选择题

已知命题$p: \forall x \in (1, +\infty), x^2 + 16 > 8x$，则命题$p$的否定为（ ）

A. $\neg p: \forall x \in (1, +\infty), x^2 + 16 \le 8x$ B. $\neg p: \forall x \in (1, +\infty), x^2 + 16 < 8x$

C. $\neg p: \exists x_0 \in (1, +\infty), x_0^2 + 16 \le 8x_0$ D. $\neg p: \exists x_0 \in (1, +\infty), x_0^2 + 16 < 8x_0$

【答案】C

【解析】

根据全称命题的否定是特称命题，可直接得出结果.

命题“$p: \forall x \in (1, +\infty), x^2 + 16 > 8x$”的否定是“$\exists x_0 \in (1, +\infty), x_0^2 + 16 \le 8x_0$”.

故选 C

选择题

若$a > b > 0$，则下列不等式不一定成立的是（ ）

A. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ B. $\log_2 a > \log_2 b$

C. $a^2 + b^2 \le 2a + 2b - 2$ D. $b < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < a$

【答案】C

【解析】

本试题主要是考查了不等式性质的运用，和均值不等式的判定。

因为$a>b>0$，根据不等式取倒数性质可知，$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$成立，选项 B 中，根据对数函数 y=log2x 递增性质可知成立，选项 C 中，$a^2+b^2-(2a+2b-2)=(a-1)^2+(b-1)^2\geq 0$,当$a=b=1$成立，否则不成立，选项 D 中根据均值不等式可知$b<\sqrt{b\cdot b}<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}<\frac{a+a}{2}=a$成立，故选 C.

解决该试题的关键是不等式性质的准确运用。

选择题

设$x>0$，则函数$y=x+\frac{2}{2x+1}-\frac{3}{2}$的最小值为（ ）

A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. $\frac{3}{2}$

【答案】A

【解析】

由$y=x+\frac{2}{2x+1}-\frac{3}{2}=\frac{2x+1}{2}+\frac{2}{2x+1}-2$，根据基本不等式，直接求最值即可.

因为$x>0$，所以$y=x+\frac{2}{2x+1}-\frac{3}{2}=\frac{2x+1}{2}+\frac{2}{2x+1}-2\geq 2\sqrt{\frac{2x+1}{2}\cdot\frac{2}{2x+1}}-2=0$，

当且仅当$\frac{2x+1}{2}=\frac{2}{2x+1}$，即$x=\frac{1}{2}$时，等号成立.

故选 A

选择题

不等式$\begin{cases}(x-y+5)(x+y)\ge 0\\ 0\le x\le 3\end{cases}$表示的平面区域是一个

A. 三角形 B. 直角三角形

C. 梯形 D. 矩形

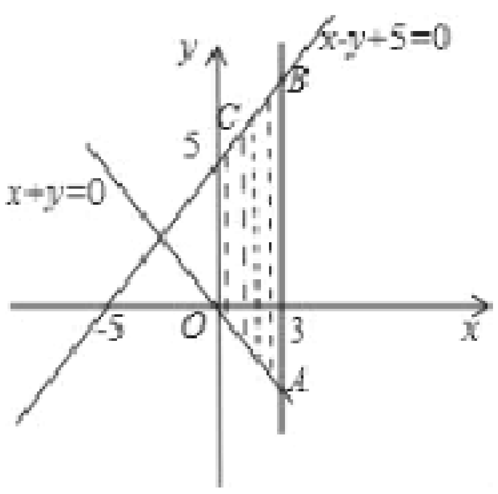
【答案】C

【解析】

本题可先将不等式解出，再在平面直角坐标系中做出图形，最后得出结果。

不等式$\begin{cases}(x-y+5)(x+y)\ge 0\\ 0\le x\le 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y+5\ge 0\\ x+y\ge 0\\ 0\le x\le 3\end{cases}$① 或 $\begin{cases}x-y+5\le 0\\ x+y\le 0\\ 0\le x\le 3\end{cases}$②，

以上不等式组① 表示的平面区域如图，



不等式组② 中的几个二元一次不等式表示的平面区域无公共部分，

所以原不等式组表示的平面区域是图中的梯形$OABC$.

故选 C.

选择题

已知向量$\vec{a}=(x,2)$，$\vec{b}=(1,y)$且x,y为正实数，若满足$\vec{a}\cdot\vec{b}=2xy$，则$3x+4y$的最小值为（ ）

A. $5+2\sqrt{6}$ B. $5+\sqrt{6}$ C. $4\sqrt{6}$ D. $4\sqrt{3}$

【答案】A

【解析】

根据向量的数量积结合基本不等式即可。

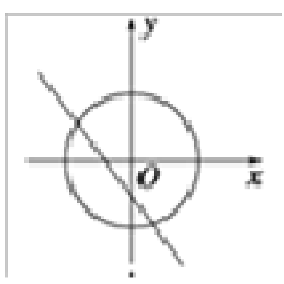
由题意得$\vec{a}\cdot\vec{b}=x+2y=2xy\Rightarrow\frac{1}{2y}+\frac{1}{x}=1$，因为$x$，$y$为正实数，则

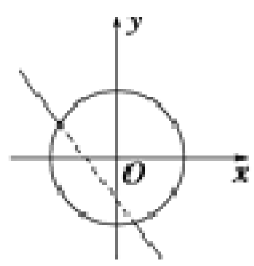
$$(3x+4y)\times1=(3x+4y)\left(\frac{1}{2y}+\frac{1}{x}\right)=\frac{3x}{2y}+3+2+\frac{4y}{x}\geq5+2\sqrt{\frac{3x}{2y}\cdot\frac{4y}{x}}=5+2\sqrt{6}$$

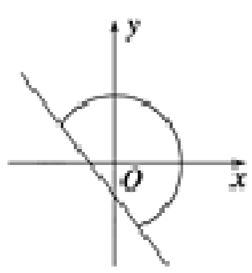
当且仅当$\frac{3x}{2y}=\frac{4y}{x}$时取等。所以选择 A

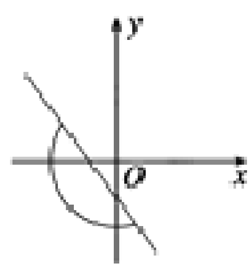
选择题

方程(x2＋y2－4) $\sqrt{x+y+1}$)＝0 的曲线形状是(　　)

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】C

【解析】由$\left(x^2+y^2-4\right)\sqrt{x+y+1}=0$可得：

$\begin{cases} x^2+y^2-4=0 \\ x+y+1\geq 0 \end{cases}$ 或$x+y+1=0$

它表示直线$x+y+1=0$和圆$x^2+y^2=4$在直线$x+y+1=0$右上方的部分

故选C

选择题

已知实数x，y满足约束条件$\begin{cases} 2x-y\geq 0 \\ y\geq x \\ y\geq -x+b \end{cases}$，若$z=2x+y$的最小值为 3，则实数$b=$（ ）

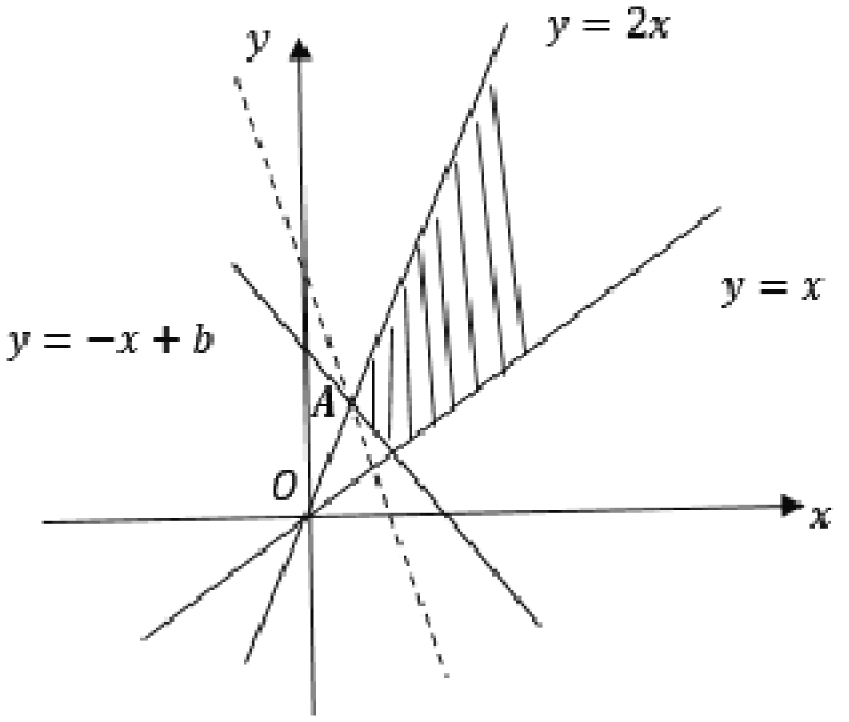
A.$\frac{9}{4}$ B.$\frac{3}{2}$ C.1 D.$\frac{3}{4}$

【答案】A

【解析】

先由约束条件，作出可行域，再由目标函数$z=2x+y$可化为$y=-2x+z$，得到z表示直线$y=-2x+z$在y轴截距，根据题中条件，结合图像，即可得出结果.

由约束条件$\begin{cases} 2x-y\geq 0 \\ y\geq x \\ y\geq -x+b \end{cases}$作出可行域如下：



又目标函数$z=2x+y$可化为$y=-2x+z$，

因此z表示直线$y=-2x+z$在y轴截距，

由图像可得，当直线$y=-2x+z$过点A时，截距最小，

由$\begin{cases} y=2x \\ y=-x+b \end{cases}$解得$A\left(\frac{b}{3},\frac{2b}{3}\right)$，

又$z=2x+y$的最小值为 3，

所以$\frac{2b}{3}+\frac{2b}{3}=3$，解得$b=\frac{9}{4}$.

故选 A

选择题

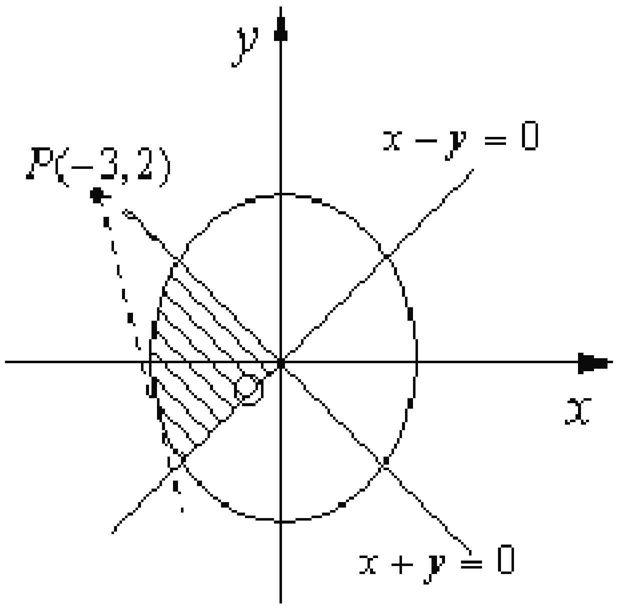
若x,y满足约束条件$\begin{cases} x+y\le 0 \\ x-y\le 0 \\ x^2+y^2\le 4 \end{cases}$，则$z=\frac{y-2}{x+3}$的最小值为　（　）

A. -2 B. $-\frac{2}{3}$ C. $-\frac{12}{5}$ D. $\frac{\sqrt{2}-4}{7}$

【答案】C

【解析】作出不等式组表示的平面区域，如图所示，因为目标函数

$z=\frac{y-2}{x+3}$表示区域内上的点与点$P(-3,2)$连线的斜率．由图知当区域内的点与点P的连线与圆相切时斜率最小．设切线方程为$y-2=k(x+3)$，即$kx-y+3k+2=0$，则有$\frac{|3k+2|}{\sqrt{k^2+1}}=2$，解得$k=-\frac{12}{5}$或$k=0$（舍），所以$z_{\min}=-\frac{12}{5}$，故选 C．



选择题

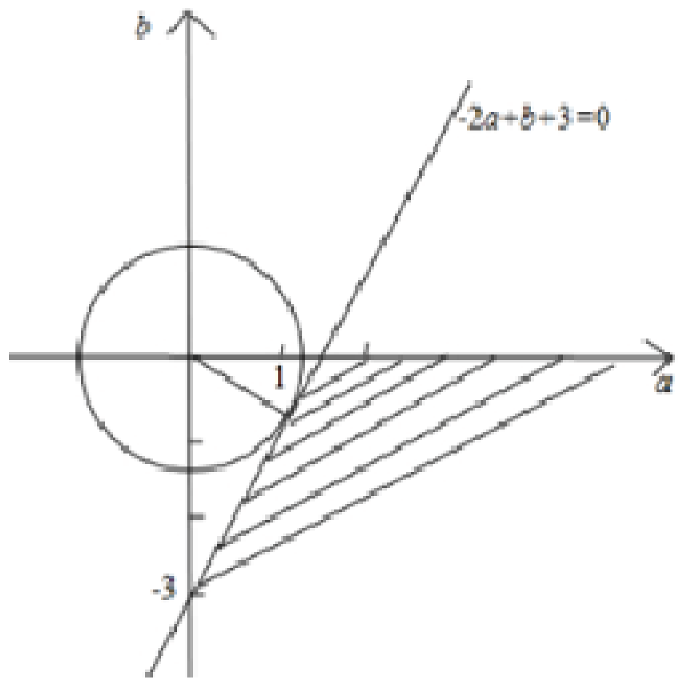
若对于任意的$x\in[-1,0]$,关于x的不等式$3x^2+2ax+b\le 0$恒成立，则a^2+b^2-2的最小值为（ ）

A．$-\frac{1}{5}$ B．$\frac{5}{4}$ C.$\frac{4}{5}$ D．$\frac{1}{4}$

【答案】A

【解析】

试题分析：设$f(a)=3x^2+2ax+b$，根据已知条件知：$\begin{cases}f(-1)=-2a+b+3\le 0\\ f(0)=b\le 0\end{cases}$，该不等式表示的平面区域如图所示，设$z=a^2+b^2-2$，所以$a^2+b^2=2+z$，所以该方程表示以原点为圆心，半径为$\sqrt{2+z}$的圆，原点到直线$-2a+b+3=0$的距离为$\frac{3}{\sqrt{5}}$，所以该圆的半径$\sqrt{2+z}\ge\frac{3}{\sqrt{5}}$，解得$z\ge-\frac{1}{5}$，故选A.



选择题

已知函数$f(x)=\begin{cases}\left|x+\frac{1}{x}\right|(x\ne 0)\\ 2\quad(x=0)\end{cases}$，若关于$x$的方程$f^2(x)-(a+2)f(x)+2a=0$有三个不同实数解的充要条件是（ ）

A.$a=2$ B.$a>2$ C.$a<0$ D.$a\le 2$

【答案】D

【解析】

求关于x的方程$f^2(x)-(a+2)f(x)+2a=0$有三个不同实数解的充要条件，

即是由已知条件求a的范围，根据方程，先求出$f(x)=2$或$f(x)=a$；先由函数解析式，求出$f(x)=2$的实数解，再由题意，讨论$a=2$和$a\neq 2$两种情况，即可得出结果.

由$f^2(x)-(a+2)f(x)+2a=0$解得$f(x)=2$或$f(x)=a$；

因为$f(x)=\begin{cases}\left|x+\frac{1}{x}\right|(x\neq 0)\\ 2\quad (x=0)\end{cases}$，

当$f(x)=2$时，由$x=0$或$x+\frac{1}{x}=\pm 2$，所以$x=0$或$x=\pm 1$；共 3 个实根；

又关于x的方程$f^2(x)-(a+2)f(x)+2a=0$有三个不同实数解，

当$a=2$时，显然满足题意；

当$a\neq 2$，$f(x)=a$无解；

又$\left|x+\frac{1}{x}\right|\geq 2$，所以只需$a<2$即可；

综上，$a\leq 2$.

故选 D

选择题

对函数$f(x)$，如果存在$x_0\neq 0$使得$f(x_0)=-f(-x_0)$，则称$(x_0,f(x_0))$与$(-x_0,f(-x_0))$为函数图像的一组奇对称点.若$f(x)=e^x-a$（e为自然数的底数）存在奇对称点，则实数a的取值范围是（ ）

A. $(-\infty,1)$ B. $(1,+\infty)$ C. $(e,+\infty)$ D. $[1,+\infty)$

【答案】B

【解析】由题意，函数存在奇对称点，即函数图像上存在两点关于原点对称，可设两点为$P(x_1,y_1)$， $Q(x_2,y_2)$，即$y_1=e^{x_1}-a$， $y_2=e^{x_2}-a$，因为关于原点对称，所以$e^{x_1}-a=-e^{x_2}+a$，即$2a=e^{x_1}+e^{x_2}\geq 2\sqrt{e^{x_1}\cdot e^{x_2}}=2\sqrt{e^0}=2$，因为$x_1\neq x_2$，所以$a>1$，故选B.

选择题

下列命题正确的个数是（ ）

① 命题已知$p:x\neq 3$或$y\neq 7$，$q:x+y\neq -4$，则p是q的充分不必要条件；

② "函数$f(x)=\cos^2 ax-\sin^2 ax$的最小正周期为π"是"$a=1$"的必要不充分条件；

③ $x^2+2x\geq ax$在$x\in[1,2]$上恒成立$\Leftrightarrow (x^2+2x)_{\min}\geq (ax)_{\max}$在$x\in[1,2]$上恒成立；

④ "平面向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角是钝角"的充要条件是"$\vec{a}\bullet\vec{b}<0$"

⑤ 命题p:函数$y=\log_{0.5}(x^2+2x+a)$的值域为R，命题q:函数$y=-(5-2a)^x$是减函数.若p或q为真命题，p且q为假命题，则实数a的取值范围是$(1,2)$.

A.1 B.2 C.3 D.4

【答案】B

【解析】

由充分条件与必要条件的概念，可判断①②④　的真假；根据不等式恒成立，利用分类讨论的思想，可判断③；由复合命题真假，求出参数，即可判断⑤ 的真假.

对于①，命题“若$p:x\neq 3$或$y\neq 7$，则$q:x+y\neq -4$”的逆否命题为“若$\neg q:x+y=-4$，则$\neg p:x=3$且$y=7$”显然是假命题，因此原命题也是假命题，由p不能推出q，所以p不是q的充分条件；① 错；

对于②，因为$f(x)=\cos^2 ax-\sin^2 ax=\cos 2ax$，若其最小正周期为$\pi$，则$\left|\frac{2\pi}{2a}\right|=\pi$，解得$a=\pm 1$；因此由“函数$f(x)=\cos^2 ax-\sin^2 ax$的最小正周期为$\pi$”不能推出“$a=1$”；由“$a=1$”能推出“函数$f(x)=\cos^2 ax-\sin^2 ax$的最小正周期为$\pi$”，所以“函数$f(x)=\cos^2 ax-\sin^2 ax$的最小正周期为$\pi$”是“$a=1$”的必要不充分条件；② 正确；

对于③，由$x^2+2x\geq ax$在$x\in[1,2]$上恒成立，

可得$a\leq x+2$在$x\in[1,2]$上恒成立，所以$a\leq 3$；

又易知$y=x^2+2x$在$x\in[1,2]$单调递增，所以$(x^2+2x)_{\min}=3$；

当$a=0$时，$(x^2+2x)_{\min}\geq 0$在$x\in[1,2]$上显然成立；

当$a>0$时，$y=ax$在$x\in[1,2]$单调递增，所以$(ax)_{\max}=2a$；

由$(x^2+2x)_{\min}\geq(ax)_{\max}$得$2a\leq 3$，所以$0<a\leq\frac{3}{2}$；

当$a<0$时，$y=ax$在$x\in[1,2]$单调递减，所以$(ax)_{\max}=a$；

由$(x^2+2x)_{\min}\geq(ax)_{\max}$得$a\leq 3$，所以$a<0$；

综上$a\leq\frac{3}{2}$；

即“$x^2+2x\geq ax$ 在 $x\in[1,2]$ 上恒成立”，与“$(x^2+2x)_{\min}\geq(ax)_{\max}$ 在 $x\in[1,2]$ 上恒成立”不等价；故③ 错.

对于④ ，若平面向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角是钝角，则 $-1<\cos<\vec{a},\vec{b}><0$ ，所以 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos<\vec{a},\vec{b}><0$；

反之，若 $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$ ，则 $\cos<\vec{a},\vec{b}><0$ ，可能使 $\cos<\vec{a},\vec{b}>=-1$ ，此时向量反向，夹角不是钝角.

所以“平面向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角是钝角”是“$\vec{a}\cdot\vec{b}<0$”的充分不必要条件，故④ 错误；

对于⑤ ，假设 p 为真命题，则 x^2+2x+a 要取尽大于 0 的所有实数，因此只需 $\Delta=4-4a\geq 0$，所以 $a\leq 1$；假设 q 为真命题，则 $5-2a>1$，解得 $a<2$；因为 p 或 q 为真命题， p 且 q 为假命题，所以 p 、 q 一真一假；

即 p 真 q 假，或 p 假 q 真，所以有 $\begin{cases}a\leq 1\\a\geq 2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a>1\\a<2\end{cases}$，解得 $1<a<2$ ；故⑤ 正确.

故选 B

填空题

近来猪肉价格起伏较大，假设第一周、第二周猪肉价格分别为 a 元/斤、b 元/斤，家庭主妇甲和乙买猪肉的方式不同：家庭主妇甲每周买 3 斤猪肉，家庭主妇乙每周买 50 元钱的猪肉，试比较谁购买方式更实惠（两次平均价格低视为实惠）__________（在横线上填甲或乙即

可）.

【答案】乙

【解析】

根据题意，得到甲乙两人两周购买猪肉的平均价格，利用基本不等式比较大小，即可得出结果.

由题意，甲两周购买猪肉的平均价格为$\frac{3a+3b}{6}=\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$；当且仅当$a=b$时，取等号；

乙两周购买猪肉的平均价格为$\frac{100}{\frac{50}{a}+\frac{50}{b}}=\frac{2ab}{a+b}\leq\frac{2ab}{2\sqrt{ab}}=\sqrt{ab}$，当且仅当$a=b$时，取等号；

因此$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\geq\frac{2ab}{a+b}$.当且仅当$a=b$时，取等号；

因此，乙的购买方式更实惠.

故答案为乙

填空题

若命题 $\exists x_0\in R$，使得$x_0^2+ax_0+a+3<0$”为假命题，则实数a的取值范围是__________.

【答案】$-2\leq a\leq 6$

【解析】