2024 届北京市西城区数学高三上期末学业质量监测试题

注意事项：

1． 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚，将条形码准确粘贴在考生信息条形码粘贴区。
2．选择题必须使用 2B 铅笔填涂；非选择题必须使用 0．5 毫米黑色字迹的签字笔书写，字体工整、笔迹清楚。
3．请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。
4．保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．正 ΔABC 的边长为 2，将它沿 BC 边上的高 AD 翻折，使点 B 与点 C 间的距离为 $\sqrt{3}$，此时四面体 $A-BCD$ 的外接球表面积为（　　）

A． $\frac{10\pi}{3}$　　B． 4π　　C． $\frac{13\pi}{3}$　　D． 7π

2．在 $(1-x)^5+(1-x)^6+(1-x)^7+(1-x)^8$ 的展开式中，含 x^3 的项的系数是（　　）

A． 74　　B． 121　　C． -74　　D． -121

3．“$\sin x=\frac{1}{2}$”是“$x=2k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in Z)$”的（　　）

A． 充分不必要条件　　B． 必要不充分条件

C． 充要条件　　D． 既不充分也不必要条件

4．已知函数 $f\left(x\right)=2\sin\left(\omega x+\varphi\right)\left(\omega>0,0<\varphi<\pi\right)$，$f\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ 且在 $\left(0,\pi\right)$ 上是单调函数，则下列说法正确的是（　　）

A． $\omega=\frac{1}{2}$　　B． $f\left(-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

C． 函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减　　D． 函数 $f\left(x\right)$ 的图像关于点 $\left(\frac{5\pi}{4},0\right)$ 对称

5．已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid y=\lg(1-x)\}$，$B=\left\{x\mid y=\frac{1}{\sqrt{x}}\right\}$ 则 $\left(\complement_U A\right)\cap B=$（　　）

A． $(1,+\infty)$　　B． $(0,1)$　　C． $(0,+\infty)$　　D． $[1,+\infty)$

6．双曲线 $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$ 的渐近线与圆 $(x-3)^2+y^2=r^2(r>0)$ 相切，则 r 等于(　　)

A． $\sqrt{3}$　　B． 2

C． 3　　D． 6

7．已知 $y=\log_2\left(x^2-2x+17\right)$ 的值域为 $\left[m,+\infty\right)$，当正数 a，b 满足 $\dfrac{2}{3a+b}+\dfrac{1}{a+2b}=m$ 时，则 $7a+4b$ 的最小值为（　　）

A．$\dfrac{9}{4}$　　B．5　　C．$\dfrac{5+2\sqrt{2}}{4}$　　D．9

8．复数的 $z=-1-2i\left(i\text{为虚数单位}\right)$ 在复平面内对应的点位于（ ）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

9．已知数列 $\left\{a_n\right\}$ 满足：$a_1=1,\ a_{n+1}=\begin{cases}a_n+3, a_n\text{为奇数}\\2a_n+1, a_n\text{为偶数}\end{cases}$，则 $a_6=($　　$)$

A．16　　B．25　　C．28　　D．33

10．已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\phi)(\omega>0,0<\phi<\dfrac{\pi}{3})$ 满足 $f(x+\pi)=f(x), f(\dfrac{\pi}{12})=1$，则 $f(-\dfrac{\pi}{12})$ 等于（　　）

A．$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$-\dfrac{1}{2}$　　D．$\dfrac{1}{2}$

11．已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左，右焦点分别为 F_1、F_2，过 F_1 的直线 l 交双曲线的右支于点 P，以双曲线的实轴为直径的圆与直线 l 相切，切点为 H，若 $\left|F_1P\right|=3\left|F_1H\right|$，则双曲线 C 的离心率为（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$　　B．$\sqrt{5}$　　C．$2\sqrt{5}$　　D．$\sqrt{13}$

12．若复数 z 满足 $(1+i)z=\left|3+4i\right|$，则 z 的虚部为（　　）

A．5　　B．$\dfrac{5}{2}$　　C．$-\dfrac{5}{2}$　　D．-5

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．设函数 $f\left(x\right)=\left|\ln x+a\right|+\left|x+b\right|\left(a,b\in R\right)$，当 $x\in\left[1,e\right]$ 时，记 $f\left(x\right)$ 最大值为 $M\left(a,b\right)$，则 $M\left(a,b\right)$ 的最小值为______.

14．在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 $C:xy=\sqrt{3}$ 上任意一点 P 到直线 $l:x+\sqrt{3}y=0$ 的距离的最小值为________.

15．已知 F_1,F_2 为双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，过点 F_1 作直线 l 与圆 $x^2+y^2=a^2$ 相切于点 A，且与双曲线的右支相交于点 B，若 A 是 BF_1 上的一个靠近点 F_1 的三等分点，且 $\left|BF_2\right|=10$，则四边形 AOF_2B 的面积为_______.

16．已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$，对于任意 x 都有 $f(\dfrac{\pi}{6}+x)=f(\dfrac{\pi}{6}-x)$，则 $f(\dfrac{\pi}{6})$ 的值为______________.

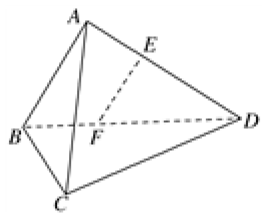
三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）已知数列$\left\{a_n\right\}$满足，$a_1=1$，$a_2=4$，且$a_{n+2}-4a_{n+1}+3a_n=0\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$.

（1）求证：数列$\left\{a_{n+1}-a_n\right\}$为等比数列，并求出数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式；

（2）设$b_n=2n\cdot a_n$，求数列$\left\{b_n\right\}$的前n项和S_n.

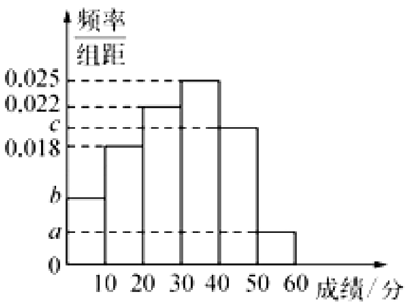
18．（12 分）如图，在三棱锥 *A-BCD* 中，*AB*⊥*AD*，*BC*⊥*BD*，平面 *ABD*⊥平面 *BCD*，点 *E*，*F*(*E* 与 *A*，*D* 不重合)分别在棱 *AD*，*BD* 上，且 *EF*⊥*AD*.



求证：(1)*EF*∥平面 *ABC*；

(2)*AD*⊥*AC*.

19．（12 分）为调研高中生的作文水平.在某市普通高中的某次联考中，参考的文科生与理科生人数之比为$1:4$，且成绩分布在$[0,60]$的范围内，规定分数在 50 以上（含 50）的作文被评为“优秀作文”，按文理科用分层抽样的方法抽取 400 人的成绩作为样本，得到成绩的频率分布直方图，如图所示.其中a,b,c构成以 2 为公比的等比数列.



（1）求a,b,c的值；

（2）填写下面2×2列联表，能否在犯错误的概率不超过 0.01 的情况下认为“获得优秀作文”与“学生的文理科”有关？

	文科生	理科生	合计
获奖	6		
不获奖			
合计			400

（3）将上述调查所得的频率视为概率，现从全市参考学生中，任意抽取 2 名学生，记“获得优秀作文”的学生人数为X，求X的分布列及数学期望.

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中$n=a+b+c+d$.

$P\left(K^2\geqslant k\right)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

20.（12 分）已知$\{a_n\}$是等差数列，满足$a_1=3$，$a_4=12$，数列$\{b_n\}$满足$b_1=4$，$b_4=20$，且$\{b_n-a_n\}$是等比数列.

（1）求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

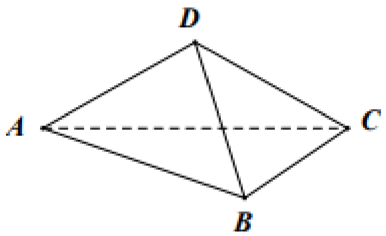
（2）求数列$\{b_n\}$的前n项和.

21.（12 分）已知函数$f(x)=e^{ax}\sin x$.

（1）若$f(x)$在$\left[0,\dfrac{\pi}{6}\right]$上单调递增，求实数$a$的取值范围；

（2）若$a=1$，对$\forall x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，恒有$f(x)\leqslant bx$成立，求实数$b$的最小值.

22.（10 分）如图，在四面体$DABC$中，$AB\perp BC$，$DA=DC=DB$.



（1）求证:平面$ABC\perp$平面ACD；

（2）若$\angle CAD=30^\circ$，二面角$C-AB-D$为60°，求异面直线AD与BC所成角的余弦值.

参考答案

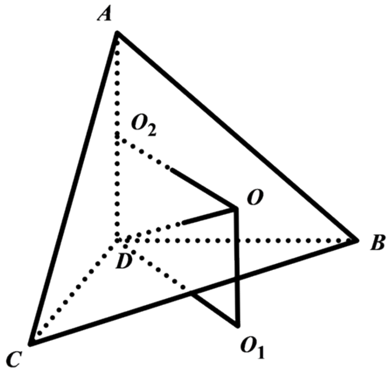
一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

如图所示，设 AD 的中点为 O_2，ΔBCD 的外接圆的圆心为 O_1，四面体 $A-BCD$ 的外接球的球心为 O，连接 OO_1, OO_2, OD，利用正弦定理可得 $DO_1=1$，利用球心的性质和线面垂直的性质可得四边形 OO_2DO_1 为平行四边形，最后利用勾股定理可求外接球的半径，从而可得外接球的表面积.

【详解】



如图所示，设 AD 的中点为 O_2，ΔBCD 外接圆的圆心为 O_1，四面体 $A-BCD$ 的外接球的球心为 O，连接 OO_1, OO_2, OD，则 $OO_1 \perp$ 平面 BCD，$OO_2 \perp AD$.

因为 $CD=BD=1, BC=\sqrt{3}$，故 $\cos\angle BDC=\dfrac{2-3}{2\times 1\times 1}=-\dfrac{1}{2}$，

因为 $\angle BDC\in(0,\pi)$，故 $\angle BDC=\dfrac{2\pi}{3}$.

由正弦定理可得 $2DO_1=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin\dfrac{2\pi}{3}}=2$，故 $DO_1=1$，又因为 $AD=\sqrt{3}$，故 $DO_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $AD\perp DB, AD\perp CD, DB\cap CD=D$，故 $AD\perp$ 平面 BCD，所以 $OO_1 // AD$，

因为 $AD\perp$ 平面 BCD，$DO_1\subset$ 平面 BCD，故 $AD\perp DO_1$，故 $OO_2 // DO_1$，

所以四边形 OO_2DO_1 为平行四边形，所以 $OO_1=DO_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $OD=\sqrt{\dfrac{3}{4}+1}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$，故外接球的半径为 $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$，外接球的表面积为 $4\pi\times\dfrac{7}{4}=7\pi$.

故选：D.

【点睛】

本题考查平面图形的折叠以及三棱锥外接球表面积的计算，还考查正弦定理和余弦定理，折叠问题注意翻折前后的变量与不变量，外接球问题注意先确定外接球的球心的位置，然后把半径放置在可解的直角三角形中来计算，本题有一定的难度.

2、D

【解析】

根据 $(1-x)^5+(1-x)^6+(1-x)^7+(1-x)^8$，利用通项公式得到含 x^3 的项为：$(C_5^3+C_6^3+C_7^3+C_8^3)(-x)^3$，进而得到其系数，

【详解】

因为在 $(1-x)^5+(1-x)^6+(1-x)^7+(1-x)^8$，

所以含 x^3 的项为：$(C_5^3+C_6^3+C_7^3+C_8^3)(-x)^3$，

所以含 x^3 的项的系数是的系数是 $-(C_5^3+C_6^3+C_7^3+C_8^3)$，

$=-(10+20+35+56)=-121$，

故选：D

【点睛】

本题主要考查二项展开式及通项公式和项的系数，还考查了运算求解的能力，属于基础题，

3、B

【解析】

$\sin x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in Z)$ 或 $x=2k\pi+\frac{5\pi}{6}(k\in Z)$，从而明确充分性与必要性.

【详解】

，

由 $\sin x=\frac{1}{2}$ 可得：$x=2k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in Z)$ 或 $x=2k\pi+\frac{5\pi}{6}(k\in Z)$，

即 $x=2k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in Z)$ 能推出 $\sin x=\frac{1}{2}$，

但 $\sin x=\frac{1}{2}$ 推不出 $x=2k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in Z)$

$\therefore$“$\sin x=\frac{1}{2}$”是“$x=2k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in Z)$”的必要不充分条件

故选 B

【点睛】

本题考查充分性与必要性，简单三角方程的解法，属于基础题.

4、B

【解析】

根据函数$f\left(x\right)$，在$\left(0,\pi\right)$上是单调函数，确定 $0<\omega\le 1$，然后一一验证，

A.若$\omega=\frac{1}{2}$，则$f\left(x\right)=2\sin\left(\frac{1}{2}x+\varphi\right)$，由$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，得$\varphi=\frac{3\pi}{4}$，但$f\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sin\left(\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{4}\right)\ne\frac{\sqrt{2}}{2}$.B.由$f\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，确定$f\left(x\right)=2\sin\left(\frac{2}{3}x+\frac{2\pi}{3}\right)$，再求解$f\left(-\frac{\pi}{8}\right)$验证.C.利用整体法根据正弦函数的单调性判断.D.计算$f\left(\frac{5\pi}{4}\right)$是否为0.

【详解】

因为函数$f\left(x\right)$，在$\left(0,\pi\right)$上是单调函数，

所以$\frac{T}{2}\ge\pi$ ，即$\frac{2\pi}{\omega}\ge 2\pi$，所以 $0<\omega\le 1$ ，

若$\omega=\frac{1}{2}$，则$f\left(x\right)=2\sin\left(\frac{1}{2}x+\varphi\right)$，又因为$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，即$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=0$，解得$\varphi=\frac{3\pi}{4}$， 而$f\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sin\left(\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{4}\right)\ne\frac{\sqrt{2}}{2}$，故A错误.

由$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\left(\frac{\omega\pi}{2}+\varphi\right)=0$，不妨令$\frac{\omega\pi}{2}+\varphi=\pi$ ，得$\varphi = \pi - \frac{\pi\omega}{2}$

由$f\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sin\left(\omega\times\frac{\pi}{8}+\varphi\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，得 $\omega\times\frac{\pi}{8}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{4}$或$\omega\times\frac{\pi}{8}+\varphi=2k\pi+\frac{3\pi}{4}$

当$\omega\times\frac{\pi}{8}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{4}$时，$\omega=\frac{2k\pi}{3}+2$，不合题意.

当$\omega\times\frac{\pi}{8}+\varphi=2k\pi+\frac{3\pi}{4}$时，$\omega=\frac{2k\pi}{3}+\frac{2}{3}$，此时$f\left(x\right)=2\sin\left(\frac{2}{3}x+\frac{2\pi}{3}\right)$

所以$f\left(-\frac{\pi}{8}\right)=2\sin\left(\frac{2}{3}\times\left(-\frac{\pi}{8}\right)+\frac{2\pi}{3}\right)=2\sin\left(\frac{2}{3}\times\left(-\frac{\pi}{8}\right)+\frac{2\pi}{3}\right)=2\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$，故B正确.

因为$x\in\left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right],\frac{2}{3}x+\frac{2\pi}{3}\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$，函数$f\left(x\right)$，在$\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$上是单调递增，故C错误.

$f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=2\sin\left(\frac{2}{3}\times\frac{5\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)=2\sin\frac{3\pi}{2}=\sqrt{3}\ne 0$，故D错误.

故选：B

【点睛】

本题主要考查三角函数的性质及其应用，还考查了运算求解的能力，属于较难的题.

5、D

【解析】

根据函数定义域的求解方法可分别求得集合 A,B ，由补集和交集定义可求得结果.

【详解】

$\because A=\{x|1-x>0\}=(-\infty,1)$， $B=(0,+\infty)$， $\therefore \complement_U A=[1,+\infty)$，

$\therefore (\complement_U A)\cap B=[1,+\infty)$.

故选： D.

【点睛】

本题考查集合运算中的补集和交集运算问题，涉及到函数定义域的求解，属于基础题.

6、A

【解析】

由圆心到渐近线的距离等于半径列方程求解即可.

【详解】

双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$，圆心坐标为(3,0)．由题意知，圆心到渐近线的距离等于圆的半径 r，即 $r=$

$$\frac{\left|\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\times 3-0\right|}{\sqrt{\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+1}}=\sqrt{3}.$$

答案：A

【点睛】

本题考查了双曲线的渐近线方程及直线与圆的位置关系，属于基础题.

7、A

【解析】

利用 $y=\log_2\left(x^2-2x+17\right)$ 的值域为 $[m,+\infty)$,求出 m,再变形,利用 1 的代换,即可求出 $7a+4b$ 的最小值.

【详解】

解： $\because y=\log_2\left(x^2-2x+17\right)=\log_2\left[(x-1)^2+16\right]$ 的值域为 $[m,+\infty)$，

$\therefore m=4$，

$\therefore \frac{4}{6a+2b}+\frac{1}{a+2b}=4$，

$\therefore 7a+4b=\frac{1}{4}\left[\left(6a+2b\right)+\left(a+2b\right)\right]\left(\frac{4}{6a+2b}+\frac{1}{a+2b}\right)$

$=\frac{1}{4}\left[5+\frac{6a+2b}{a+2b}+\frac{4\left(a+2b\right)}{6a+2b}\right]\ge\frac{1}{4}\times\left(5+4\right)=\frac{9}{4}$,

当且仅当$\frac{6a+2b}{a+2b}=\frac{4\left(a+2b\right)}{6a+2b}$时取等号,

$\therefore 7a+4b$的最小值为$\frac{9}{4}$.

故选：A.

【点睛】

本题主要考查了对数复合函数的值域运用,同时也考查了基本不等式中“1 的运用”,属于中档题.

8、C

【解析】

所对应的点为（-1，-2）位于第三象限.

【考点定位】本题只考查了复平面的概念，属于简单题.

9、C

【解析】

依次递推求出a_6得解.

【详解】

n=1 时，$a_2=1+3=4$,

n=2 时，$a_3=2\times4+1=9$,

n=3 时，$a_4=9+3=12$,

n=4 时，$a_5=2\times12+1=25$,

n=5 时，$a_6=25+3=28$.

故选：C

【点睛】

本题主要考查递推公式的应用，意在考查学生对这些知识的理解掌握水平.

10、C

【解析】

设 $f\left(x\right)$ 的最小正周期为 T，可得 $nT=\pi,n\in N^{*}$，则 $\omega=2n,n\in\mathbf{N}^{*}$，再根据 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=1$ 得

$\phi=\frac{\pi}{2}+2k\pi-n\cdot\frac{\pi}{6},k\in Z,n\in N^{*}$，又 $0<\phi<\frac{\pi}{3}$，则可求出 $n-12k=2$，进而可得 $f(-\frac{\pi}{12})$.

【详解】

解：设 $f\left(x\right)$ 的最小正周期为 T，因为 $f(x+\pi)=f(x)$，

所以 $nT=\pi,n\in N^{*}$，所以 $T=\frac{\pi}{n}=\frac{2\pi}{\omega},n\in\mathbf{N}^{*}$，

所以 $\omega=2n,n\in\mathbf{N}^{*}$，

又 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=1$，所以当 $x=\frac{\pi}{12}$ 时，$\omega x+\varphi=n\cdot\frac{\pi}{6}+\phi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，

$\therefore\phi=\frac{\pi}{2}+2k\pi-n\cdot\frac{\pi}{6},k\in Z,n\in N^{*}$，因为 $0<\phi<\frac{\pi}{3}$

$\therefore 0<\frac{\pi}{2}+2k\pi-n\cdot\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{3}$，

整理得 $1<n-12k<3$，因为 $n-12k\in Z$，

$\therefore n-12k=2$，

$\therefore\phi=\frac{\pi}{2}+2k\pi-\left(2+12k\right)\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，则 $n\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

$\therefore\frac{n\pi}{6}=\frac{\pi}{3}+2k\pi$

所以 $f(-\frac{\pi}{12})=\sin\left[2n\cdot\left(-\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=\sin\left(-\frac{n\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)$

$$=\sin\left(-\frac{\pi}{3}-2k\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}.$$

故选：C.

【点睛】

本题考查三角形函数的周期性和对称性，考查学生分析能力和计算能力，是一道难度较大的题目.

11、A

【解析】

在 ΔPF_1F_2 中，由余弦定理，得到 $|PF_2|$，再利用 $|PF_1|-|PF_2|=2a$ 即可建立 a,b,c 的方程.

【详解】

由已知，$|HF_1|=\sqrt{F_1O^2-OH^2}=\sqrt{c^2-a^2}=b$，在$\Delta PF_1F_2$中，由余弦定理，得