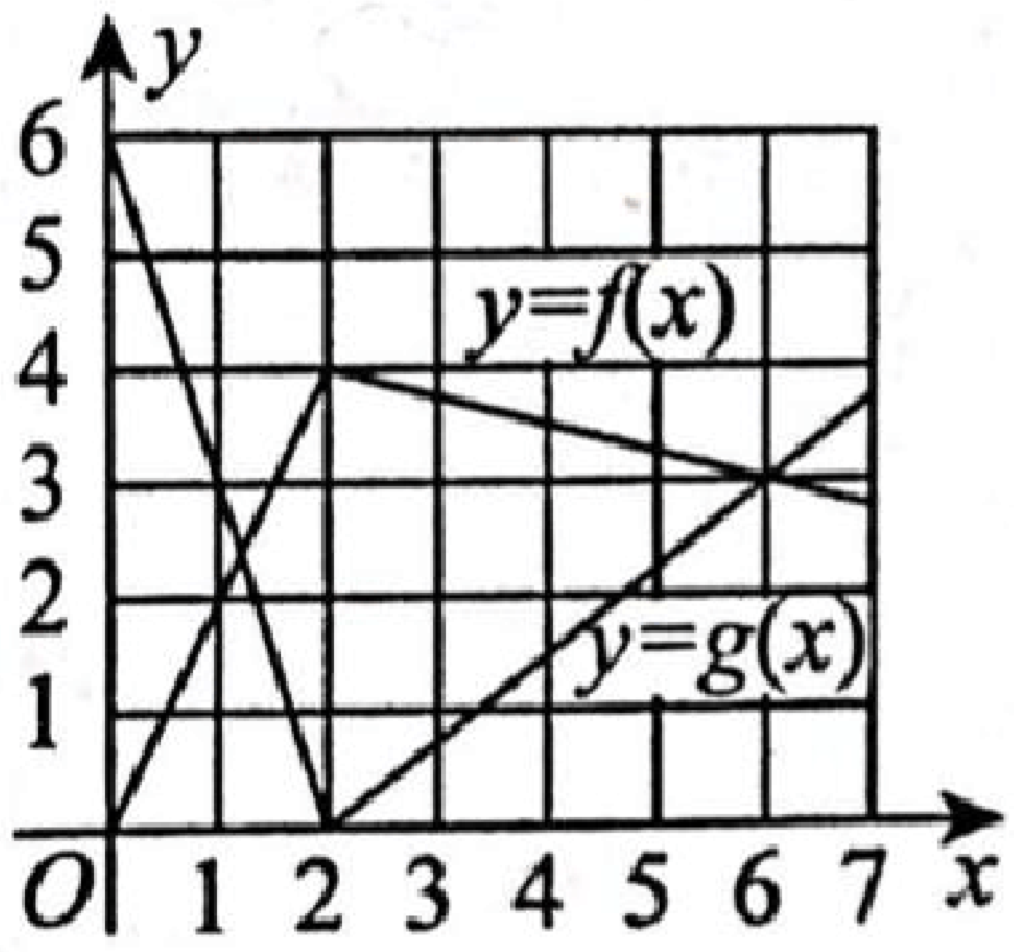
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'(xy,yg(x))+y[xf_{11}''(xy,yg(x))+g(x)f_{12}''(xy,yg(x))]+gf_2'(xy,yg(x))$$

$$+yg'(x)[xf_{21}''(xy,yg(x))+g(x)f_{22}''(xy,yg(x))]$$

所以当 x＝1，y＝1 时

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=f_1'(1,1)+f_{11}''(1,1)+f_{12}''(1,1)$$

7. f(x)与g(x)的图像如图所示，设u(x)=f[g(x)]，则 $u'(1)=$________.



正确答案：

本题解析：

由 $u'(x)=f'[g(x)]\cdot g'(x)$，有 $u'(1)=f'[g(1)]g'(1)$，其中 $g(1)=3, g'(1)=\frac{0-6}{2-0}=-3$，f 故 $u'(1)=f'(3)\cdot g'(1)=-$

8. 设m，n为正整数，则反常积分 $\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 的收敛性（　　）。

A. 仅与m取值有关

B. 仅与n取值有关

C. 与m，n取值都有关

D. 与m，n取值都无关

正确答案：D

本题解析：

分析过程如下。根据题目有

$$\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$$

①对 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 进行讨论：被积函数只在 **x→0**＋时无界。因为

$$\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\ge 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}=0$$

又反常积分 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt[n]{x}}dx$ 收敛，所以 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 收敛。

②对 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 进行讨论：被积函数只在 **x→1**－时无界。因为

$$\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\ge 0$$

$$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x}\,\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}=0$$

且反常积分 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$ 收敛，所以 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 收敛。

综上，无论正整数 **m** 和 **n** 取何值，反常积分 $\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 都收敛，故选 **D**。

9. 已知函数 f（x）在[0，1]上具有 2 阶导数，且 f（0）＝0，f（1）＝1，$\int_0^1 f(x)dx=1$，证明：

（Ⅰ）存在 ξ∈（0，1），使得 f′（ξ）＝0;

（Ⅱ）存在 η∈（0，1），使得 f″（η）＜－2。

正确答案：

本题解析：

证明：（Ⅰ）因为f（x）在[0，1]上具有2阶导数，所以f（x）在[0，1]上连续，因此f（x）在[0，1]上必然取得最大值，记最大值点为ξ，下证ξ≠0且ξ≠1。

因为

$$\int_0^1 f(x)dx=1$$

则必有f（ξ）＞1，反之若不成立，即对一切x∈[0，1]，都有f（x）≤1，又由f（0）＝0，推得

$$\int_0^1 f(x)dx<1$$

与题设矛盾。

所以f（ξ）＞1，因此ξ≠0且ξ≠1。结合ξ为连续函数f（x）在[0，1]上的最大值点，ξ≠0且ξ≠1，可得f′（ξ）＝0。

（Ⅱ）因为f（x）在[0，1]上具有2阶导数，根据（1）中所设，可得函数f（x）在点ξ的泰勒展开式

$$f(x)=f(\xi)+f'(\xi)(x-\xi)+\frac{f''(\eta)}{2!}(x-\xi)^2$$

令x＝0，有0＝f（ξ）＋f″（η）$\xi^2/2!$，则f″（η）＝（－2）f（ξ）$/\xi^2$。由于f（ξ）＞1，所以$[f(\xi)/\xi^2]>1$，所以f″（η）＜－2。

10. 在下列微分方程中，以 y＝C1ex＋C2cos2x＋C3sin2x（C1，C2，C3 为任意的常数）为通解的是（　　）。

A. y?＋y″－4y′－4y＝0

B. y?＋y″＋4y′＋4y＝0

C. y?－y″－4y′＋4y＝0

D. y?－y″＋4y′－4y＝0

正确答案：**D**

本题解析：

由 **y＝C1ex＋C2cos2x＋C3sin2x**，可知其特征根为 **λ1＝1**，**λ2**，**3＝±2i**，故对应的特征值方程为（**λ－1**）（**λ＋2i**）（**λ－2i**）＝（**λ－1**）（**λ2＋4**）＝**λ3－λ2＋4λ－4**

所以所求微分方程为 **y?－y″＋4y′－4y＝0**。

11. 下列函数中，在 x＝0 处不可导的是（　　）。

A. f（x）＝|x|sin|x|

B. $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$

C. f（x）＝cos|x|

D. $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$

A. 见图 A

B. 见图 B

C. 见图 C

D. 见图 D

正确答案：D

本题解析：

计算如下A项

$$f_-'(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{|x|\sin|x|}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{(-x)(-\sin x)}{x}=0$$

$$f_+'(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{|x|\sin|x|}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x\sin x}{x}=0$$

可得f₋'(0)=f₊'(0)，f(x)在x=0处可导；

B项

$$f_-'(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{|x|\sin\sqrt{|x|}}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-x\cdot\sin\sqrt{-x}}{x}=0$$

$$f_+'(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{|x|\sin\sqrt{|x|}}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x\cdot\sin\sqrt{x}}{x}=0$$

可得f₋'(0)=f₊'(0)，f(x)在x=0处可导；

C项

$$f_-'(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{\cos|x|-1}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x}=0$$

$$f_+'(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{\cos|x|-1}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x}=0$$

可得f₋'(0)=f₊'(0)，f(x)在x=0处可导；

D项

$$f_-'(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-\frac{1}{2}(-x)}{x}=\frac{1}{2}$$

$$f_+'(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{2}x}{x}=-\frac{1}{2}$$

可得f₋'(0)≠f₊'(0)，f(x)在x=0处不可导。

12.

设函数f(x)连续，$\forall a_1, a_{n+1}=f(a_n), n=1,2,3,\cdots$. 关于下列两个结论：①若 $f(x)$ 严格单增且有上界，②若 $f(x)$ 严格单减且有界，则正确的选项是

A. 仅①正确

B. 仅②正确

C. ①②正确

D. ①②都错误

正确答案：D

本题解析：

对于①，取 $f(x)=\begin{cases}\arctan x, & x\geqslant 0,\\ 2x, & x<0,\end{cases}$ 满足条件. 令 $a_1=-1$，则 $a_2=-2,\cdots,a_n=-2^{n-1}$，$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=-\infty$，数列

对于②，取 $f(x)=-\frac{4}{\pi}\arctan x$，满足条件.

令 $a_1=1$，则 $a_2=-1,\cdots,a_n=(-1)^{n-1}$，$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$ 不存在，数列 $\{a_n\}$ 不收敛，②错误.

13. 设

$$z=\frac{y}{x}f(xy)$$

其中函数 f 可微，则 $\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=$ （　　）。

A. 2yf′（xy）

B. －2yf′（xy）

C. 2f（xy）/x

D. －2f（xy）/x

正确答案：**A**

本题解析：

由 $z=\frac{y}{x}f(xy)$ 有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}f(xy)+\frac{y^2}{x}f'(xy)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}f(xy)+yf'(xy)$$

所以

$$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{x}f(xy)+yf'(xy)+\frac{1}{x}f(xy)+yf'(xy)=2yf'(xy)$$

14.

设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)=0$ 确定，其中 F 为可微函数，且 l

则 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$ (

A. x

B. y

C. z

D. 0

正确答案：**C**

本题解析：

【分析】 方程 $F\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)=0$ 两边同时对 x 求偏导数，得

$$F_1'\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)+F_2'\cdot\frac{x\frac{\partial z}{\partial x}-z}{x^2}=0,$$

解得 $x\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{zF_2'+yF_1'}{F_2'}.$

将方程两边同时对 y 求偏导数，得

$$F_1'\cdot\frac{1}{x}+F_2'\cdot\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{x}=0,$$

解得 $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_1'}{F_2'}.$

于是 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{zF_2'}{F_2'}=z.$

15. 设函数 f（x）在区间[－2，2]上可导，且 f′（x）＞f（x）＞0，则（　　）。

A. f（－2）/f（－1）＞1

B. f（0）/f（－1）＞e

C. f（1）/f（－1）＜e2

D. f（2）/f（—1）＜e2

正确答案：B

本题解析：

因 f′（x）＞f（x）＞0，f′（x）—f（x）＞0，从而 e—x[f′（x）—f（x）]＞0，即[e—xf（x）]′＞0。从而 e—xf（x）在[—2，2]上单调递增，故 e—0f（0）＞e1f（—1），得 f（0）＞ef（—1）。
又 f（x）＞0，故 f（0）/f（—1）＞e，故应选 B 项。
由 e—1f（1）＞e1f（—1），得 f（1）/f（—1）＞e2，选项 C 错误；
由 e—2f（2）＞e1f（—1），得 f（2）/f（—1）＞e2，选项 D 错误；
对于选项 A，因 f′（x）＞0，故 f（x）单调递增，从而 f（—1）＞f（—2），得 f（—2）/f（—1）＜1，选项 A 错误。

16. 设 A 为 3 阶矩阵，将 A 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 B，再交换 B 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵。记

$$P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

则 A＝（　　）。

A. P1P2

B. P1—1P2

C. P2P1

D. P2P1—1

正确答案：D

本题解析：

显然$P_2AP_1=EP_2AP_1=E$，$A=P_2^{-1}P_1^{-1}$，因为$P_2^{-1}=P_2$，所以$A=P_2P_1^{-1}$，故选D项。

17. 曲线 $y=e^{-\frac{1}{x}}+\sqrt{x^2-x+1}$ 的斜渐近线的条数为

A. 0 条

B. 1 条

C. 2 条

D. 3 条

正确答案：C

本题解析：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}+\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}\right)=0+1=1,\quad \lim_{x\to+\infty}(y-x)=\lim_{x\to+\infty}(e^{-\frac{1}{x}}+\sqrt{x^2-x+1}-x)$$

有一条斜渐近线 $y=x+\frac{1}{2}$.又 $\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}+\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}\right)=0-1=-1$，$\lim_{x\to-\infty}(y+x)=\lim_{x\to-\infty}$

$=1+$

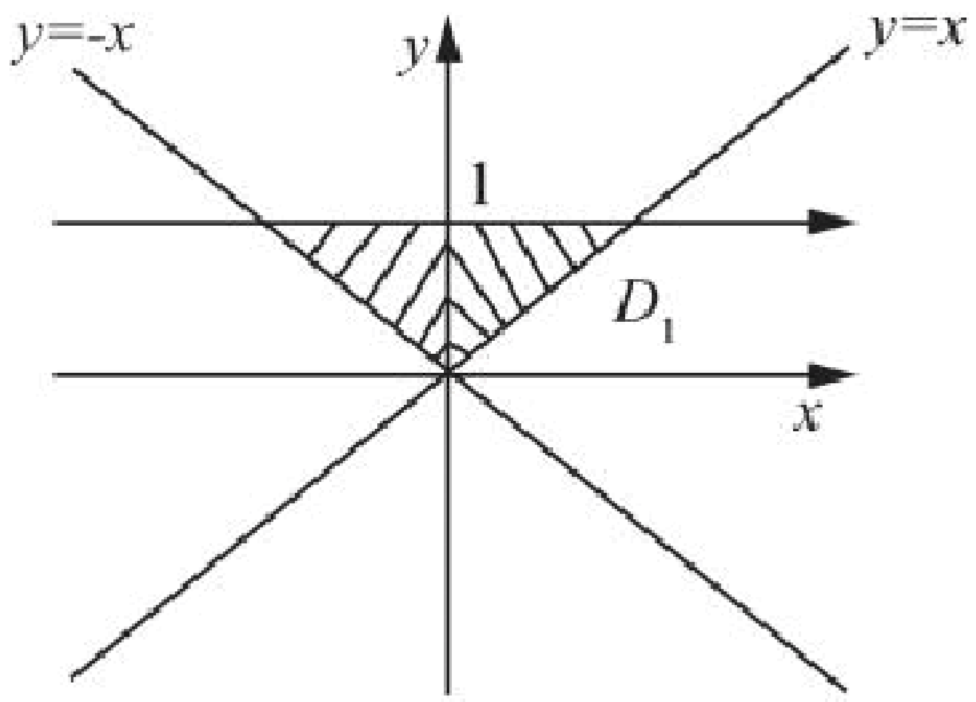
$$=1+\lim_{x\to-\infty}\frac{-1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$，又有一条斜渐近线 $y=-x+\frac{3}{2}$.

18. 设 D 是由直线 y＝1，y＝x，y＝－x 围成的有界区域，计算二重积分 $\iint_D\frac{x^2-xy-y^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

正确答案：

本题解析：

由题可画出积分区域 **D**，如图 **3** 中阴影部分所示，可见 **D** 关于 **y** 轴对称。



又因为（x^2-y^2）/（x^2+y^2）是关于x的偶函数，xy/（x^2+y^2）是关于x的奇函数，则

$$\iint_D\frac{x^2-xy-y^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_D\frac{xy}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\iint_{D_1}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-0=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\sin\theta}}\frac{r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta}{r^2}r\mathrm{d}r$$

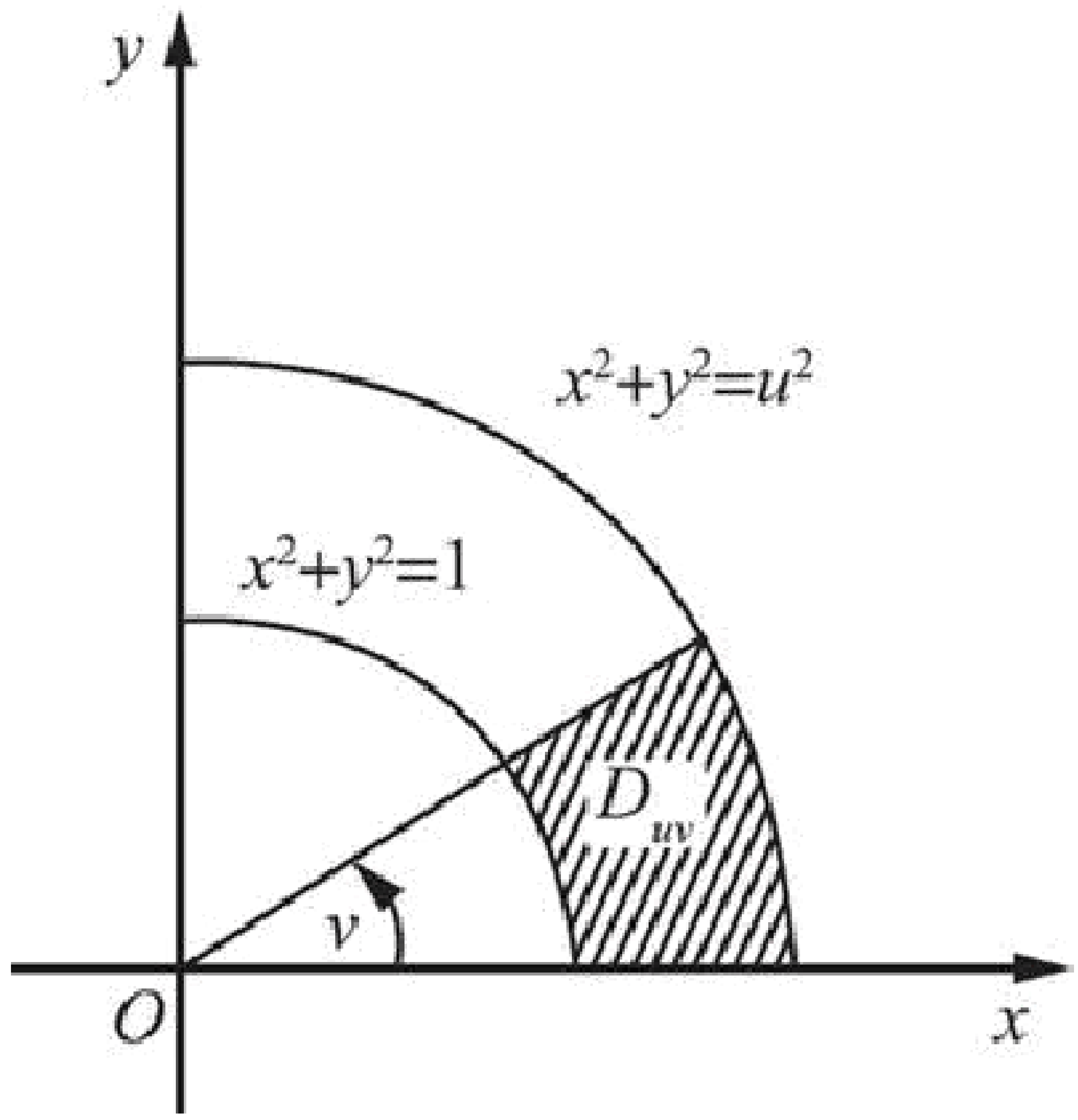
$$=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\sin\theta}}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)r\mathrm{d}r=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\frac{1}{\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta-\frac{\pi}{4}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\csc^2\theta\mathrm{d}\theta-\frac{\pi}{2}=-\cot\theta\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}=1-\frac{\pi}{2}$$

19. 设函数 f（x）连续，

$$F(u,v)=\iint_{D_{uv}}\frac{f(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中区域 Duv 如图 2 阴影部分所示，则?F/?u＝（　　）。



A. vf（u2）

B. vf（u）

C. vf（u2）/u

D. vf（u）/u

正确答案：**A**

本题解析：

利用极坐标，得

$$F\left(u,v\right)=\iint_{D_{uv}}\frac{f\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^v\mathrm{d}\theta\int_1^u\frac{f\left(r^2\right)}{r}r\mathrm{d}r=v\int_1^u f\left(r^2\right)\mathrm{d}r$$

所以**?F/?u＝vf（u2）**。

20. $$设\ f(x)=\begin{cases}e^x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}\quad F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)\mathrm{d}t,$$ 则 F（x）在 x=0 处

A. 极限不存在

B. 极限存在但不连续

C. 连续但不可导

D. 可导

正确答案：**C**

本题解析：

法一：写出F（x)的表达式进行讨论.由f(x)的表达式知，当 $x<0$ 时，$F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{x}(-t)\mathrm{d}t=-$

$$=\int_{-1}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{0}f(t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-1}^{0}(-t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}e^t\mathrm{d}t=-\frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{0}+e^t\Big|_{0}^{x}$$ 故 $$F(x)=\begin{cases}-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}, & x<0,\\ e^x-\frac{1}{2}, & x\geqslant 0.\end{cases}$$ 由上式可知F(x)在x=0处连续.再

$$=\frac{1}{2}+e^x-1=e^x-\frac{1}{2}.$$

$$F'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{x-0}=0,$$

$$F'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{x-0}=1.$$

21. 反常积分① $\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$，② $\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$ 的敛散性为（　　）。

A. ①收敛，②收敛

B. ①收敛，②发散

C. ①发散，②收敛

D. ①发散，②发散

正确答案：**B**

本题解析：

由

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx=-e^{\frac{1}{x}}\Big|_{-\infty}^{0}=1$$

得 $\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$ 收敛；由

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx=-e^{\frac{1}{x}}\Big|_{0}^{+\infty}=+\infty$$

得 $\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$ 发散。

22.设 A，B 为三阶矩阵且 A 不可逆，又 AB+2B=0 且 r（B）=2，则 |A+4E|=

A.8

B.16

C.2

D.0

正确答案：B

本题解析：

令 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，由 $AB+2B=O$ 得 $A\alpha_i=-2\alpha_i\ (i=1,2,3)$，

由 $r(B)=2$ 得 $\lambda=-2$ 至少为 A 的二重特征值，

又由 $r(A)<3$ 得 $\lambda_3=0$，故 $\lambda_1=\lambda_2=-2,\lambda_3=0$，

$A+4E$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=4$，故 $|A+4E|=16$. 应选(B).

23.设函数 fi（x）（i＝1，2）具有二阶连续导数，且 fi″（x0）＜0（i＝1，2），若两条曲线 y＝fi（x）（i＝1，2）在点（x0，y0）处具有公切线 y＝g（x），且在该点处曲线 y＝f1（x）的曲率大于曲线 y＝f2（x）的曲率，则在 x0 的某个邻域内，有（　　）。

A.f1（x）≤f2（x）≤g（x）

B.f2（x）≤f1（x）≤g（x）

C.f1（x）≤g（x）≤f2（x）

D.f2（x）≤g（x）≤f1（x）

正确答案：A

本题解析：

由题可知，f1（x0）＝f2（x0）＝g（x0），f1′（x0）＝f2′（x0）＝g′（x0），且根据曲率大小关系有 f1″（x0）＜f2″（x0），g″（x0）＝0。

令 F（x）＝f1（x）－f2（x），则 F（x0）＝0，F′（x0）＝f1′（x0）－f2′（x0）＝0，F″（x0）＝f1″（x0）－f1″（x0）＜0。所以，F（x0）＝0 为 F（x）的一个极大值，即在 x0 的某个邻域内 F（x）≤0，也即 f1（x）≤f2（x）。

同理设 G（x）＝fi（x）－g（x）（i＝1，2），可得在 x0 的某个邻域内 G（x）≤0，也即 fi（x）≤g（x）。

综上，在 x0 的某个邻域内，f1（x）≤f2（x）≤g（x）。

24.设平面区域 D 由直线 x＝1，x＝2，y＝x 与 x 轴所围，计算 $\iint_D\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}dxdy$

正确答案：

本题解析：

$$\iint_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \frac{r}{\cos\theta}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta}} \frac{r}{\cos\theta}\mathrm{d}r = \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta\mathrm{d}\theta$$

因为

$$\int\sec^3\theta\mathrm{d}\theta = \int\sec\theta\mathrm{d}\tan\theta = \sec\theta\tan\theta - \int\tan\theta\mathrm{d}\sec\theta = \sec\theta\tan\theta - \int\tan^2\theta\sec\theta\mathrm{d}\theta$$

$$= \sec\theta\tan\theta - \int(\sec^2\theta-1)\sec\theta\mathrm{d}\theta = \sec\theta\tan\theta - \int\sec^3\theta\mathrm{d}\theta + \int\sec\theta\mathrm{d}\theta$$

$$= \sec\theta\tan\theta - \int\sec^3\theta\mathrm{d}\theta + \ln|\sec\theta+\tan\theta|$$

所以

$$\int\sec^3\theta\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta + \frac{1}{2}\ln|\sec\theta+\tan\theta| + C$$

从而

$$\iint_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{3}{4}\left(\sec\theta\tan\theta+\ln|\sec\theta+\tan\theta|\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3}{4}\left[\sqrt{2}+\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right]$$

25.设函数f（x）在区间[0，1]上具有2阶导数，且f（1）＞0，$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}<0$，证明：

（Ⅰ）方程f（x）＝0在区间（0，1）内至少存在一个实根；

（Ⅱ）方程f（x）f″（x）＋[f′（x）]2＝0在区间（0，1）内至少存在两个不同实根。

正确答案：

本题解析：

证明：Ⅰ）因为

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}<0$$

由函数极限的局部保号性知，存在δ>0，使得当c∈（0，δ）时，有f（c）＜0。又因为f（1）>0，由零点定理知，存在ξ∈（c，1），使得f（ξ）＝0，得证。

（Ⅱ）构造函数F（x）＝f（x）f′（x）。

由

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}<0$$

可知

$$f(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}\cdot x=0$$

又由（Ⅰ）知，存在x_0∈（0，1）使得f（x_0）＝0。

由罗尔定理知，存在ξ_1∈（0，x_0），使得f′（ξ_1）＝0，得F（0）＝F（ξ_1）＝F（x_0）。再由罗尔定理知：存在ξ_2∈（0，ξ_1），ξ_3∈（ξ_1，x_0），使得F′（ξ_2）＝F′（ξ_3）＝0。

方程f（x）f″（x）＋[f′（x）]^2＝0在（0，x_0）⊂（0，1）内有两个不同的实根。

26.设函数

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, 0\le x<\pi\\ 2, \quad \pi\le x\le 2\pi\end{cases}$$

$$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

则（　　）。

A.x＝π是函数F（x）的跳跃间断点

B.x＝π是函数F（x）的可去间断点

C.F（x）在x＝π处连续但不可导

D.F（x）在x＝π处可导