空间向量与立体几何(重点)

考点一

[解题必备]

设直线l的方向向量为$\boldsymbol{a}=(a_1，b_1，c_1)$，平面$\alpha$，$\beta$的法向量分别为$\boldsymbol{u}=(a_2，b_2，c_2)$，$\boldsymbol{v}=(a_3，b_3，c_3)$.

(1)线面平行

$l /\!/ \alpha \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{u} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{u}=0 \Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$.

(2)线面垂直

$l \perp \alpha \Leftrightarrow \boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{u} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}=k\boldsymbol{u} \Leftrightarrow a_1=ka_2，b_1=kb_2，c_1=kc_2$.

(3)面面平行

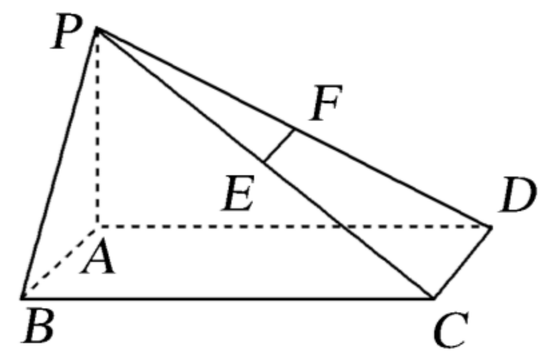
$\alpha /\!/ \beta \Leftrightarrow \boldsymbol{u} /\!/ \boldsymbol{v} \Leftrightarrow \boldsymbol{u}=\lambda \boldsymbol{v} \Leftrightarrow a_2=\lambda a_3$，$b_2=\lambda b_3$，$c_2=\lambda c_3$.

(4)面面垂直

$\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v} \Leftrightarrow \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}=0 \Leftrightarrow a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3=0$.

[典题研磨]

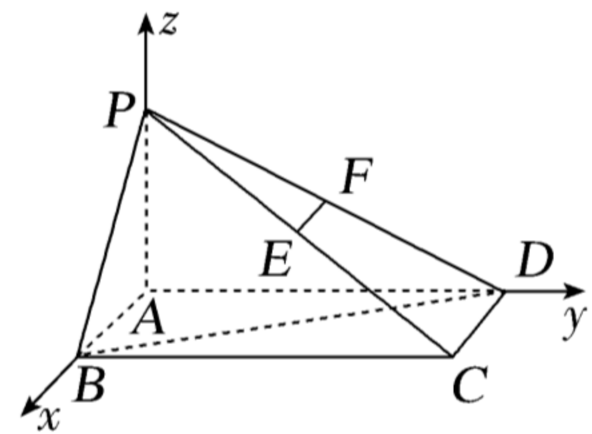
[例1]　如图所示，在底面是矩形的四棱锥$PABCD$中，$PA\perp$底面$ABCD$，E，F分别是PC，PD的中点，$PA=AB=1$，$BC=2$.



(1)求证：$EF\parallel$平面PAB；

(2)求证：平面$PAD\perp$平面PDC.

[证明]　以A为原点，AB，AD，AP所在直线分别为x轴，y轴，z轴，建立空间直角坐标系$Axyz$，如图所示，



则$A(0，0，0)$，$B(1，0，0)$，$C(1，2，0)$，$D(0，2，0)$，$P(0，0，1)$，所以$E(\frac{1}{2}，1，\frac{1}{2})$，$F(0，1，\frac{1}{2})$，$\overrightarrow{EF}=(-\frac{1}{2}，0，0)$，$\overrightarrow{AP}=(0，0，1)$，$\overrightarrow{AD}=(0，2，0)$，$\overrightarrow{DC}=(1，0，0)$，$\overrightarrow{AB}=(1，0，0)$.

(1)因为$\overrightarrow{EF}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，所以$\overrightarrow{EF}/\!/\overrightarrow{AB}$，即$EF/\!/AB$.

又$AB\subset$平面PAB，$EF\not\subset$平面PAB，

所以$EF/\!/$平面PAB.

(2)因为$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{DC}=(0，0，1)\cdot(1，0，0)=0$，

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DC}=(0，2，0)\cdot(1，0，0)=0$，

所以$\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{DC}$，即$AP\perp DC$，$AD\perp DC$.

又因为$AP\cap AD=A$，$AP\subset$平面PAD，$AD\subset$平面PAD，

所以$DC\perp$平面PAD.

因为$DC\subset$平面PDC，所以平面$PAD\perp$平面PDC.

反思提升

利用空间向量证明平行与垂直的步骤

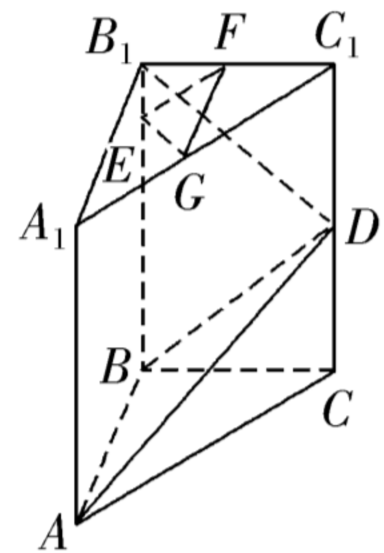
(1)建立空间直角坐标系，建系时，要尽可能地利用载体中的垂直关系；

(2)建立空间图形与空间向量之间的关系，用空间向量表示出问题中所涉及的点、直线、平面的要素；

(3)通过空间向量的运算研究平行、垂直关系；

(4)根据运算结果解释相关问题.

[押题演练]

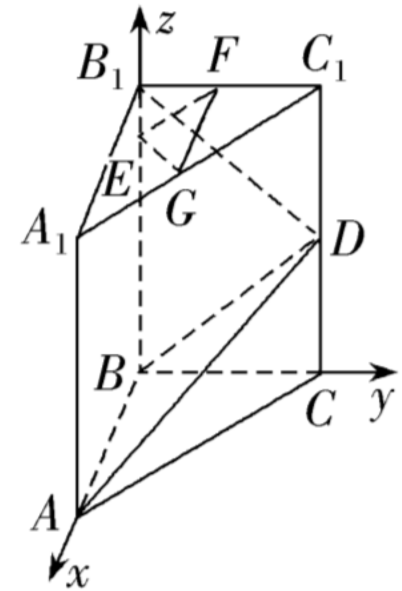


如图，在直三棱柱$ABC\text{-}A_1B_1C_1$中，$\angle ABC=90°$，$BC=2$，$CC_1=4$，点E在线段BB_1上，且$EB_1=1$，D，F，G分别为CC_1，C_1B_1，C_1A_1的中点．求证：

(1)$B_1D\perp$平面ABD；

(2)平面$EGF\parallel$平面ABD.

[证明]　(1)依题意，以B为坐标原点，BA，BC，BB_1所在的直线分别为x轴，y轴，z轴，建立空间直角坐标系$B\ xyz$，如图所示，



则$B(0,\ 0,\ 0)$，$D(0,\ 2,\ 2)$，$B_1(0,\ 0,\ 4)$，$C_1(0,\ 2,\ 4)$，

设$BA=a$，则$A(a,\ 0,\ 0)$，所以$\overrightarrow{BA}=(a,\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{BD}=(0,\ 2,\ 2)$，$B_1D=(0,\ 2,\ -2)$，所以$B_1D\cdot\overrightarrow{BA}=0$，$B_1D\cdot\overrightarrow{BD}=0$，

即$B_1D\perp BA$，$B_1D\perp BD$，

又$BA\cap BD=B$，BA，$BD\subset$平面ABD，

因此$B_1D\perp$平面ABD.

(2)由(1)知，$E(0,\ 0,\ 3)$，$G\left(\frac{a}{2},\ 1,\ 4\right)$，$F(0,\ 1,\ 4)$，

则 $\overrightarrow{EG}=\left(\frac{a}{2},\ 1,\ 1\right)$，$\overrightarrow{EF}=(0,\ 1,\ 1)$，$B_1D\cdot\overrightarrow{EG}=0+2-2=0$，

$B_1D\cdot\overrightarrow{EF}=0+2-2=0$，

即$B_1D\perp EG$，$B_1D\perp EF$.

又$EG\cap EF=E$，EG，$EF\subset$平面EGF，

因此$B_1D\perp$平面EGF.

结合(1)可知B_1D是平面ABD的一个法向量.

所以平面$EGF\parallel$平面ABD.

考点二

[解题必备]

1．异面直线a与b所成的角

根据题意，确定两异面直线各自的方向向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，则两异面直线所成角θ满足$\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$．

2．直线与平面所成的角

向量法：$\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AB},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AB}||\boldsymbol{n}|}$ (其中AB为平面α的斜线，$\boldsymbol{n}$为平面α的法向量，θ为直线AB与平面α所成的角).

3．二面角

向量法：利用公式$\cos\langle \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}$ ($\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$分别为两平面的法向量)进行求解，注意$\langle \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2\rangle$与二面角大小的关系，是相等还是互补，需结合图形进行判断.

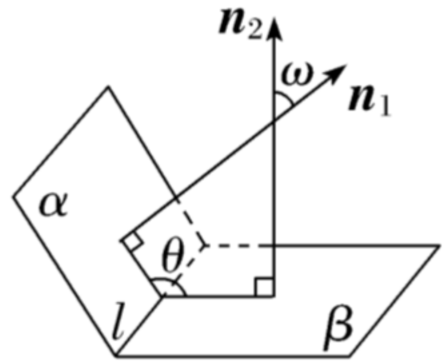


图 1

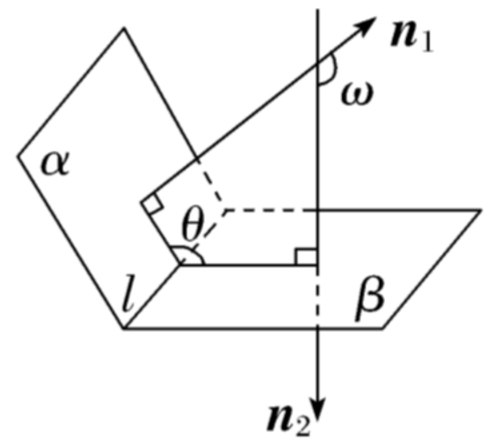
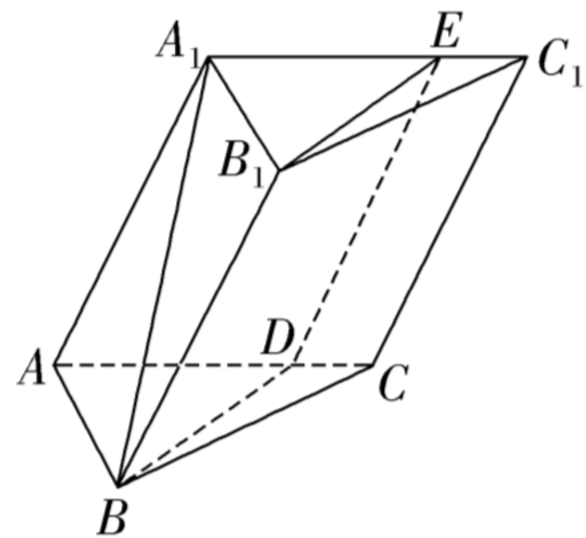


图 2

[典题研磨]

角度一　求线面角或异面直线所成的角

[例2]　(2023·重庆名校联盟第一次联考)如图，在三棱柱$ABC\text{-}A_1B_1C_1$中，四边形AA_1C_1C是边长为4的菱形，$AB=BC=\sqrt{13}$，点D为棱AC上一动点(不与A，C重合)，平面B_1BD与棱A_1C_1交于点E.



(1)求证：$BB_1 /\!/ DE$；

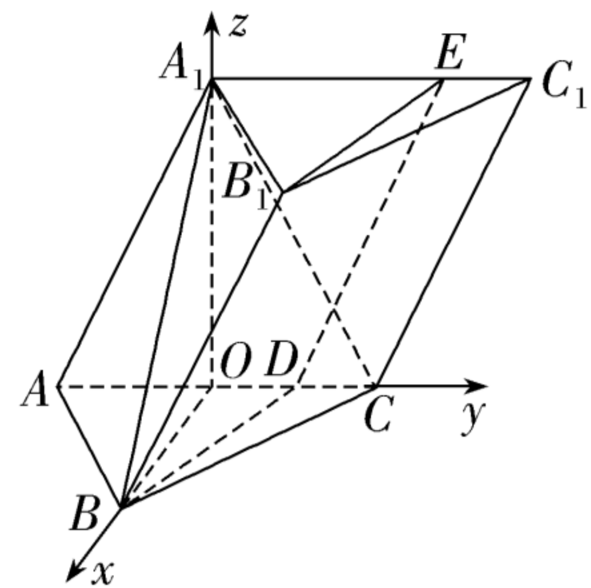
(2)若$\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{3}{4}$，且平面$ABC\perp$平面$AA_1C_1C$，$\angle A_1AC=60°$；求直线$AB$与平面$B_1BDE$所成角的正弦值.

[解]　(1)证明：在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1 \parallel BB_1$，又 $BB_1 \not\subset$ 平面 ACC_1A_1，$AA_1 \subset$ 平面 ACC_1A_1，

所以 $BB_1 \parallel$ 平面 ACC_1A_1.

又平面 $B_1BDE \cap$ 平面 $ACC_1A_1 = DE$，$BB_1 \subset$ 平面 B_1BDE，所以 $BB_1 \parallel DE$.

(2)如图，连接 A_1C，取 AC 的中点为 O，连接 A_1O，BO.



在菱形 ACC_1A_1 中，$\angle A_1AC = 60°$，

所以 $\triangle A_1AC$ 为等边三角形.

因为 O 为 AC 的中点，所以 $A_1O \perp AC$，

又平面 $ABC \perp$ 平面 ACC_1A_1，

平面 $ABC\cap$平面 $ACC_1A_1=AC$，$A_1O\subset$平面 ACC_1A_1，

所以 $A_1O\perp$平面 ABC，

所以 $A_1O\perp OB$.

因为 $AB=BC$，所以 $BO\perp AC$.

以 O 为坐标原点，OB，OC，OA_1 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立如图所示空间直角坐标系，

则 $O(0,\ 0,\ 0)$，$A(0,\ -2,\ 0)$，$A_1(0,\ 0,\ 2\sqrt{3})$，$B(3,\ 0,\ 0)$，$D(0,\ 1,\ 0)$，

所以 $\overrightarrow{BD}=(-3,\ 1,\ 0)$，$\overrightarrow{DE}=AA_1=(0,\ 2,\ 2\sqrt{3})$.

设平面 B_1BDE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0\end{cases}$，所以$\begin{cases}-3x_1+y_1=0\\ 2y_1+2\sqrt{3}z_1=0\end{cases}$，

令 $z_1=-\sqrt{3}$，则 $y_1=3$，$x_1=1$，故 $\boldsymbol{n}=(1，3，-\sqrt{3})$.

记直线 AB 与平面 B_1BDE 所成的角为 θ，因为$\overrightarrow{AB}=(3，2，0)$，

所以 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AB}，\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AB}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{9}{13}$.

所以直线 AB 与平面 B_1BDE 所成角的正弦值为$\dfrac{9}{13}$.

反思提升

用空间向量破解线面所成角问题的模板

(1)建系→找出(或作出)两两垂直的三条直线，建立适当的空间直角坐标系．

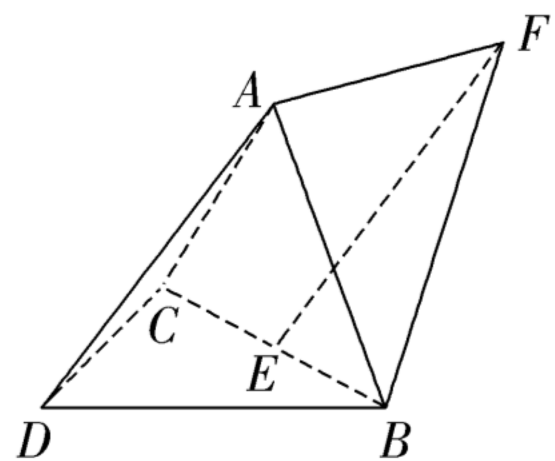
(2)求向量→先分别求出相关点的坐标，再求直线的方向向量和平面的法向量等．

(3)用公式→由两向量夹角的余弦公式 $\cos\langle \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}$ 求两个向量的夹角的余弦值．

[注意]　平面的法向量与斜线的方向向量所成角的余弦值的绝对值为线面角的正弦值．

角度二　平面与平面的夹角(二面角)

[例　3]　(2023·新课标Ⅱ卷)如图，三棱锥 $A-BCD$ 中，$DA=DB=DC$，$BD\perp CD$，$\angle ADB=\angle ADC=60°$，$E$ 为 BC 的中点.



(1)证明：$BC\perp DA$；

(2)点 F 满足$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DA}$，求二面角 $D-AB-F$ 的正弦值.