

## 陕西省四校 2025 届高三下学期一模考试数学试题

考生请注意：

1. 答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。
2. 第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。
3. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知平面向量  $\vec{a}, \vec{b}$  满足  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，且  $(\sqrt{2}\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{b}$ ，则  $\vec{a}, \vec{b}$  所夹的锐角为 ( )

- A.  $\frac{\pi}{6}$                       B.  $\frac{\pi}{4}$                       C.  $\frac{\pi}{3}$                       D.  $0$

2. 已知  $m, n$  表示两条不同的直线， $\alpha, \beta$  表示两个不同的平面，且  $m \perp \alpha, n \perp \beta$ ，则 “ $m \perp n$ ” 是 “ $\alpha \perp \beta$ ” 的 ( ) 条件。

- A. 充分不必要              B. 必要不充分              C. 充要                      D. 既不充分也不必要

3. 定义在  $\mathbb{R}$  上函数  $f(x)$  满足  $f(x) = f(2-x)$ ，且对任意的不相等的实数  $x_1, x_2 > 0$ ，有  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$  成立，

若关于  $x$  的不等式  $f(2mx - \ln x) \geq f(3 - 2mx - \ln x)$  在  $x \in [1, 3]$  上恒成立，则实数  $m$  的取值范围是 ( )

- A.  $[\frac{1}{2e}, 1 - \frac{\ln 6}{6}]$               B.  $[\frac{1}{2e}, 1 - \frac{\ln 3}{6}]$               C.  $[\frac{1}{e}, 2 - \frac{\ln 3}{3}]$               D.  $[\frac{1}{e}, 2 - \frac{\ln 6}{3}]$

4. 已知斜率为  $k$  的直线  $l$  与抛物线  $C: y^2 = 4x$  交于  $A, B$  两点，线段  $AB$  的中点为  $M(1, m)$ ， $m > 0$ ，则斜率  $k$  的取值范围是 ( )

- A.  $(-\infty, 1)$                       B.  $(-\infty, 1]$                       C.  $(1, +\infty)$                       D.  $[1, +\infty)$

5. 设  $F_1, F_2$  分别为双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的左、右焦点，过点  $F_1$  作圆  $x^2 + y^2 = b^2$  的切线与双曲线的左支交于点  $P$ ，若  $|PF_2| = 2|PF_1|$ ，则双曲线的离心率为 ( )

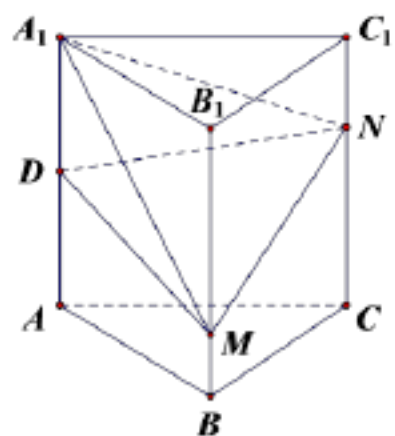
- A.  $\sqrt{2}$                       B.  $\sqrt{3}$                       C.  $\sqrt{5}$                       D.  $\sqrt{6}$

6. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ ，点  $P$  是  $C$  的右支上一点，连接  $PF_1$  与  $y$  轴交于点  $M$ ，若  $|F_1O| = 2|OM|$  ( $O$  为坐标原点)， $|PF_1| = |PF_2|$ ，则双曲线  $C$  的渐近线方程为 ( )

- A.  $y = 3x$                       B.  $y = \sqrt{3}x$                       C.  $y = 2x$                       D.  $y = \sqrt{2}x$



11. 如图，正三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  各条棱的长度均相等，D 为  $AA_1$  的中点，M, N 分别是线段  $BB_1$  和线段  $CC_1$  的动点（含端点），且满足  $BM = C_1N$ ，当 M, N 运动时，下列结论中不正确的是



A. 在  $\triangle DMN$  内总存在与平面  $ABC$  平行的线段

B. 平面  $DMN \perp$  平面  $BCC_1B_1$

C. 三棱锥  $A_1-DMN$  的体积为定值

D.  $\triangle DMN$  可能为直角三角形

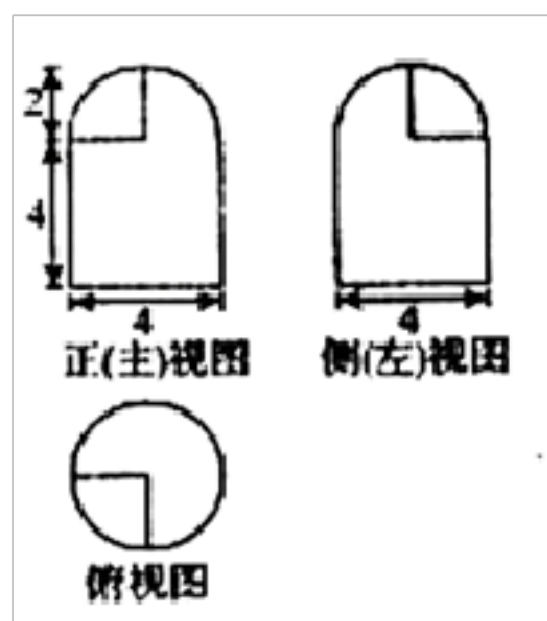
12. 在平面直角坐标系中，经过点  $P(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ，渐近线方程为  $y = \sqrt{2}x$  的双曲线的标准方程为 ( )

- A.  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$       B.  $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{14} = 1$       C.  $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1$       D.  $\frac{y^2}{14} - \frac{x^2}{7} = 1$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 某大学 A、B、C、D 四个不同的专业人数占本校总人数的比例依次为 3.2%、4.8%、4%、5.2%，现欲采用分层抽样的方法从这四个专业的总人数中抽取 129 人调查毕业后的就业情况，则 D 专业应抽取\_\_\_\_\_人。

14. 如图是某几何体的三视图，俯视图中圆的两条半径长为 2 且互相垂直，则该几何体的体积为\_\_\_\_\_。



15. 函数  $f(x) = x^2 - x \ln x$  的图象在  $x=1$  处的切线方程为\_\_\_\_\_。

16. 已知点 P 是直线  $y = x + 1$  上的动点，点 Q 是抛物线  $y = x^2$  上的动点. 设点 M 为线段 PQ 的中点，O 为原点，则  $|OM|$  的最小值为\_\_\_\_\_。

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

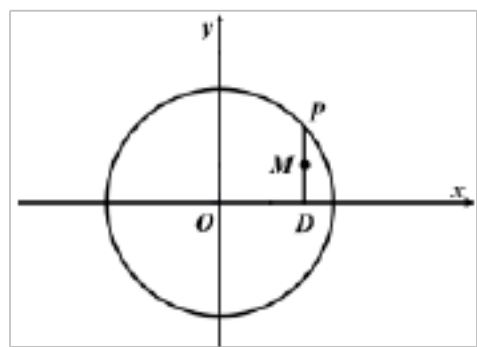
17. (12分) 已知椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的右焦点为  $F_2$ , 过  $F_2$  作  $x$  轴的垂线交椭圆  $E$  于点  $A$  (点  $A$  在  $x$  轴上方), 斜率为  $k$  ( $k > 0$ ) 的直线交椭圆  $E$  于  $A, B$  两点, 过点  $A$  作直线  $AC$  交椭圆  $E$  于点  $C$ , 且  $AB \perp AC$ , 直线  $AC$  交  $y$  轴于点  $D$ .

(1) 设椭圆  $E$  的离心率为  $e$ , 当点  $B$  为椭圆  $E$  的右顶点时,  $D$  的坐标为  $(0, \frac{b^2}{a} - \frac{1}{3}a)$ , 求  $e$  的值.

(2) 若椭圆  $E$  的方程为  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ , 且  $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 是否存在  $k$  使得  $\sqrt{2}|AB| = |AC|$  成立? 如果存在, 求出  $k$  的值;

如果不存在, 请说明理由.

18. (12分)  $P$  是圆  $x^2 + y^2 = 4$  上的动点,  $P$  点在  $x$  轴上的射影是  $D$ , 点  $M$  满足  $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DP}$ .



(1) 求动点  $M$  的轨迹  $C$  的方程, 并说明轨迹是什么图形;

(2) 过点  $N(3, 0)$  的直线  $l$  与动点  $M$  的轨迹  $C$  交于不同的两点  $A, B$ , 求以  $OA, OB$  为邻边的平行四边形  $OAEB$  的顶点  $E$  的轨迹方程.

19. (12分) 已知关于  $x$  的不等式  $|x - m| + 2x > 0$  解集为  $\mathbb{R}$ , ( $m > 0$ ).

(1) 求正数  $m$  的值;

(2) 设  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , 且  $a + b + c = m$ , 求证:  $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq 1$ .

20. (12分) 已知  $a, b, c$  分别为  $\triangle ABC$  内角  $A, B, C$  的对边, 若  $\triangle ABC$  同时满足下列四个条件中的三个:

①  $\frac{b-a}{c} = \frac{2\sqrt{6}a-3c}{3(a-b)}$ ; ②  $\cos 2A = 2\cos^2 \frac{A}{2} - 1$ ; ③  $a = \sqrt{6}$ ; ④  $b = 2\sqrt{2}$ .

(1) 满足有解三角形的序号组合有哪些?

(2) 在 (1) 所有组合中任选一组, 并求对应  $\triangle ABC$  的面积.

(若所选条件出现多种可能, 则按计算的第一种可能计分)

21. (12分) 已知在平面直角坐标系  $xOy$  中, 椭圆  $C$  的焦点为  $F_1(-\sqrt{3}, 0), F_2(\sqrt{3}, 0)$ ,  $M$  为椭圆  $C$  上任意一点, 且

$|MF_1| + |MF_2| = 4$ .

(1) 求椭圆C 的标准方程;

(2) 若直线  $l: y = kx + m$  ( $k \neq 0, m \neq 0$ ) 交椭圆C 于P,Q 两点, 且满足  $k_{PQ}^2 = k_{OP} \cdot k_{OQ}$  ( $k_{PQ}, k_{OP}, k_{OQ}$  分别为直线PQ, OP, OQ 的斜率), 求  $\triangle OPQ$  的面积为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  时直线PQ 的方程.

22. (10分) 在  $\triangle ABC$  中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 且  $8\cos^2 \frac{B+C}{2} = 2\cos 2A + 3$

(1) 求 A;

(2) 若  $a = 2$ , 且  $\triangle ABC$  面积的最大值为  $\sqrt{3}$ , 求  $\triangle ABC$  周长的取值范围.

## 参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1、B

**【解析】**

根据题意可得  $(\sqrt{2}\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$ , 利用向量的数量积即可求解夹角.

**【详解】**

因为  $(\sqrt{2}\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{b} = (\sqrt{2}\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$

即  $\sqrt{2}\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}|^2$

而  $\cos\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

所以  $\vec{a}, \vec{b}$  夹角为  $\frac{\pi}{4}$

故选: B

**【点睛】**

本题考查了向量数量积求夹角, 需掌握向量数量积的定义求法, 属于基础题.

2、B

**【解析】**

根据充分必要条件的概念进行判断.

**【详解】**

对于充分性: 若  $m \perp n$ , 则  $m, n$  可以平行, 相交, 异面, 故充分性不成立;

若  $m \parallel n$ , 则  $n \perp \alpha, n \perp \beta$ , 可得  $\alpha \parallel \beta$ , 必要性成立.

故选: B

**【点睛】**

本题主要考查空间中直线, 线面, 面面的位置关系, 以及充要条件的判断, 考查学生综合运用知识的能力. 解决充要条件判断问题, 关键是要弄清楚谁是条件, 谁是结论.

3、B

**【解析】**

结合题意可知  $f(x)$  是偶函数, 且在  $(0, +\infty)$  单调递减, 化简题目所给式子, 建立不等式, 结合导函数与原函数的单调性关系, 构造新函数  $h(x), g(x)$ , 计算最值, 即可.

**【详解】**

结合题意可知  $f(x)$  为偶函数, 且在  $(0, +\infty)$  单调递减, 故

$f(2mx - \ln x) \geq 3 \iff f(3) \geq f(2mx - \ln x)$  可以转换为

$f(2mx - \ln x) \geq f(3)$  对应于  $x \in [1, 3]$  恒成立, 即  $|2mx - \ln x - 3| \leq 3$

即  $0 \leq 2mx - \ln x \leq 6$  对  $x \in [1, 3]$  恒成立

即  $2m \geq \frac{\ln x}{x}$  且  $2m \leq \frac{6 - \ln x}{x}$  对  $x \in [1, 3]$  恒成立

令  $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ , 则  $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$  在  $[1, e]$  上递增, 在  $[e, 3]$  上递减

所以  $g(x)_{\max} = \frac{1}{e}$

令  $h(x) = \frac{6 - \ln x}{x}$ ,  $h'(x) = \frac{5 - \ln x}{x^2} > 0$ , 在  $[1, 3]$  上递增

所以  $h(x)_{\min} = \frac{6 - \ln 3}{3}$ . 故  $m \in \left[\frac{1}{2e}, \frac{6 - \ln 3}{6}\right]$ , 故选 B.

**【点睛】**

本道题考查了函数的基本性质和导函数与原函数单调性关系, 计算范围, 可以转化为函数, 结合导函数, 计算最值, 即可得出答案.

4、C

**【解析】**

设  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ , 设直线  $l$  的方程为:  $y = kx + b$ , 与抛物线方程联立, 由  $\Delta > 0$  得  $kb > 1$ , 利用韦达定理结合已知条件得  $b = \frac{2 - k^2}{k}$ ,  $m = \frac{2}{k}$ , 代入上式即可求出  $k$  的取值范围.

**【详解】**

设直线  $l$  的方程为:  $y = kx + b$ ,  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,

联立方程  $\begin{cases} y = kx + b \\ y^2 = 4x \end{cases}$ , 消去  $y$  得:  $k^2x^2 - (2kb - 4)x + b^2 = 0$ ,

$$\Delta = (2kb - 4)^2 - 4k^2b^2 > 0,$$

$$kb > 1,$$

$$\text{且 } x_1 + x_2 = \frac{4 - 2kb}{k^2}, \quad x_1x_2 = \frac{b^2}{k^2},$$

$$y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2) + 2b = \frac{4}{k},$$

$\therefore$  线段  $AB$  的中点为  $M(1, m)$  ( $m > 0$ ),

$$x_1 + x_2 = \frac{4 - 2kb}{k^2} = 2, \quad y_1 + y_2 = \frac{4}{k} = 2m,$$

$$b = \frac{2 - k^2}{k}, \quad m = \frac{2}{k},$$

$\therefore m > 0$ ,

$$k > 0,$$

把  $b = \frac{2 - k^2}{k}$  代入  $kb > 1$ , 得  $2 - k^2 > 1$ ,

$$k^2 < 1,$$

$$k < 1,$$

故选: C

**【点睛】**

本题主要考查了直线与抛物线的位置关系, 考查了韦达定理的应用, 属于中档题.

5、C

**【解析】**

设过点  $F_1$  作圆  $x^2 + y^2 = b^2$  的切线的切点为  $T$ , 根据切线的性质可得  $OT \perp PF_1$ , 且  $|OT| = b$ , 再由  $|PF_2| = 2|PF_1|$  和双曲线的定义可得  $|PF_1| = 2a$ ,  $|PF_2| = 4a$ , 得出  $T$  为  $F_1P$  中点, 则有  $OT \parallel PF_2$ , 得到  $PF_2 \perp PF_1$ , 即可求解.

**【详解】**

设过点  $F_1$  作圆  $x^2 + y^2 = b^2$  的切线的切点为  $T$ ,

$$|OT| = |PF_1|, |FT| = \sqrt{|OF_1|^2 - b^2} = a$$

$$|PF_2| = 2|PF_1|, |PF_2| - |PF_1| = 2a, |PF_2| = 4a, |PF_1| = 2a,$$

所以  $T$  是  $F_1P$  中点,  $OT \perp PF_2$ ,  $PF_1 \perp PF_2$ ,

$$|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = 20a^2 = |F_1F_2|^2 = 4c^2,$$

$$\frac{c^2}{a^2} = 5, e = \sqrt{5}.$$

故选:C.

### 【点睛】

本题考查双曲线的性质、双曲线定义、圆的切线性质,意在考查直观想象、逻辑推理和数学计算能力,属于中档题.

6、C

### 【解析】

利用三角形  $OMF_1$  与  $PF_2F_1$  相似得  $|PF_1| = 2|PF_2|$ , 结合双曲线的定义求得  $a, b, c$  的关系, 从而求得双曲线的渐近线方程.

### 【详解】

设  $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ ,

由  $|F_1O| = 2|OM|$ ,  $OMF_1$  与  $PF_2F_1$  相似,

$$\text{所以 } \frac{|F_1O|}{|OM|} = \frac{|PF_1|}{|PF_2|} = 2, \text{ 即 } |PF_1| = 2|PF_2|,$$

又因为  $|PF_1| - |PF_2| = 2a$ ,

$$\text{所以 } |PF_1| = 4a, |PF_2| = 2a,$$

$$\text{所以 } 4c^2 = 16a^2 - 4a^2, \text{ 即 } c^2 = 5a^2, b^2 = 4a^2,$$

所以双曲线  $C$  的渐近线方程为  $y = 2x$ .

故选: C.

### 【点睛】

本题考查双曲线几何性质、渐近线方程求解,考查数形结合思想,考查逻辑推理能力和运算求解能力.

7、C



【解析】

根据  $|PQ| = 2|OF_2|$  可得四边形  $PF_1QF_2$  为矩形, 设  $PF_1 = n, PF_2 = m$ , 根据椭圆的定义以及勾股定理可得

$\frac{4c^2}{2a^2 - c^2} = \frac{m}{n} = \frac{n}{m}$ , 再分析  $t = \frac{m}{n} = \frac{n}{m}$  的取值范围, 进而求得  $2 \frac{4c^2}{2a^2 - c^2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$  再求离心率的范围即可.

【详解】

设  $PF_1 = n, PF_2 = m$ , 由  $x_1 > 0, y_1 < 0$ , 知  $m > n$ ,

因为  $P(x_1, y_1), Q(x_1, -y_1)$  在椭圆  $C$  上,  $|PQ| = 2|OP| = 2|OF_2|$ ,

所以四边形  $PF_1QF_2$  为矩形,  $QF_1 = PF_2$ ;

由  $\frac{|QF_1|}{|PF_1|} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , 可得  $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{m}{n} > 1$ ,

由椭圆的定义可得  $m + n = 2a, m^2 + n^2 = 4c^2$  ①,

平方相减可得  $mn = 2a^2 - c^2$  ②,

由①②得  $\frac{4c^2}{2a^2 - c^2} = \frac{m^2 + n^2}{mn} = \frac{m}{n} + \frac{n}{m}$ ;

令  $t = \frac{m}{n} + \frac{n}{m}$ ,

令  $v = \frac{m}{n} = \frac{\sqrt{3}}{3}, 1$ ,

所以  $t = v + \frac{1}{v} = 2, \frac{4\sqrt{3}}{3}$ ,

即  $2 \frac{4c^2}{2a^2 - c^2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ ,

所以  $a^2 - c^2 = c^2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} a^2 - c^2$ ,

所以  $1 - e^2 = e^2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} (1 - e^2)$ ,

所以  $\frac{1}{2} - e^2 = 4 - 2\sqrt{3}$ ,

解得  $\frac{\sqrt{2}}{2} = e = \sqrt{3} - 1$ .

故选：C

**【点睛】**

本题主要考查了椭圆的定义运用以及构造齐次式求椭圆的离心率的问题,属于中档题.

8、A

**【解析】**

设圆的标准方程, 利用待定系数法一一求出  $a, b, r$ , 从而求出圆的方程.

**【详解】**

设圆的标准方程为  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ ,

由题意得圆心  $O(a, b)$  为  $A, B$  的中点,

根据中点坐标公式可得  $a = \frac{3 + 2}{2} = \frac{5}{2}$ ,  $b = \frac{1 + 2}{2} = \frac{3}{2}$ ,

又  $r = \frac{|AB|}{2} = \frac{\sqrt{(3 - 2)^2 + (1 - 2)^2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 所以圆的标准方程为:

$(x - \frac{5}{2})^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{1}{2}$ , 化简整理得  $x^2 + y^2 - 5x - 3y + 8 = 0$ ,

所以本题答案为 A.

**【点睛】**

本题考查待定系数法求圆的方程, 解题的关键是假设圆的标准方程, 建立方程组, 属于基础题.

9、C

**【解析】**

根据程序框图写出几次循环的结果, 直到输出结果是 8 时.

**【详解】**

第一次循环:  $S = 0, i = 1$

第二次循环:  $S = 1, i = 2$

第三次循环:  $S = 3, i = 3$

第四次循环:  $S = 6, i = 4$

第五次循环:  $S = 10, i = 5$

第六次循环:  $S = 15, i = 6$

第七次循环:  $S = 21, i = 7$

第八次循环:  $S = 28, i = 8$

所以框图中①处填  $S = 28$  时, 满足输出的值为 8.

故选: C

【点睛】

此题考查算法程序框图, 根据循环条件依次写出每次循环结果即可解决, 属于简单题目.

10、D

【解析】

由题意可得  $a_5 = \frac{a}{a_5}$ , 从而得到  $a_5 = 3$ , 再由  $a_5 = 3$  就可以得出其它各项的值, 进而判断出  $S_9$  的范围.

【详解】

解:  $\because a_i = a_j$ , 或其积  $a_i a_j$ , 或其商  $\frac{a}{a_i}$  仍是该数列中的项,

$a_2 = a_9$  或者  $a_2 a_9$  或者  $\frac{a}{a_2}$  是该数列中的项,

又  $\because$  数列  $\{a_n\}$  是递增数列,

$a_1 = a_2 = a_3 = a_9$ ,

$a_2 = a_9 = a_9$ ,  $a_2 a_9 = a_9$ , 只有  $\frac{a}{a_2}$  是该数列中的项,

同理可以得到  $\frac{a}{a_3}$ ,  $\frac{a}{a_4}$ ,  $\dots$ ,  $\frac{a}{a_8}$  也是该数列中的项, 且有  $a_1 = \frac{a}{a_8} = \frac{a}{a_7} = \frac{a}{a_6} = a_9$ ,

$a_5 = \frac{a}{a_5}$ ,  $a_5 = 3$  或  $a_5 = 3$  (舍),  $a_6 = 3$ ,

根据  $a_1 = 1$ ,  $a_5 = 3$ ,  $a_9 = 9$ ,

同理易得  $a_2 = 3^{\frac{1}{4}}$ ,  $a_3 = 3^{\frac{1}{2}}$ ,  $a_4 = 3^{\frac{3}{4}}$ ,  $a_6 = 3^{\frac{5}{4}}$ ,  $a_7 = 3^{\frac{3}{2}}$ ,  $a_8 = 3^{\frac{7}{4}}$ ,

$S_9 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = \frac{1 - 3^{\frac{9}{4}}}{1 - 3^{\frac{1}{4}}} = 36$ ,

故选: D.

【点睛】

本题考查数列的新定义的理解和运用, 以及运算能力和推理能力, 属于中档题.

11、D

【解析】

A 项用平行于平面 ABC 的平面与平面 MDN 相交, 则交线与平面 ABC 平行;

B 项利用线面垂直的判定定理;

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/108023114137007005>