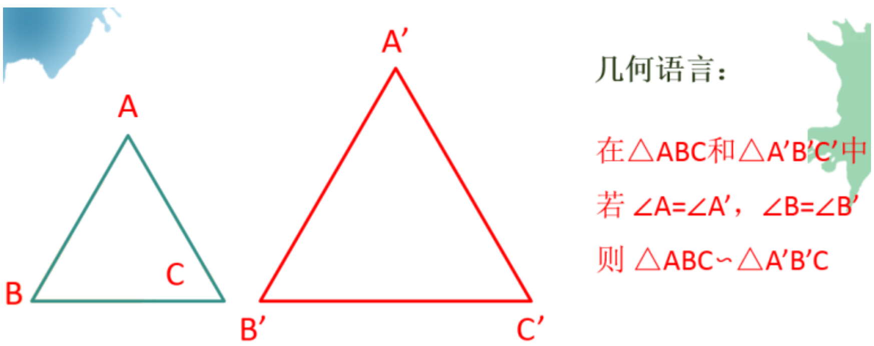
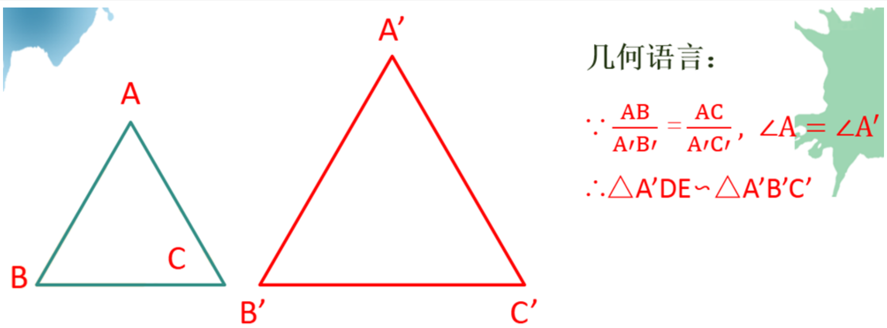
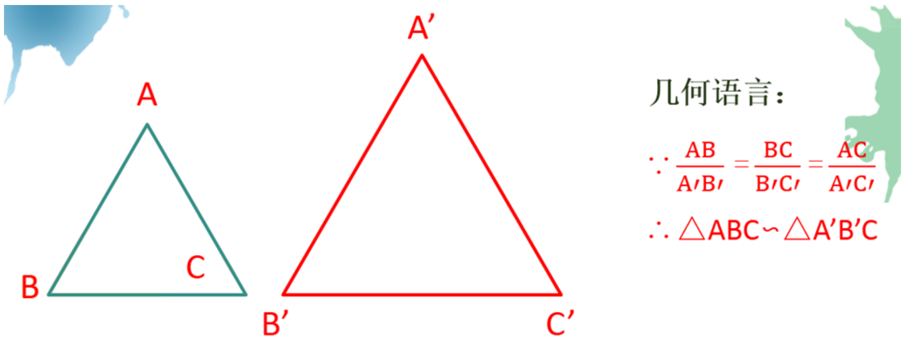
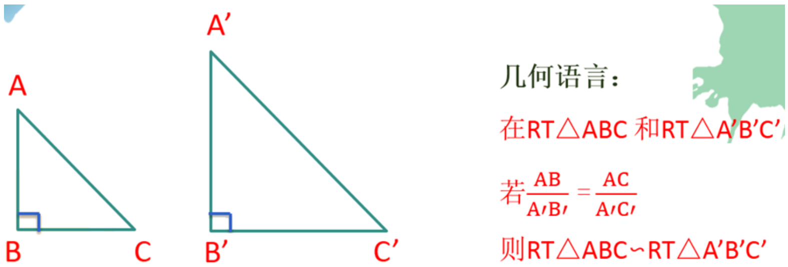
专题 09 相似三角形的判定与性质（10 大题型）

【题型目录】

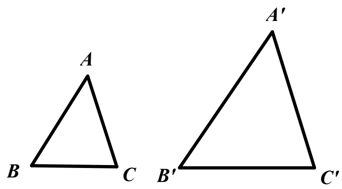
【知识梳理】

知识点一、相似三角形的判定

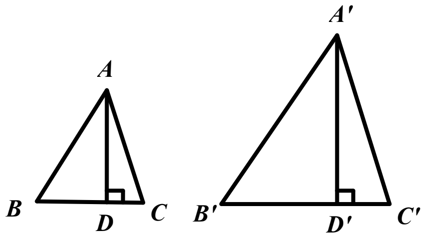
<table>
<tr><td>预备定理</td><td>平行于三角形的一边的直线与其他两边（或两边的延长线）相交，所构成的三角形与原三角形<u>相似</u>.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">判定 1</td><td>有<u>两</u>个角对应相等的两个三角形相似.</td></tr>
<tr><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">判定 2</td><td>两边对应<u>成比例</u>且夹角<u>相等</u>的两个三角形相似.</td></tr>
<tr><td>
</td></tr>
<tr><td>判定 3</td><td>三边<u>对应成比例</u>的两个三角形相似</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">直角三角形
的特殊判定</td><td>若一个直角三角形的斜边和一条直角边与另一个直角三角形的斜边和直角边对应成比例，那么这两个直角三角形相似.</td></tr>
<tr><td>
</td></tr>
</table>

知识点二、相似三角形的性质

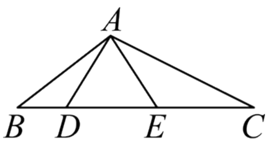
<table>
<tr><td>性质 1</td><td>相似三角形的对应边<u>成比例</u>，对应角<u>相等</u>。</td></tr>
<tr><td rowspan="2">性质 2</td><td>相似三角形的周长比等于<u>相似比</u>。</td></tr>
<tr><td>$\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$，则 $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{CA}{C'A'}=k$,
由比例性质可得：$\dfrac{AB+BC+CA}{A'B'+B'C'+C'A'}=\dfrac{kA'B'+kB'C'+kC'A'}{A'B'+B'C'+C'A'}=k$


类似地，我们还可以得到：相似多边形周长的比等于相似比。</td></tr>
<tr><td rowspan="2">性质 3</td><td>相似三角形的面积比等于<u>相似比的平方</u>。</td></tr>
<tr><td>$\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$，则 $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{CA}{C'A'}=k$，分别作出 ΔABC 与 $\Delta A'B'C'$ 的高 AD 和 $A'D'$，则 $\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S'_{\triangle A'B'C'}}=\dfrac{\frac{1}{2}BC\cdot AD}{\frac{1}{2}B'C'\cdot A'D'}=\dfrac{\frac{1}{2}k\cdot B'C'\cdot k\cdot A'D'}{\frac{1}{2}B'C'\cdot A'D'}=k^2$</td></tr>
</table>

	 **要点诠释：**相似三角形的性质是通过比例线段的性质推证出来的。 如果把两个相似多边形分成若干个相似的三角形，我们还可以得到： **相似多边形面积的比等于相似比的平方。**
性质 4	相似三角形的对应高的比、对应中线的比、对应角平分线之比等于**<u>相似比</u>**。
	要点诠释：要特别注意“对应”两个字，在应用时，要注意找准对应线段。

【经典例题一 证明两三角形相似】

1．(2023 春·山东东营·八年级校考阶段练习）如图，$\triangle ABC$ 的 BC 边上有两点 D、E，且$\vee ADE$是正三角形，则下列条件不一定能使$\triangle ABD$与$\triangle AEC$相似的是（　）



A．$\angle BAC=120°$　B．$AC^2=EC\cdot EB$　C．$DE^2=BD\cdot EC$　D．$\angle EAC+\angle B=60°$

【答案】B

【分析】由$\vee ADE$是正三角形，所以$AD=AE=DE$，$\angle ADE=\angle DAE=\angle AED=60°$，再根据相似三角形的判定方法逐项分析即可．

【详解】解：$\because \vee ADE$是正三角形，

$\therefore \angle ADE=\angle AED=\angle DAE=60°$，

$\therefore \angle ADB=\angle AEC=120°$

选项 A，当$\angle BAC=120°$时，$\angle BAD+\angle EAC=60°$，

$\because \angle C+\angle EAC=60°$，

$\therefore \angle BAD=\angle C$，

$\therefore \triangle ABD \backsim \triangle CAE$，

选项 C，由$DE^2=BD\cdot EC$，

$\therefore \frac{DE}{BD}=\frac{EC}{DE}$

$\because AD = AE = DE$

$\therefore \dfrac{AD}{BD} = \dfrac{EC}{AE}$

又$\because \angle ADB = \angle AEC = 120°$，

$\therefore \triangle ABD \backsim \triangle CAE$，

选项 D，由$\angle BAD + \angle B = 60°$，$\angle EAC + \angle B = 60°$，

$\therefore \angle BAD = \angle EAC$，

$\because \angle ADB = \angle AEC = 120°$

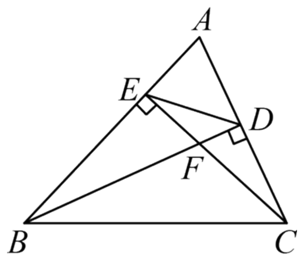
$\therefore \triangle ABD \backsim \triangle ACE$，

选项 B 条件不足以证明$\triangle ABD$与$\triangle AEC$，

故选：B．

【点睛】本题考查了相似三角形的判定和等边三角形的性质，掌握相似三角形的判定定理是关键．

2．（2023 秋·河南洛阳·九年级偃师市实验中学校考阶段练习）如图，锐角$\triangle ABC$的边AB、AC上的高线BD、CE交于点F，连接ED，则图中相似的三角形有（　）



A．5 对　　B．6 对　　C．7 对　　D．8 对

【答案】D

【分析】平行于三角形一边的直线和其他两边或两边的延长线相交，所构成的三角形与原三角形相似；三边对应成比例，两个三角形相似；两边对应成比例且夹角相等，两个三角形相似；两角对应相等，两个三角形相似．根据相似三角形的判定定理分析判断即可．

【详解】解：根据题意，$BD \perp AC$，$CE \perp AB$，

$\therefore \angle AEC = \angle BEC = \angle ADB = \angle CDB = 90°$，

$\therefore \angle A + \angle ABD = \angle A + \angle ACE$，

$\therefore \angle ABD = \angle ACE$；

$\because \angle ABD = \angle ACE$，$\angle A = \angle A$，

$\therefore \triangle ABD \backsim \triangle ACE$；

$\because \angle ABD=\angle FBE$，$\angle ADB=\angle FEB=90°$，

$\therefore \triangle ABD\backsim\triangle FBE$；

$\because \angle ABD=\angle ACE$，$\angle FEB=\angle FDC=90°$，

$\therefore \triangle BEF\backsim\triangle CDF$；

$\because \angle ACE=\angle DCF$，$\angle AEC=\angle FDC=90°$，

$\therefore \triangle ACE\backsim\triangle FCD$；

$\because \angle ABD=\angle FCD$，$\angle ADB=\angle FDC=90°$，

$\therefore \triangle ABD\backsim\triangle FCD$；

$\because \angle ACE=\angle FBE$，$\angle AEC=\angle FEB=90°$，

$\therefore \triangle ACE\backsim\triangle FBE$；

$\because \triangle ABD\backsim\triangle ACE$，

$\therefore \dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$，

又$\because \angle A=\angle A$，

$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle ABC$；

$\because \triangle BEF\backsim\triangle CDF$，

$\therefore \dfrac{FE}{FD}=\dfrac{FB}{FC}$，

又$\because \angle EFD=\angle BFC$，

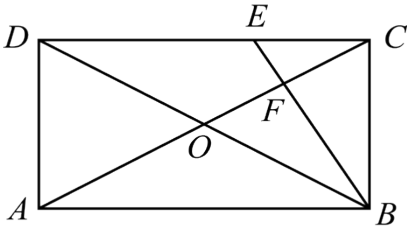
$\therefore \triangle EFD\backsim\triangle BFC$．

综上所述，图中相似的三角形有$\triangle ABD\backsim\triangle ACE$，$\triangle ABD\backsim\triangle FBE$，$\triangle BEF\backsim\triangle CDF$，$\triangle ACE\backsim\triangle FCD$，$\triangle ABD\backsim\triangle FCD$，$\triangle ACE\backsim\triangle FBE$，$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$，$\triangle EFD\backsim\triangle BFC$，共计 8 对．

故选：D．

【点睛】本题主要考查相似三角形的判定，解题关键是理解相似三角形的判定定理，同时主要不要有所遗漏．

3．（2023 春·河北衡水·九年级校考期中）如图，在矩形$ABCD$中，点E在DC上，$DE=BE$，AC与BD相交于点O，BE与AC相交于点F．



（1）若 BE 平分 $\angle CBD$，则 BF 与 AC 是否垂直？______（填“是”或“否”）;

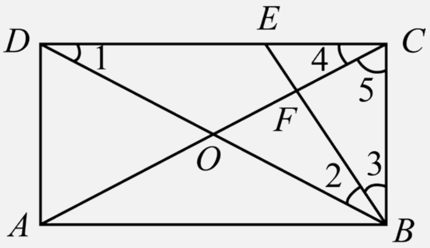
（2）图中与 $\triangle OBF$ 相似的三角形有______（写出两个即可）

【答案】 是 $\triangle ECF$， $\triangle BAF$

【分析】（1）根据矩形的性质和角平分线的定义即可得出结论;

（2）根据判定两个三角形相似的判定定理，找到相应的角度相等即可得出.

【详解】（1）如图,



$\because$矩形 $ABCD$，

$\therefore OC = DO$， $\angle BCD = 90°$，

$\therefore \angle 1 = \angle 4$，

$\because DE = BE$，

$\therefore \angle 1 = \angle 2$，

$\therefore \angle 2 = \angle 4$，

$\because BE$ 平分 $\angle CBD$，

$\therefore \angle 2 = \angle 3$，

$\therefore \angle 3 = \angle 4$，

$\therefore \angle 3 + \angle 5 = \angle 4 + \angle 5 = \angle BCD = 90°$，

$\therefore \angle BFC = 90°$，

$\therefore BF \perp AC$；

故答案为：是；

（2）$\because \angle 2 = \angle 4, \angle BFO = \angle CFE$，

$\therefore \triangle OBF \backsim \triangle EFC$，

$\because$矩形 $ABCD$，

$\therefore CD \parallel AB$，

$\therefore \angle 4 = \angle CAB$，

$\therefore \angle 2 = \angle CAB$，

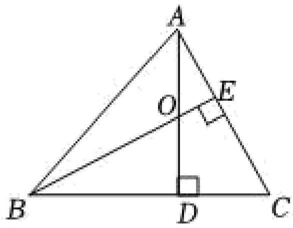
又$\angle AFB=\angle OFB$，

$\therefore \triangle AFB\backsim\triangle BFO$；

故答案为：$\triangle ECF$，$\triangle BAF$．

【点睛】本题考查矩形的性质，相似三角形的判定，等边对等角．熟练掌握矩形的性质，是解题的关键．

4．（2023秋·全国·九年级专题练习）如图，$\triangle ABC$的高AD，BE相交于点O，写出一个与$\triangle ACD$相似的三角形，这个三角形可以是_____．



【答案】$\triangle AOE$（答案不唯一）

【分析】根据已知条件得$\angle ADC=\angle AEO=90°$，$\angle CAD=\angle OAE$，推出$\triangle ACD\sim\triangle AOE$，其他同理.

【详解】解：$\triangle ACD\sim\triangle AOE$；

证明：$\because \triangle ABC$的高AD，BE相交于点O，

$\therefore \angle ADC=\angle AEO=90°$，

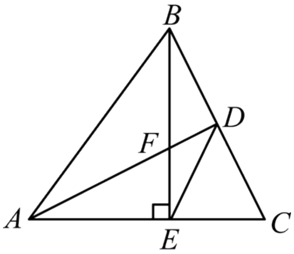
$\because \angle CAD=\angle OAE$，

$\therefore \triangle ACD\sim\triangle AOE$；

故答案为：$\triangle AOE$（答案不唯一）．

【点睛】本题考查相似三角形的判定，三角形的高的定义，解题的关键是掌握有两角对应的两个三角形相似.

5．（2023秋·辽宁沈阳·九年级沈阳市第一二六中学校联考阶段练习）如图，AD和BE都是$\triangle ABC$的高，相交于F点，连接DE．



(1)求证：$\triangle CAB\sim\triangle CDE$；

(2)若点D是BC的中点，$CE=6\text{cm}$，$BE=8\text{cm}$，则AB的长为__________．

【答案】(1)见解析

(2) $\frac{25}{3}$

【分析】（1）根据相似三角形的判定 $\triangle ACD \backsim \triangle BCE$，即 $\frac{CD}{AC}=\frac{CE}{BC}$，再根据 $\angle C=\angle C$ 即可证明结论；

（2）根据垂直平分线的性质可得 $AB=AC$，由(1) $\triangle ACD \backsim \triangle BCE$， 可得 $\frac{AD}{CD}=\frac{BE}{CE}$，再根据勾股定理即可求出 AB 的长；

【详解】（1）证明: $\because AD$、BE 是 $\triangle ABC$ 的高,

$\therefore \angle ADC=\angle BEC=90^{\circ}$,

$\because \angle C=\angle C$,

$\therefore \triangle ACD \backsim \triangle BCE$，

$\therefore \frac{CD}{CE}=\frac{AC}{BC}$， 即 $\frac{CD}{AC}=\frac{CE}{BC}$,

又$\because \angle C=\angle C$,

$\therefore \triangle CAB \sim \triangle CDE$；

（2）$\because$点 D 是 BC 的中点, $AD \perp BC$,

$\therefore AB=AC$,

在 $\mathrm{Rt}\triangle BEC$ 中,

$\because CE=6, BE=8$,

$\therefore BC=\sqrt{CE^{2}+BE^{2}}=\sqrt{6^{2}+8^{2}}=10$，

$\therefore CD=\frac{1}{2}BC=5$,

$\because \triangle ACD \backsim \triangle BCE$，

$\therefore \frac{AD}{CD}=\frac{BE}{EC}$,

$\therefore AD=\frac{8\times 5}{6}=\frac{20}{3}$,

$\therefore AC=\sqrt{AD^{2}+CD^{2}}=\sqrt{\left(\frac{20}{3}\right)^{2}+5^{2}}=\frac{25}{3}$,

$\therefore AB=AC=\frac{25}{3}$.

故答案为： $\frac{25}{3}$.

【点睛】本题考查了等腰三角形的性质，勾股定理，相似三角形的判定与性质，解决本题的关键是证明

$\triangle ACD \backsim \triangle BCE$.

【经典例题二 选择或补充条件使两个三角形相似】

1．（2023 秋·河北邢台·九年级邢台市第七中学校联考阶段练习）在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中，已知 $AB=AC$，$DE=DF$，如果从下列条件中增添一个条件，$\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 仍不一定相似，那么这个条件是（　）

A．$\angle A=\angle D$　　B．$\angle B=\angle E$

C．$\angle A=\angle E$　　D．$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$

【答案】C

【分析】两边对应成比例且夹角相等，两个三角形相似；三边对应成比例，两个三角形相似；两角对应相等，两个三角形相似．根据相似三角形的判定定理进行分析判断即可．

【详解】解：A.由 $\angle A=\angle D$，可以根据两边成比例且夹角相等，证明 $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$，该选项不符合题意；

B. 由 $\angle B=\angle E$，可推导出 $\angle C=\angle F$，根据两角对应相等，证明 $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$，该选项不符合题意；

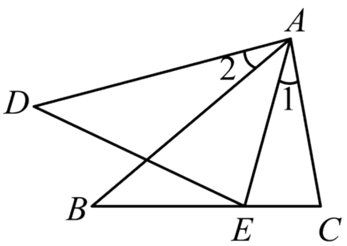
C.由 $\angle A=\angle E$，不能判定两个三角形相似，符合题意；

D.由 $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$，可推导 $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{AC}{DF}$，根据三边对应成比例，证明 $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$，该选项不符合题意．

故选：C．

【点睛】本题主要考查了相似三角形的判定以及等腰三角形的性质等知识，熟练掌握相似三角形的判定方法是解题关键．

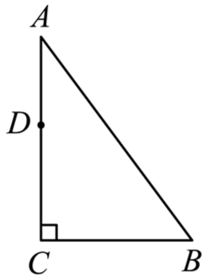
2．（2022 秋·湖南株洲·九年级校考期中）如图，已知 $\angle 1=\angle 2$，添加下列条件后，仍无法判定 $\triangle ABC \backsim \triangle ADE$ 的是（　）



A．$\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AE}$　　B．$\angle B=\angle D$　　C．$\angle C=\angle AED$　　D．$\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DE}$

【答案】D

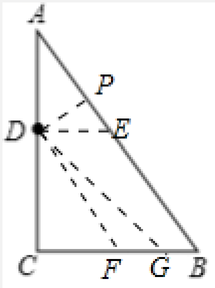
3．（2023 秋·安徽滁州·九年级校联考期末）如图，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，直角边 AC 上有一动点 D（不与点 A,C 重合）．过 D 点作直线截 $\triangle ABC$，使截得的三角形与 $\triangle ABC$ 相似，则满足这样条件的直线共有_____条．



【答案】4

【分析】过点 D 作直线与另一边相交，使所得的三角形与原三角形已经有一个公共角，只要再作一个等于 $\triangle ABC$ 的另一个角即可.

【详解】解：如图：



①过点 D 作 AB 的垂线段 PD，则 $\triangle APD \backsim \triangle ACB$；

②过点 D 作 BC 的平行线 PE，交 AB 于 E，则 $\triangle ADE \backsim \triangle ACB$

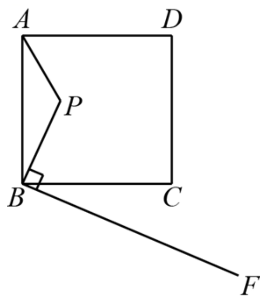
③过点 D 作 AB 的平行线 PF，交 BC 于 F，则 $\triangle DCF \backsim \triangle ACB$；

④作 $\angle DGC = \angle A$，则 $\triangle GCD \backsim \triangle ACB$.

故答案为：4

【点睛】此题主要考查了三角形相似的判定方法，解题关键是理解并掌握平行于三角形一边的直线截另两边或另两边的延长线所得三角形与原三角形相似，有两个角对应相等的三角形相似.

4．（2022 秋·九年级单元测试）如图，已知 P 是边长为 5 的正方形 $ABCD$ 内一点，且 $PB=3$， $BF \perp BP$ 于 B，若在射线 BF 上找一点 M，使以点 B，M，C 为顶点的三角形一定与 $\triangle ABP$ 相似，则 BM 的值为______.



【答案】3 或 $\frac{25}{3}$

【分析】由于 $\angle ABC=\angle PBF=90^{\circ}$，同时减去 $\angle PBC$ 后可得到 $\angle ABP=\angle CBF$，若以点 B，M，C 为顶点的三角形与 $\triangle ABP$ 相似，那么必有：$AB:PB=BC:BM$ 或 $AB:BP=BM:BC$，可据此求得 BM 的值．

【详解】解：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形

$\therefore \angle ABC=90^{\circ}$，$AB=BC=5$；

又 $\because \angle PBF=90^{\circ}$，

$\therefore \angle ABP=\angle CBF=90^{\circ}-\angle CBP$；

若以点 B，M，C 为顶点的三角形与 $\triangle ABP$ 相似，

则：①如图 1 中，$\dfrac{AB}{PB}=\dfrac{BM}{BC}$，即 $\dfrac{5}{3}=\dfrac{BM}{5}$，

解得 $BM=\dfrac{25}{3}$；

②如图 2 中，$\dfrac{AB}{PB}=\dfrac{BC}{BM}$，即 $\dfrac{5}{3}=\dfrac{5}{BM}$，

解得 $BM=3$．

综上所述，满足条件的 BM 的值为 3 或 $\dfrac{25}{3}$．

故答案为：3 或 $\dfrac{25}{3}$．

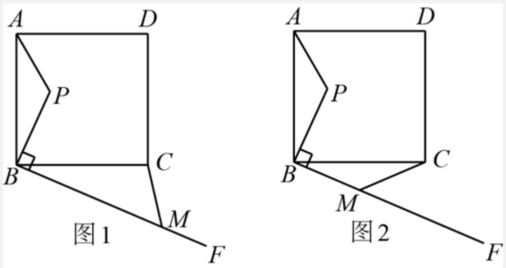


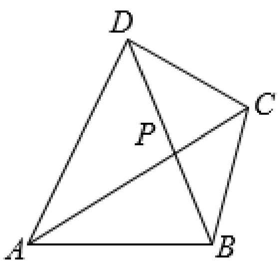
图1　图2

【点睛】此题主要考查的是相似三角形的判定和性质，应注意相似三角形的对应顶点不明确时，要分类讨论，不要漏解．

5．（2023 秋·全国·九年级专题练习）在① $DP\cdot PB=CP\cdot PA$，② $\angle BAP=\angle CDP$，③ $DP\cdot AB=CD\cdot PB$ 这三个条件中选择其中一个，补充在下面的问题中，使命题正确，并证明．

问题：如图，四边形 $ABCD$ 的两条对角线交于 P 点，若_（填序号）

求证：$\triangle ABP\sim\triangle DCP$．



【答案】①，证明见解析或②，证明见解析．

【分析】若选择条件①，可利用两边成比例且夹角相等的两个三角形相似；

若选择条件②，可利用两角相等的两个三角形相似．

【详解】解：选择条件①的证明为：

$\because DP\cdot PB=CP\cdot PA$，

$\therefore \frac{PA}{DP}=\frac{PB}{CP}$，

又$\because \angle APB=\angle DPC$，

$\therefore \triangle ABP\backsim\triangle DCP$；

选择条件②的证明为：

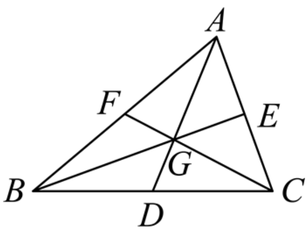
$\because \angle APB=\angle DPC$，$\angle BAP=\angle CDP$

$\therefore \triangle ABP\backsim\triangle DCP$．

【点睛】本题考查相似三角形的判定定理，能熟记相似三角形的判定定理，并正确识图是解题关键．

【经典例题三 重心的有关性质】

1．（2022秋·上海徐汇·九年级校考阶段练习）如图，在$\triangle ABC$中，中线AD、BE、CF相交于点G，下列说法错误的是（ ）



A．点G为$\triangle ABC$的重心　　B．$GC=2GF$

C．当$\triangle ABC$为等边三角形时，$GA=GB$　　D．$S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle GBC}$

【答案】D

【分析】根据三角形的重心性质可判断选项A、B；根据等边三角形的性质得到$AD=BE$，可判断选项C；根据三角形的中线将三角形的面积平分可判断选项D．

【详解】解：A、$\because$ $\triangle ABC$的中线AD、BE、CF相交于点G，

$\therefore$点G为$\triangle ABC$的重心，故选项A正确，不符合题意；

B、$\because$点G为$\triangle ABC$的重心，

$\therefore GC:GF=2:1$，即$GC=2GF$，故选项B正确，不符合题意；

C、$\because \triangle ABC$为等边三角形，

$\therefore AD=BE$，

$\because GA=2GD$，$GB=2GE$，

$\therefore GA=\frac{2}{3}AD$，$GB=\frac{2}{3}BE$，

$\therefore GA=GB$，故选项C正确，不符合题意；

D、$\because GA=2GD$，

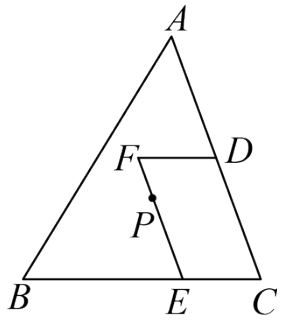
$\therefore AD=3DG$，则$S_{\triangle ABD}=3S_{\triangle GBD}=3S_{\triangle GCD}$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=3S_{\triangle GBC}$，故选项D错误，符合题意，

故选：D．

【点睛】本题考查三角形的重心性质、等边三角形的性质、三角形的中线性质，解答的关键是熟练掌握三角形的中线性质和重心性质：三角形的重心到顶点的距离与重心到对边中点的距离之比为$2:1$．

2．（2023·浙江嘉兴·统考中考真题）如图，点P是$\triangle ABC$的重心，点D是边AC的中点，$PE// AC$交BC于点E，$DF// BC$交EP于点F，若四边形$CDFE$的面积为6，则$\triangle ABC$的面积为（　　）

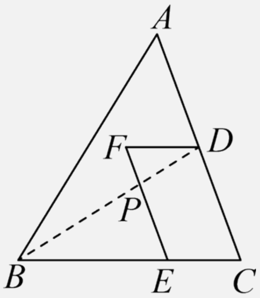


A．12　　B．14　　C．18　　D．24

【答案】C

【分析】连接BD，由点P是$\triangle ABC$的重心，点D是边AC的中点，可得点B、P、D在一条直线上，且$BP:PD=2:1$，$S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$，通过$\triangle BEP\backsim\triangle BCD$可得$S_{\triangle BEP}=\frac{4}{9}S_{\triangle BCD}$，从而得到$S_{四边形CEPD}=\frac{5}{9}S_{\triangle BCD}$，通过$\triangle BEP\backsim\triangle DFP$，可得$S_{\triangle DFP}=\frac{1}{4}S_{BEP}=\frac{1}{4}\times\frac{4}{9}S_{\triangle BCD}=\frac{1}{9}S_{\triangle BCD}$，再根据四边形$CDFE$的面积为6，可得出$S_{\triangle BCD}$，进而可得出$\triangle ABC$的面积．

【详解】解：如图所示，连接BD，



，

∵点 P 是 $\triangle ABC$ 的重心，点 D 是边 AC 的中点，

∴点 B、P、D 在一条直线上，且 $BP:PD=2:1$，$S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$，

∵ $PE//AC$，

∴$\triangle BEP\backsim\triangle BCD$，

∵ $BP:PD=2:1$，

∴ $BP:BD=2:3$，

∴ $S_{\triangle BEP}:S_{\triangle BCD}=4:9$，

∴ $S_{\triangle BEP}=\frac{4}{9}S_{\triangle BCD}$，

∴ $S_{四边形CEPD}=S_{\triangle BCD}-S_{\triangle BEP}=\frac{5}{9}S_{\triangle BCD}$，

∵ $DF//BC$，

∴$\triangle BEP\backsim\triangle DFP$，

∵ $BP:PD=2:1$，

∴ $S_{\triangle BEP}:S_{\triangle DFP}=4$，

∴ $S_{\triangle DFP}=\frac{1}{4}S_{\triangle BEP}=\frac{1}{4}\times\frac{4}{9}S_{\triangle BCD}=\frac{1}{9}S_{\triangle BCD}$，

∵ $S_{四边形CDFE}=S_{四边形CEPD}+S_{\triangle DFP}=\frac{5}{9}S_{\triangle BCD}+\frac{1}{9}S_{\triangle BCD}=\frac{6}{9}S_{\triangle BCD}=6$，

∴ $S_{\triangle BCD}=9$，

∴ $S_{\triangle ABC}=18$，

故选：C．

【点睛】本题主要考查了三角形的重心的性质，相似三角形的判定与性质，根据三角形的中线求面积，熟练掌握三角形的重心的性质，相似三角形的判定与性质，添加适当的辅助线，是解题的关键．

3．（2023春·湖北武汉·九年级校考自主招生）已知 D 是 $\triangle ABC$ 的 BC 边的中点，G 是重心，$S_{\triangle GBD}=1.5\text{cm}^2$，

则$S_{\triangle ABC}=$__________cm^2

【答案】9

【分析】根据三角形的重心的性质，可得$AG=2GD$，进而得出$S_{\triangle ABD}=4.5\mathrm{cm}^2$，根据三角形的中线的性质，即可求解.

【详解】解：$\because G$是重心，

$\therefore AG=2GD$，

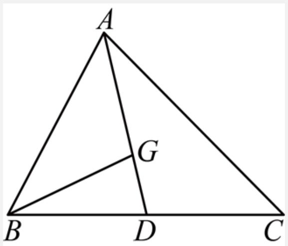
$\therefore S_{\triangle GBA}=2S_{\triangle GBD}=3\mathrm{cm}^2$，

$\therefore S_{\triangle ABD}=4.5\mathrm{cm}^2$，

$\because D$是$\triangle ABC$的BC边的中点，

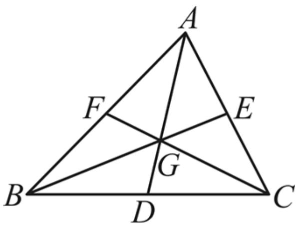
$\therefore S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle ABD}=9\mathrm{cm}^2$，

故答案为：　9.



【点睛】本题考查了三角形重心的性质以及三角形中线的性质，熟练掌握三角形重心的性质以及三角形中线的性质是解题的关键.

4.（2023秋·湖北十堰·八年级校联考阶段练习）如图，点G为$\triangle ABC$的重心，D，E，F分别为BC，CA，AB的中点，具有性质：$AG:GD=BG:GE=CG:GF=2:1$．已知$\triangle AFG$的面积为2，则ΔABC的面积为____.



【答案】12

【分析】根据高相等的两个三角形的面积之比等于底之比可得答案.

【详解】解：$\because CG:GF=2:1$，$\triangle AFG$的面积为2，

$\therefore\triangle ACG$的面积为4，

$\therefore\triangle ACF$的面积为$2+4=6$，

∵点 F 为 AB 的中点，

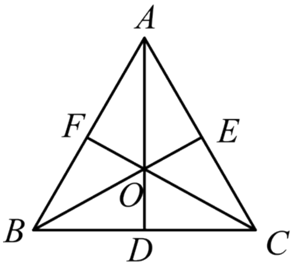
∴$\triangle ACF$ 的面积=$\triangle BCF$ 的面积，

∴$\triangle ABC$ 的面积为 $6+6=12$，

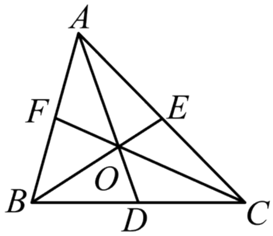
故答案为：12.

【点睛】本题主要考查了三角形的重心，三角形的面积等知识，熟练掌握高相等的两个三角形的面积之比等于底之比是解题的关键.

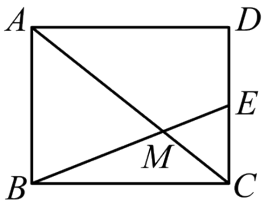
5.（2023 春·湖南永州·九年级校考开学考试）阅读材料：三角形的三条中线必交于一点，这个交点称为三角形的重心.



图(1)



图(2)



图(3)

(1)特例感知：如图（1），已知边长为 2 的等边 $\triangle ABC$ 的重心为点 O，则 $\triangle OBC$ 的面积为______；

(2)性质探究：如图（2），已知 $\triangle ABC$ 的重心为点 O，对于任意形状的 $\triangle ABC$，$\dfrac{OD}{OA}$ 是不是定值，如果是，请求出定值为多少，如果不是，请说明理由；

(3)性质应用：如图（3），在任意矩形 $ABCD$ 中，点 E 是 CD 的中点，连接 BE 交对角线 AC 于点 M，$\dfrac{S_{矩形ABCD}}{S_{三角形CME}}$ 的值是不是定值，如果是，请求出定值为多少，如果不是，请说明理由.

【答案】(1) $\sqrt{3}$

(2)是，$\dfrac{1}{2}$

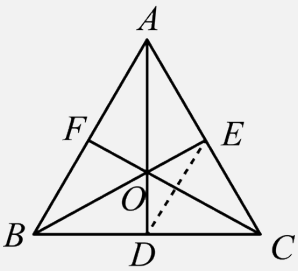
(3)是，12

【分析】（1）连接 DE，利用相似三角形证明 $\dfrac{OD}{OA}=\dfrac{1}{2}$，运用勾股定理求出 AD 的长，运用三角形面积公式求解即可；

（2）根据（1）的证明可求解；

（3）由 $\triangle ABM \backsim \triangle CEM$ 得到 $S_{\triangle ABM}=2S_{\triangle BCM}=4S_{\triangle CEM}$，即可求得答案.

【详解】（1）解：连接 DE，如图一，



(图一)

$\because$ 点 O 是 $\triangle ABC$ 的重心，

$\therefore AD$，BE 是 BC，AC 边上的中线，

$\therefore D$，E 为 BC，AC 边上的中点，

$\therefore DE$ 为 $\triangle ABC$ 的中位线，

$\therefore DE \parallel AB$，$DE=\dfrac{1}{2}AB$，

$\therefore \triangle ODE \backsim \triangle OAB$，

$\therefore \dfrac{OD}{OA}=\dfrac{DE}{AB}=\dfrac{1}{2}$，

$\because AB=2$，$BD=1$，$\angle ADB=90^\circ$，

$\therefore AD=\sqrt{3}$，$OD=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore S_{\triangle OBC}=\dfrac{BC\cdot OD}{2}=\dfrac{2\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{BC\cdot AD}{2}=\dfrac{2\times\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$；

故答案为：$\sqrt{3}$；

（2）由（1）同理可得，$\dfrac{OD}{OA}=\dfrac{1}{2}$，是定值；

（3）$\because$ 矩形 $ABCD$，点 E 是 CD 的中点，

$\therefore \triangle ABM \backsim \triangle CEM$，

$\therefore \dfrac{CE}{AB}=\dfrac{EM}{BM}=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore S_{\triangle ABM}=2S_{\triangle BCM}=4S_{\triangle CEM}$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=6S_{\triangle ABM}$，

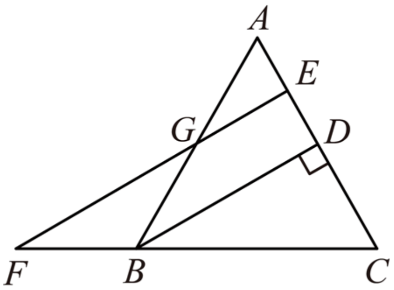
$\therefore S_{\square ABCD}=12S_{\triangle ABM}$，

$\therefore$ 定值为 12.

【点睛】本题是一道相似形综合题目，主要考查的是三角形重心的性质、全等三角形的判定与性质、勾股定理及相似三角形的判定与性质，解答此题的关键是明确题意，找出所求问题需要的条件，利用数形结合的思想解答.

【经典例题四 相似三角形的判定与性质综合】

1．（2023春·海南海口·九年级校考期中）如图，$\triangle ABC$是等边三角形，$AB=4$，BD是AC边上的高，E是线段AD上一点，过E作BD的平行线交AB于G，交CB的延长线于F，当$FG=2GE$时，AE的长度为（　）



A．$\sqrt{2}$　　　B．$\sqrt{3}$　　　C．1　　　D．2

【答案】C

【分析】证得$\triangle AEG\backsim\triangle CEF$，得到$\frac{AE}{CE}=\frac{EG}{EF}$，即$\frac{AE}{4-AE}=\frac{1}{3}$，求解即可．

【详解】解：$\because BD$是AC边上的高，

$\therefore BD\perp AC$，

$\because EF\parallel BD$，

$\therefore FE\perp AC$，

$\therefore \angle AEG=\angle CEF=90^\circ$，

$\because \triangle ABC$是等边三角形，

$\therefore \angle A=\angle C=60^\circ$，

$\therefore \triangle AEG\backsim\triangle CEF$，

$\therefore \frac{AE}{CE}=\frac{EG}{EF}$，

$\because AC=4$，$FG=2GE$，

$\therefore \frac{AE}{4-AE}=\frac{1}{3}$，

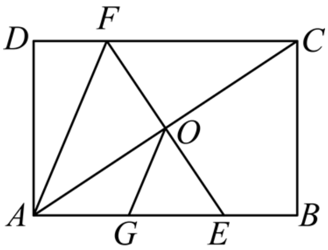
$\therefore AE=1$．

故选：C．

【点睛】本题考查了等边三角形的性质，三角形相似的判定和性质，证得$\triangle AEG\backsim\triangle CEF$是解题的关键．

2．（2023秋·安徽宿州·九年级校联考阶段练习）如图，在矩形中，O是AC的中点，EF过点O且$EF\perp AC$

分别交DC于F，交AB于E，点G是AE的中点且$\angle AOG=30°$，则下列结论：①$\triangle OGE$是等边三角形；②$OG=\frac{1}{2}BC$；③$DF=OF$；④$S_{\triangle AOE}=\frac{1}{6}S_{矩形ABCD}$．其中正确的结论有（　）



A．4个　　B．3个　　C．2个　　D．1个

【答案】B

【分析】根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半可得$OG=AG=GE=\frac{1}{2}AE$，再根据等边对等角可得$\angle OAG=30°$，根据直角三角形两锐角互余求出$\angle GOE=60°$，从而判断出$\triangle OGE$是等边三角形，判断出①正确；设$AE=2a$，则$OE=a$，$AO=\sqrt{3}a$，易知$AC=2\sqrt{3}a$，结合$\angle B=\angle AOE=90°$和$\angle BAC=\angle OAE$，得$\triangle BAC\backsim\triangle OAE$，则$\frac{2\sqrt{3}a}{2a}=\frac{AB}{AO}=\frac{BC}{OE}$，因为$OG=OE$，即可$OG=\frac{\sqrt{3}}{3}BC$，即可判断②；因为$O$是$AC$的中点，$EF\perp AC$，所以$EF$是$AC$的垂直平分线，则$\angle FAC=\angle DCA=30°$，即可通过角平分线的性质证明$DF=OF$，即可判断③；由②知$OG=\frac{\sqrt{3}}{3}BC$，$AO=\frac{\sqrt{3}}{3}AB$，$OE=\frac{\sqrt{3}}{3}BC$，

$S_{\triangle AOE}=\frac{1}{2}\times AO\times OE=\frac{1}{6}AB\times BC=S_{矩形ABCD}$，即可判断④.

【详解】解：$\because EF\perp AC$，点G是AE的中点

$\therefore OG=AG=GE=\frac{1}{2}AE$，

$\because \angle AOG=30°$，

$\therefore \angle OAG=30°$，

则$\angle GOE=60°$，

$\because OG=GE$，

$\therefore \triangle OGE$是等边三角形，

故①是正确；

设$AE=2a$，

$\because$由①知$\angle OAG=30°$，$\angle AOE=90°$

$\therefore OE=a$，

则 $AO=\sqrt{AE^2-OE^2}=\sqrt{3}a$，

$\because O$ 是 AC 的中点，

$\therefore AC=2\sqrt{3}a$

$\because$四边形 $ABCD$ 是矩形，且 $EF\perp AC$

$\therefore \angle B=\angle AOE=90^\circ$，

$\because \angle BAC=\angle OAE$

$\therefore \triangle BAC\backsim\triangle OAE$

$\therefore \dfrac{AC}{AE}=\dfrac{AB}{AO}=\dfrac{BC}{OE}$，

则 $\dfrac{2\sqrt{3}a}{2a}=\dfrac{AB}{AO}=\dfrac{BC}{OE}$，

所以 $OE=\dfrac{\sqrt{3}}{3}BC$，

$\because$由①知 $OG=OE$，

$\therefore \dfrac{2\sqrt{3}a}{2a}=\dfrac{AB}{AO}=\dfrac{BC}{OG}$，

$\therefore OG=\dfrac{\sqrt{3}}{3}BC$， $AO=\dfrac{\sqrt{3}}{3}AB$

故②是错误的；

$\because$四边形 $ABCD$ 是矩形

$\therefore DC\parallel AB$，

$\because$由①知 $\angle BAC=30^\circ$，

$\therefore \angle DCA=\angle BAC=30^\circ$

$\because O$ 是 AC 的中点， $EF\perp AC$，

$\therefore EF$ 是 AC 的垂直平分线，

$\therefore AF=CF$，

$\therefore \angle FAC=\angle DCA=30^\circ$，

那么 $\angle DAF=90^\circ-\angle FAC-\angle BAC=30^\circ$，

$\therefore AF$ 是 $\angle DAO$ 的角平分线，

$\because \angle D=\angle FOA=90^\circ$，

$\therefore DF=OF$

故③是正确的；

由②知$OG=\frac{\sqrt{3}}{3}BC$，$AO=\frac{\sqrt{3}}{3}AB$，$OE=\frac{\sqrt{3}}{3}BC$

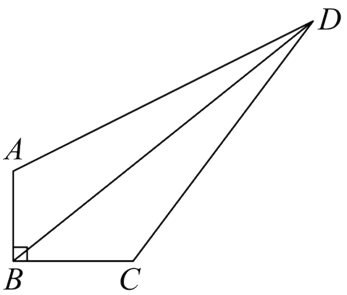
$\therefore S_{\triangle AOE}=\frac{1}{2}\times AO\times OE=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}AB\times\frac{\sqrt{3}}{3}BC=\frac{1}{6}AB\times BC=S_{矩形ABCD}$

故④是正确的.

故选：B.

【点睛】本题考查了矩形的性质，相似三角形的判定与性质，直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半的性质，等边三角形的判定与性质，等腰三角形的判定与性质，三角形的面积，能够设出AE、OG，然后用a表示出相关的边是解题的关键.

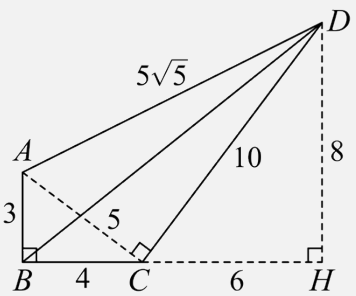
3.（2023秋·江苏扬州·九年级校考阶段练习）如图，在四边形$ABCD$中，$\angle ABC=90^\circ$，$AB=3$，$BC=4$，$CD=10$，$DA=5\sqrt{5}$，则BD的长为______.



【答案】$2\sqrt{41}$

【分析】连接AC，过点D作BC边上的高，交BC延长线于点H. 先证明$\triangle ACD$为直角三角形，再证明$\triangle ABC\backsim\triangle CHD$，求出$CH=6$，$DH=8$，即可得解.

【详解】连接AC，过点D作BC边上的高，交BC延长线于点H.



在Rt△ABC中，$AB=3$，$BC=4$，

$\therefore AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=5$，$\angle ABC=90^\circ$，

又$\because CD=10$，$DA=5\sqrt{5}$，

$\therefore AD^2=CD^2+AC^2$，

$\therefore \triangle ACD$ 为直角三角形，且 $\angle ACD=90°$，

$\therefore \angle ACB+\angle DCH=90°$，

$\because$在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=90°$，，

$\therefore \angle ACB+\angle BAC=90°$，

$\therefore \angle DCH=\angle BAC$，

$\because BH\perp DH$，

$\therefore \angle H=90°$，

$\therefore \angle ABC=\angle H=90°$，

$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle CHD$，

$\therefore \dfrac{CH}{AB}=\dfrac{HD}{BC}=\dfrac{CD}{AC}$，

$\because CD=10$，$AB=3$，$BC=4$，$AC=5$，

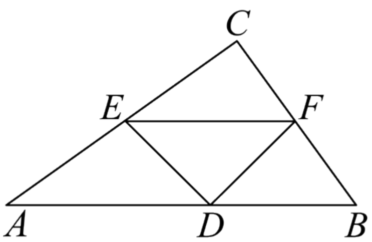
$\therefore CH=6$，$DH=8$，

$\therefore BD=\sqrt{(4+6)^2+8^2}=2\sqrt{41}$．

故答案为：$2\sqrt{41}$．

【点睛】本题考查了相似三角形判定及性质，勾股定理等知识，构造合理的辅助线，证明 $\triangle ABC\backsim\triangle CHD$ 是解答本题的关键．

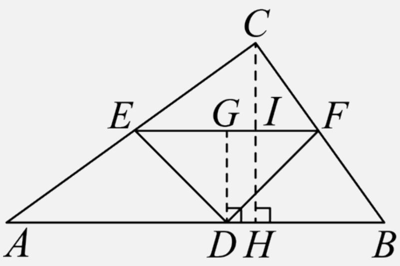
4．（2022 秋·陕西西安·九年级统考期中）如图，$\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=4$，$BC=3$，顺次连接在边 AB、AC、BC 上的三点 D、E、F 形成以点 D 为直角顶点的等腰直角三角形，且 $EF\parallel AB$，则 EF 的长为______．



【答案】$\dfrac{120}{49}$

【分析】作 $CH\perp AB$ 于点 H，交 EF 于点 I，作 $DG\perp EF$ 于点 G，先证明 $IH=DG=\dfrac{1}{2}EF$，再由 $\angle ACB=90°$，$AC=4$，$BC=3$，根据勾股定理求得 $AB=5$，由 $\dfrac{1}{2}\times 5CH=\dfrac{1}{2}\times 4\times 3$ 求得 $CH=\dfrac{12}{5}$，则 $CI=\dfrac{12}{5}-\dfrac{1}{2}EF$，再由 $\triangle CEF\backsim\triangle CAB$ 根据相似三角形对应高的比等于相似比列方程求出 EF 的长即可．

【详解】解：如图，作 $CH \perp AB$ 于点 H，交 EF 于点 I，作 $DG \perp EF$ 于点 G，



$\because EF \parallel BC$，

$\therefore \angle CIE = \angle IHD = 90^\circ$， $\angle HDG = \angle DGE = \angle DGF = 90^\circ$，

$\therefore CI \perp EF$， 四边形 $DHIG$ 是矩形，

$\because DE = DF$，

$\therefore EG = FG$，

$\therefore IH = DG = \frac{1}{2}EF$，

$\because \angle ACB = 90^\circ$， $AC = 4$， $BC = 3$，

$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$，

$\because \frac{1}{2}AB \cdot CH = \frac{1}{2}AC \cdot BC = S_{\triangle ABC}$，

$\therefore \frac{1}{2} \times 5CH = \frac{1}{2} \times 4 \times 3$，

$\therefore CH = \frac{12}{5}$，

$\therefore CI = CH - IH = \frac{12}{5} - \frac{1}{2}EF$，

$\because EF \parallel BC$

$\therefore \triangle CEF \backsim \triangle CAB$，

$\therefore \frac{CI}{CH} = \frac{EF}{AB}$，

$\therefore \frac{\frac{12}{5} - \frac{1}{2}EF}{\frac{12}{5}} = \frac{EF}{5}$，

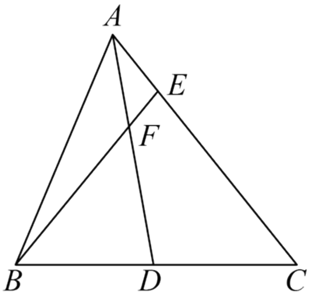
$\therefore EF = \frac{120}{49}$，

故答案为： $\frac{120}{49}$.

【点睛】此题重点考查相似三角形的判定与性质、勾股定理、根据面积等式求线段长度等知识与方法，正

确地作出所需要的辅助线是解题的关键.

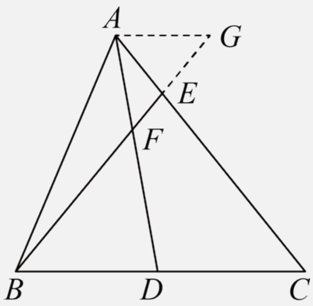
5.（2023 秋·安徽合肥·九年级校考期中）如图，已知$\triangle ABC$中，D是BC的中点，E是AC上一点，$\frac{AE}{EC}=\frac{1}{3}$，连接$AD$与$BE$相交于点$F$，求$\frac{AF}{FD}$的值.



【答案】$\frac{AF}{DF}=\frac{2}{3}$

【分析】过点A作BC的平行线，交BE的延长线与点G，即$AG \parallel BC$，则$\triangle AEG \backsim \triangle CEB$，$\frac{AG}{CB}=\frac{AE}{EC}=\frac{1}{3}$，从而得到$CB=3AG$，再利用中点的定义可知$DB=\frac{1}{2}CB=\frac{3}{2}AG$，再根据$AG \parallel BC$可知$\triangle AFG \backsim \triangle DFB$，从而得到$\frac{AF}{FD}=\frac{AG}{DB}=\frac{AG}{\frac{3}{2}AG}=\frac{2}{3}$.

【详解】解：过点A作BC的平行线，交BE的延长线与点G，即$AG \parallel BC$，



$\because AG \parallel BC$，

$\therefore \triangle AEG \backsim \triangle CEB$，

$\therefore \frac{AG}{CB}=\frac{AE}{EC}=\frac{1}{3}$，

$\therefore CB=3AG$，

又$\because D$是BC的中点，

$\therefore DB=\frac{1}{2}CB=\frac{3}{2}AG$.

又$\because AG \parallel BC$，

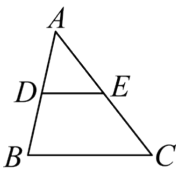
$\therefore \triangle AFG \backsim \triangle DFB$，

$\therefore \frac{AF}{FD}=\frac{AG}{DB}=\frac{AG}{\frac{3}{2}AG}=\frac{2}{3}$.

【点睛】本题考查相似三角形的判定与性质，正确添加辅助线并于平行证明三角形相似是解题的关键.

【经典例题五 利用相似三角形的性质求解】

1.（2022春·贵州安顺·八年级统考期末）如图，在$\triangle ABC$中，D、E分别是边AB、AC的中点，若$S_{\triangle ADE}=2$，则$S_{四边形BCED}=$（　）



A．1　　　　B．2　　　　C．4　　　　D．6

【答案】D

【分析】根据中位线定理得出DE：$BC=1$：2，根据面积比等于相似比的平方得出$\triangle ABC$的面积即可得出四边形$BCED$的面积.

【详解】解：∵点D、E分别是线段AB、AC的中点，

$\therefore DE$是$\triangle ABC$的中位线，

$\therefore DE \parallel BC$，$DE$：$BC=1$：2，

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$，

$\because S_{\triangle ADE}=2$，

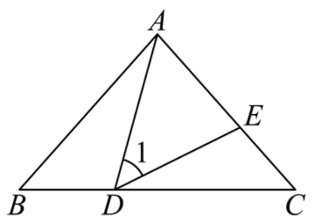
$\therefore S_{\triangle ABC}=2\div\frac{1}{4}=8$，

$\therefore$四边形$BCED$的面积是$8-2=6$，

故选：D.

【点睛】本题主要考查中位线定理和相似三角形的性质，根据面积比等于相似比的平方得出三角形ABC的面积是解题的关键.

2.（2023·湖北恩施·统考一模）如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC=6$，$BC=8$，点D是BC边上的一个动点，点E在AC上，点D在运动过程中始终保持$\angle 1=\angle B$，当$EA=ED$时，则BD的长为（　　）



A．2　　B．$\frac{7}{3}$　　C．3　　D．$\frac{7}{2}$

【答案】D

【分析】先利用等腰三角形的性质可得$\angle EAD=\angle 1$，再利用等量代换可得$\angle EAD=\angle B$，然后利用两角相等的两个三角形的相似证明$\triangle CAD\backsim\triangle CBA$，从而利用相似三角形的性质可求出$CD$的长，进而求出$BD$的长．

【详解】解：$\because EA=ED$，

$\therefore \angle EAD=\angle 1$，

$\because \angle 1=\angle B$，

$\therefore \angle EAD=\angle B$，

$\because \angle C=\angle C$，

$\therefore \triangle CAD\backsim\triangle CBA$，

$\therefore \frac{CA}{CB}=\frac{CD}{CA}$，

$\therefore \frac{6}{8}=\frac{CD}{6}$，

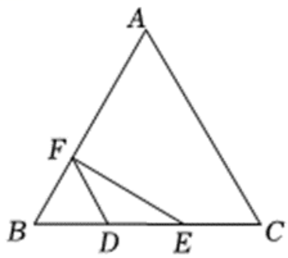
$\therefore CD=\frac{9}{2}$，

$\therefore BD=BC-CD=\frac{7}{2}$，

故选：D．

【点睛】本题考查了相似三角形的判定与性质，等腰三角形的性质，熟练掌握相似三角形的判定与性质是解题的关键．

3．(2023秋·全国·九年级专题练习）在等边三角形ABC中，$AB=6$，D、E是BC上的动点，F是AB上的动点，且$BF=BD=EC=2$，连接FE，$\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}}=$_____；



【答案】$\frac{1}{9}$

【分析】证明$\triangle BDF \backsim \triangle BCA$，利用相似三角形的面积等于相似比的平方求解即可．

【详解】解： $\because \triangle ABC$是等边三角形， $AB=6$，

$\therefore AB=BC=AC=6$， $\angle B=\angle C=\angle A=60°$，

$\because BD=BF=2$， $\angle B=60°$，

$\therefore \triangle BDE$是等边三角形， $\angle BDF=\angle BFD=60°$，

\ ĐBDF = ĐC = 60° ，

$\therefore DF \parallel AC$，

$\therefore \triangle BDF \backsim \triangle BCA$，

\ $\frac{S_{\triangle BDF}}{S_{\triangle BCA}}=(\frac{BD}{BC})^2=\frac{1}{9}$，

$\because BD=EC=2$， $DE=BC-BD-EC=6-2-2=2$，

$\therefore BD=DE=2$，

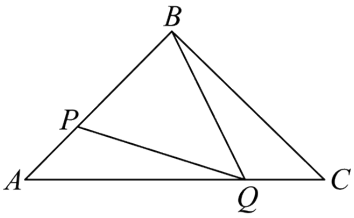
$\therefore S_{\triangle BDF}=S_{\triangle DEF}$，

\ $\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{9}$，

故答案为： $\frac{1}{9}$．

【点睛】本题考查了等边三角形的性质，相似三角形的性质与判定，掌握等边三角形的性质是解题的关键．

4．(2023秋·陕西西安·八年级陕西师大附中校考阶段练习)如图，在$\triangle ABC$中， $BA=BC=10$cm， $AC=15$cm，点P从点A出发，沿AB方向以4cm/s的速度向点B运动；同时点Q从点C出发，沿CA方向以3cm/s的速度向点A运动，当其中一点到达终点时，另一点也随之停止运动．设运动时间为$x(x>0)$s．当$\triangle APQ$与$\triangle CQB$相似时， x的值为________．



【答案】$\frac{5}{9}$或$\frac{5}{2}$

【分析】分类讨论：①$\triangle APQ \backsim \triangle CQB$，②当$\triangle APQ \backsim \triangle CBQ$，利用相似的性质，对应边对应成比例，列式计算即可．

【详解】解：由题意得，$AP = 4x, CQ = 3x,$则$AQ = 15 - 3x$，

$\because BA = BC = 10\text{cm}$，

$\therefore \angle A = \angle C$，

①当$\triangle APQ \backsim \triangle CQB$时，有$\frac{AP}{CQ} = \frac{AQ}{BC}$，

即：$\frac{4x}{3x} = \frac{15-3x}{10}$，

解得：$x = \frac{5}{9}$；

②当$\triangle APQ \backsim \triangle CBQ$时，有$\frac{AP}{BC} = \frac{AQ}{CQ}$，

即：$\frac{4x}{10} = \frac{15-3x}{3x}$，

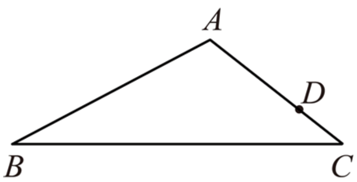
解得：$x = \frac{5}{2}$或$x = -5$（舍去），

综上所述，当x的值为$\frac{5}{9}$或$\frac{5}{2}$时，$\triangle APQ$与$\triangle CQB$相似．

故答案为：$\frac{5}{9}$或$\frac{5}{2}$．

【点睛】本题考查了平行线分线段成比例，以及相似三角形的判定和性质．熟练掌握相关知识点是解题的关键．

5．（2022秋·陕西西安·九年级校考阶段练习）如图，在$\triangle ABC$中，$AB = 4\text{ cm}$，$AC = 3\text{ cm}$，$BC = 6\text{ cm}$，D是AC上一点，$AD = 2\text{ cm}$，点P从C出发沿$C \to B \to A$方向，以1cm/s的速度运动至点A处，线段DP将$\triangle ABC$分成两部分，其中一部分与$\triangle ABC$相似，设运动时间为t．



(1)当 P 在线段 BC 上运动时，$BP=$_，当 P 在线段 AB 上运动时，$BP=$_.（请用含 t 的代数式表示）

(2)求出满足条件的所有 t 值.

【答案】(1) $(6-t)\text{cm}$，$(t-6)\text{cm}$

(2) t 的值为 2，$\frac{1}{2}$，$\frac{22}{3}$ 或 $\frac{17}{2}$

【分析】（1）根据路程=速度×时间，分两种情形分别求解即可；

（2）点 P 在线段 BC 上时，有两种情形：$\triangle DPC\backsim\triangle ABC$、$\triangle DPC\backsim\triangle BAC$；点 P 在 AB 上时，有两种情形：$\triangle ADP\backsim\triangle ACB$、$\triangle ADP\backsim\triangle ABC$，利用相似三角形的性质分别求解即可.

【详解】（1）解：$\because BC=6\text{cm}$，

$\therefore$ 当 P 在线段 BC 上运动时，$BP=BC-PC=6-t(\text{cm})$，

当 P 在线段 AB 上运动时，点 P 运动路程为 $BC+BP=t$，

$\therefore BP=BC+BP-BC=t-6(\text{cm})$，

故答案为：$(6-t)\text{cm}$，$(t-6)\text{cm}$；

（2）解：①当 t 在 BC 上时，

若 $\triangle DPC\backsim\triangle ABC$，则 $\frac{PC}{BC}=\frac{CD}{AC}$，

即 $\frac{t}{6}=\frac{1}{3}$，即 $t=2$，

若 $\triangle DPC\backsim\triangle BAC$，则 $\frac{PC}{AC}=\frac{DC}{BC}$，

即 $\frac{t}{3}=\frac{1}{6}$，即 $t=\frac{1}{2}$，

②当 t 在 AB 上时，

若 $\triangle ADP\backsim\triangle ACB$，则 $\frac{AD}{AC}=\frac{AP}{AB}$，

即 $\frac{2}{3}=\frac{10-t}{4}$，即 $t=\frac{22}{3}$，

若 $\triangle ADP\backsim\triangle ABC$，则 $\frac{AD}{AB}=\frac{AP}{AC}$

即 $\frac{2}{4}=\frac{10-t}{3}$，即 $t=\frac{17}{2}$，

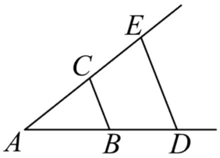
综上所述，t 的值为 2，$\frac{1}{2}$，$\frac{22}{3}$ 或 $\frac{17}{2}$.

【点睛】本题考查相似三角形的性质，解题的关键是学会用分类讨论的思想思考问题，属于中考常考题

型．

【经典例题六 证明三角形的对应线段成比例】

1．(2023春·浙江嘉兴·九年级校考开学考试)《笛卡尔几何学》一书中引入单位线段1来表示线段的乘除．如图，已知$\triangle ABC \backsim \triangle ADE$，则$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$，若规定$AB$为单位线段1，则$AE=AD\cdot AC$，若规定$AC$为单位线段1，则$CE$为（　）



A．$\frac{AB}{BD}$　　B．$\frac{AB}{AD}$　　C．$\frac{BD}{AB}$　　D．$\frac{AD}{AB}$

【答案】C

【分析】由$\triangle ABC \backsim \triangle ADE$，可得$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$，根据比例的性质可得$\frac{BD}{AB}=\frac{CE}{AC}$，即$CE=\frac{BD}{AB}\cdot AC$，由于规定$AC$为单位线段1，则$CE=\frac{BD}{AB}$，即可解答．

【详解】解：$\because \triangle ABC \backsim \triangle ADE$，

$\therefore \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$，

$\therefore \frac{AD-AB}{AB}=\frac{AE-AC}{AC}$，

即$\frac{BD}{AB}=\frac{CE}{AC}$，

$\therefore CE=\frac{BD}{AB}\cdot AC$，

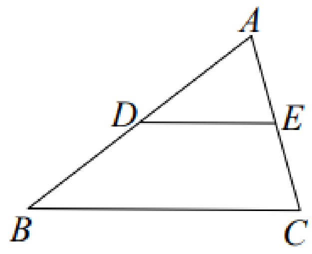
$\because$规定AC为单位线段1，

$\therefore CE=\frac{BD}{AB}$．

故选：C．

【点睛】本题考查相似三角形的性质，比例的性质，读懂题意，正确使用比例的性质是解题的关键．

2．（2022秋·广东广州·九年级广州市增城区凤凰城中英文学校校考期末）如图，在ΔABC中，点D,E分别是AB,AC的中点，则下列结论不正确的是（　）



A．$BC = 2DE$　　B．$\Delta ADE \sim \Delta ABC$

C．$\frac{AD}{AE}=\frac{AB}{BC}$　　D．$S_{\Delta ABC}=4S_{\Delta ADE}$

【答案】C

【分析】根据三角形中位线的性质求解．

【详解】解：由题意 DE 是△ABC 的中位线，

∴由中位线的性质可得：BC=2DE，BC∥DE，

∴A 正确，且∠ADE=∠B，∠AED=∠C，

∴△ADE~△ABC，且相似比=DE:BC=1:2，

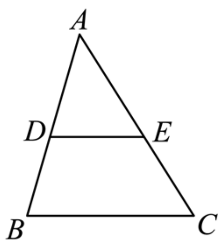
∴B 正确，$S_{\Delta ABC}=4S_{\Delta ADE}$，且 AD:AE=AB:AC，

∴D 正确，C 错误，

故选 C ．

【点睛】本题考查三角形中位线和三角形相似的综合应用，熟练掌握三角形中位线的性质及三角形相似的判定与性质是解题关键．

3．（2021 秋·全国·九年级专题练习）如图，在ΔABC中，若$DE\parallel BC$，$\frac{AD}{AB}=\frac{1}{2}$，$DE=4cm$，则$BC$的长为_ cm．



【答案】8

【分析】根据平行线证出三角形相似，得出对应边成比例，即可得出结果．

【详解】解：∵DE∥BC，

∴△ADE∽△ABC，

$\therefore \dfrac{DE}{BC}=\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{1}{2}$

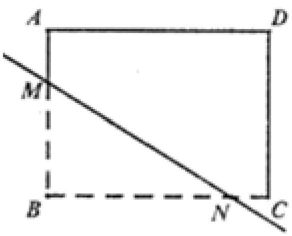
即 $\dfrac{4}{BC}=\dfrac{1}{2}$

∴BC=8（cm）

故答案是：8

【点睛】本题考查了相似三角形的判定与性质；根据平行线证出三角形相似是关键.

4.（2022 春·九年级课时练习）如图，已知矩形 ABCD 中，AB=6，AD=8 将矩形 ABCD 沿直线 MN 翻折后，点 B 恰好落在边 AD 上的点 E 处，如果 AE=2AM，那么 CN 的长为_____.



【答案】$8-3\sqrt{5}$

【分析】如图，过 N 作 NF⊥AD 于 F，可得 NF=AB，根据矩形的性质和折叠的性质可得∠MEN=∠B=90°，EN=BN，根据直角三角形两锐角互余的性质及平角的定义可得∠AME=∠NEF，进而可证明△AEM∽△FNE，根据 AE=2AM 可求出 EF 的长，在 Rt△FNE 中，利用勾股定理可求出 EN 的长，进而可求出 CN 的长.

【详解】如图，过 N 作 NF⊥AD 于 F，

∵四边形 ABCD 是矩形，AB=6，

∴NF=AB=6，

∵矩形 ABCD 沿直线 MN 翻折后，点 B 恰好落在边 AD 上的点 E 处，

∴EN=BN，∠MEN=∠B=90°，

∴∠AEM+∠NEF=90°，

∵∠AEM+∠AME=90°，

∴∠AME=∠NEF，

又∵∠A=∠EFN=90°，

∴△AEM∽△FNE，

$\therefore \dfrac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AE}}=\dfrac{\mathrm{EF}}{\mathrm{NF}}$，

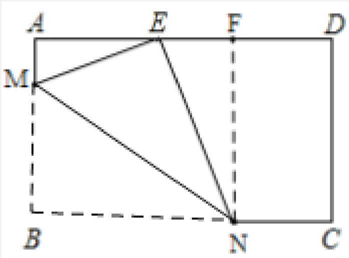
∵AE=2AM，NF=6，

∴EF=3，

∴BN=EN=$\sqrt{NF^2+EF^2}=\sqrt{6^2+3^2}=3\sqrt{5}$，

∵BC=8，

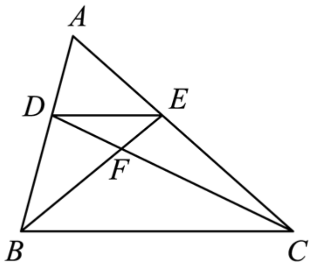
∴CN=BC-BN=8-$3\sqrt{5}$，



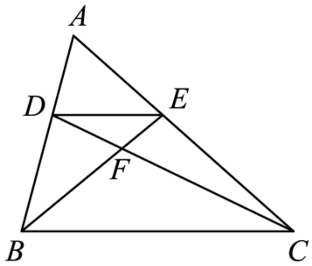
故答案为：8-$3\sqrt{5}$

【点睛】本题考查矩形的性质、增大的性质及相似三角形的判定与性质，如果一个三角形的两个角与另一个三角形的两个角对应相等，那么这两个三角形相似；熟练掌握相似三角形的判定定理是解题关键.

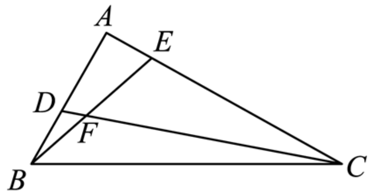
5.（2023·吉林四平·校联考三模）在$\triangle ABC$中，D，E分别为AB，AC上一点，BE，CD交于点F.



图①



图②



图①

(1)设$\triangle ABE$的面积为S_1，$\triangle ACD$的面积为S_2，且$S_1=S_2$.

①如图①，连接DE．若$\angle A=90°$，求证：$DE\parallel BC$；

②如图②，若$\angle FBC=45°$，$\angle FCB=30°$，求$\dfrac{EF}{DF}$的值.

(2)如图③，若$\angle A=90°$，$CE=kAB$，$BD=kAE$，$DC=2BE$，直接写出k的值.

【答案】(1)①见解析；②$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(2)$k=\sqrt{3}$

【分析】(1）①由$S_1=S_2$可证$AB\cdot AE=AC\cdot AD$，即可证$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$，可进一步推出结论；②连接$DE$，作$BM\perp AC$于点$M$，作$CN\perp AB$于点$N$，过点$F$作$FH\perp BC$于点$H$．可证$DE\parallel BC$，推出$\dfrac{EF}{DF}=\dfrac{BF}{CF}$，设$FH=BH=x$，则$BF=\sqrt{2}x$，则可分别求出$BF$，$CF$的长，即可求出结论；

（2）过点 B 作 $BP // EC$，且 $BP = EC$，连接 DP，CP，构造平行四边形 $BPCE$，证 $\triangle BPD \backsim \triangle ABE$，推出 $\frac{EB}{DP} = \frac{AE}{BD} = \frac{1}{k}$，证明 $\frac{EB}{DP} = \frac{CP}{DP} = \frac{1}{k}$ 再证明 $\triangle DPC$ 为直角三角形，且可求出其三边的比，即可求出 k 的值.

【详解】（1）解：①$\because \angle A = 90^\circ$，

$\therefore S_1 = S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} AB \cdot AE$，$S_2 = S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} AC \cdot AD$.

$\because S_1 = S_2$，

$\therefore AB \cdot AE = AC \cdot AD$，即 $\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$.

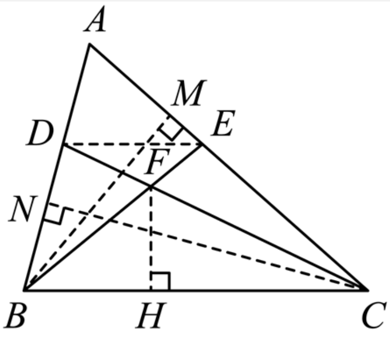
又 $\because \angle A = \angle A$，

$\therefore \triangle ADE \backsim \triangle ABC$

$\therefore \angle AED = \angle ACB$，

$\therefore DE // BC$.

如图②，连接 DE，作 $BM \perp AC$ 于点 M，作 $CN \perp AB$ 于点 N，过点 F 作 $FH \perp BC$ 于点 H.



24题答图①

$\because S_1 = S_2$，

$\therefore \frac{1}{2} AD \cdot CN = \frac{1}{2} AE \cdot BM$，

$\therefore \frac{AE}{AD} = \frac{CN}{BM}$

又 $\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CN = \frac{1}{2} AC \cdot BM$，

$\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{CN}{BM}$，

$\therefore \frac{AE}{AD} = \frac{AC}{AB}$.

又 $\because \angle A = \angle A$，

$\therefore \triangle ADE \backsim \triangle ABC$，

$\therefore DE // BC$，

$\therefore \frac{EF}{BF}=\frac{DF}{CF}$,

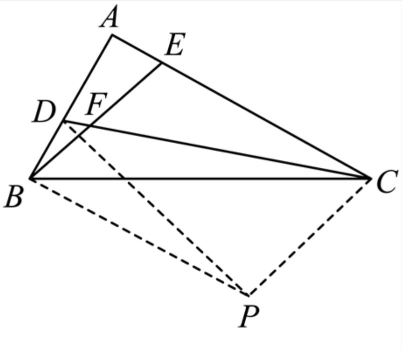
$\therefore \frac{EF}{DF}=\frac{BF}{CF}$

设 $FH=BH=x$，则 $BF=\sqrt{2}x$， $CF=2FH=2x$

$\therefore \frac{EF}{DF}=\frac{BF}{CF}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

（2）

如答图（2），过点 B 作 $BP\parallel EC$，且 $BP=EC$，连接 DP， CP，



24题答图②

则四边形 $BPCE$ 为平行四边形.

$\because CE=kAB$，

$\therefore \frac{BP}{AB}=\frac{CE}{AB}=k$.

$\because BD=kAE$，

$\therefore \frac{BD}{AE}=k$，

$\therefore \frac{BP}{AB}=\frac{BD}{AE}$.

又$\because \angle DBP=\angle A=90^\circ$，

$\therefore \triangle BPD\backsim\triangle ABE$

$\therefore \frac{EB}{DP}=\frac{AE}{BD}=\frac{1}{k}$， $\angle ABE=\angle BPD$

$\therefore \angle ABE+\angle PBF=90^\circ$

$\therefore \angle BPD+\angle PBF=90^\circ$，即 $\angle EFP=90^\circ$.

$\because BE\parallel PC$，

$\therefore \angle DPC=180^\circ-\angle EFP=90^\circ$.

$\because \frac{EB}{DC}=\frac{PC}{DC}=\frac{1}{2}$，

$\therefore$设 $PC=a$， $DC=2a$，

则在Rt△DPC中， $PD=\sqrt{DC^2-PC^2}=\sqrt{3}a$.

$\because \frac{EB}{DP}=\frac{CP}{DP}=\frac{1}{k}$，

$\therefore \frac{a}{\sqrt{3}a}=\frac{1}{k}$，

$\therefore k=\sqrt{3}$.

【点睛】本题考查了相似三角形的判定与性质，解题关键是能够通过作出合适的辅助线构造相似三角形，并且能够灵活运用相似三角形的判定与性质.

【经典例题七 利用相似求坐标】

1.（2022·九年级单元测试）平面直角坐标系中有一直线$l_1: y=-2x+5$，先将其向右平移3个单位得到l_2，再将l_2作关于x轴的对称图形l_3，最后将l_3绕l_3与y轴的交点逆时针旋转$90°$得到l_4，则直线l_4的解析式为（　）.

A. $y=-\frac{1}{2}x-11$　B. $y=-\frac{1}{2}x-2$　　C. $y=\frac{1}{2}x+1$　　D. $y=\frac{1}{2}x-8$

【答案】A

【分析】直线l_1:$y=-2x+5$，先将其向右平移3个单位得到l_2:$y=-2(x-3)+5=-2x+11$，取两点（0，11），（1，9），求得其关于x轴的对称点(0，-11)，(1，-9)，待定系数法确定l_3的解析式为y=2x-11，确定与y轴交点（0，-11），根据l_4与l_3垂直，利用相似和待定系数法确定l_4的系数为$-\frac{1}{2}$，从而得到解析式$y=-\frac{1}{2}x-11$.

【详解】根据直线l_1:$y=-2x+5$，先将其向右平移3个单位

得到l_2:$y=-2(x-3)+5=-2x+11$，

取两点（0，11），（1，9），

所以关于x轴的对称点(0，-11)，(1，-9)，

设解析式为$y=kx+b$，

所以$\begin{cases}k+b=-9\\b=-11\end{cases}$，

解得$\begin{cases}k=2\\b=-11\end{cases}$，

所以l_3解析式为$y=2x-11$，

所以与y轴交点A（0，-11），与x轴交点B（$\frac{11}{2}$，0），

设l_4与x轴的交点为C，

所以$OA=11$，$OB=\frac{11}{2}$，

因为l_3绕l_3与y轴的交点逆时针旋转$90°$得到l_4，

所以$\angle OAC+\angle OAB=90°$，

因为$\angle OBA+\angle OAB=90°$，

所以$\angle OBA=\angle OAC$，

因为$\angle BOA=\angle AOC=90°$，

所以$\triangle BOA\backsim\triangle AOC$，

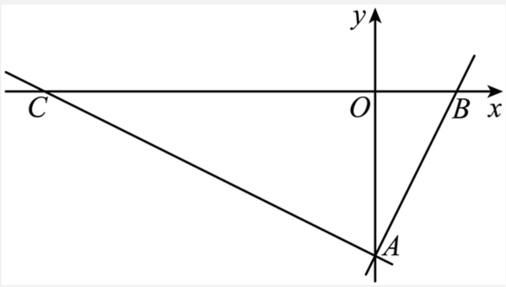
所以$\frac{OB}{OA}=\frac{OA}{OC}$，

所以$\frac{\frac{11}{2}}{11}=\frac{11}{OC}$，

解得$OC=22$，

所以点C（-22，0）

因为l_4过点（0，-11），



所以l_4的解析式为$y=kx-11$，

所以$22k-11=0$,

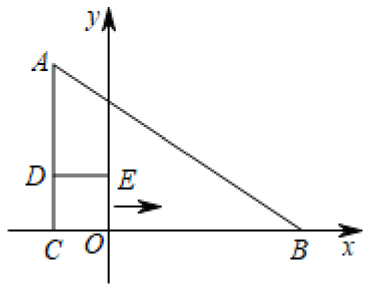
解得$k=-\frac{1}{2}$，

所以l_4解析式$y=-\frac{1}{2}x-11$．

故选A．

【点睛】本题考查了待定系数法，轴对称，平移，旋转，熟练掌握待定系数法，理解旋转的性质和意义是解题的关键．

2．（2022·海南·九年级专题练习）如图，在△*ABC* 中，∠*ACB*＝90°，边 *BC* 在 *x* 轴上，顶点 *A*，*B* 的坐标分别为（－2，6）和（7，0）．将正方形 *OCDE* 沿 *x* 轴向右平移，当点 *E* 落在 *AB* 边上时，平移的距离为（　）

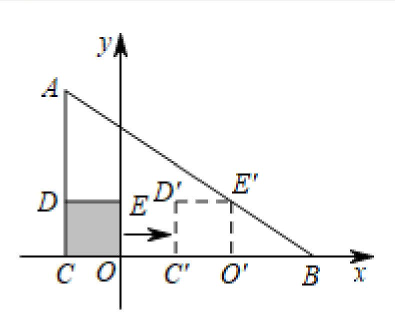


A．2　　　B．3　　　C．4　　　D．5

【答案】C

【分析】根据已知条件得到 $AC=6$，$OC=2$，$OB=7$，求得 $BC=9$，根据正方形的性质得到 $DE=OC=OE=2$，求得 $O'E'=O'C'=2$，根据相似三角形的性质得到 $BO'=3$，于是得到结论．

【详解】解：如图，设正方形 $D'C'O'E'$是正方形 *OCDE* 沿 *x* 轴向右平移后的正方形，



∵顶点 *A*，*B* 的坐标分别为（-2，6）和（7，0），

∴$AC=6$，$OC=2$，$OB=7$，

∴$BC=9$，

∵四边形 *OCDE* 是正方形，

∴$DE=OC=OE=2$，

∴$O'E'=O'C'=2$，

∵$E'O'\perp BC$，

∴$\angle BO'E'=\angle BCA=90°$，

∴$E'O'\parallel AC$，

∴$\triangle BO'E'\backsim\triangle BCA$，

∴$\dfrac{E'O'}{AC}=\dfrac{BO'}{BC}$，

$\therefore \frac{2}{6}=\frac{BO'}{9}$，

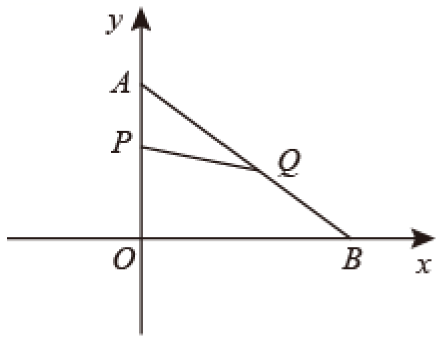
$\therefore BO'=3$，

$\therefore OO'=7-3=4$，

故选：C.

【点睛】本题考查了正方形的性质，坐标与图形性质，相似三角形的判定和性质，正确的识别图形是解题的关键.

3．（2021春·江苏·九年级专题练习）如图，在平面直角坐标系中，点A，B的坐标分别为$(0,6)$、$(8,0)$，连接AB．动点P从点A开始在折线段AOB上以每秒2个单位长度的速度向点O移动，同时动点Q从点B开始在线段BA上以每秒3个单位长度的速度向点A移动．设点P、Q移动的时间为t秒，当$\triangle APQ$与$\triangle AOB$相似时，点P的坐标是___.



【答案】$P\left(0,\frac{36}{11}\right)$或$P\left(0,\frac{28}{13}\right)$

【分析】由题意易得$AP=t, AQ=10-2t$，然后可分情况进行讨论：①当$\angle APQ=\angle AOB$时，有$\triangle APQ \backsim \triangle AOB$；②当$\angle AQP=\angle AOB$时，有$\triangle APQ \backsim \triangle ABO$；进而根据相似三角形的性质可进行求解.

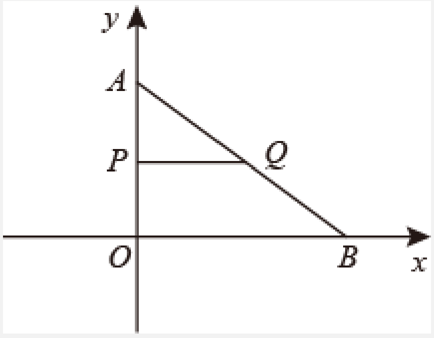
【详解】解：$\because$点A，B的坐标分别为$(0,6)$、$(8,0)$，

$\therefore OA=6, OB=8$，$AB=\sqrt{(0-8)^2+(6-0)^2}=10$，

$\therefore AP=t, AQ=10-2t$，

当$\triangle APQ$与$\triangle AOB$相似时，则可分：

①当$\angle APQ=\angle AOB$时，有$\triangle APQ \backsim \triangle AOB$，如图所示：



$\therefore \frac{AP}{AO}=\frac{AQ}{AB}$，即 $\frac{t}{6}=\frac{10-2t}{10}$，

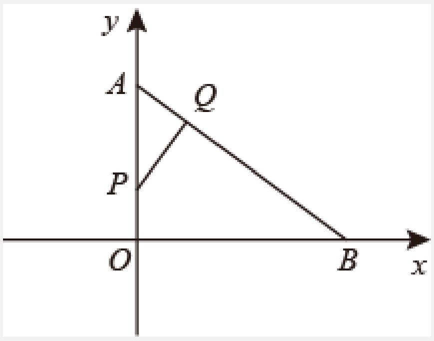
解得：$t=\frac{30}{11}$，

$\therefore AP=\frac{30}{11}$，

$\therefore OP=AO-AP=\frac{36}{11}$，

$\therefore P\left(0,\frac{36}{11}\right)$；

②当 $\angle AQP=\angle AOB$ 时，有 $\triangle APQ\backsim\triangle ABO$，如图所示：



$\therefore \frac{AP}{AB}=\frac{AQ}{AO}$，即 $\frac{t}{10}=\frac{10-2t}{6}$，

解得：$t=\frac{50}{13}$，

$\therefore AP=\frac{50}{13}$，

$\therefore OP=AO-AP=\frac{28}{13}$，

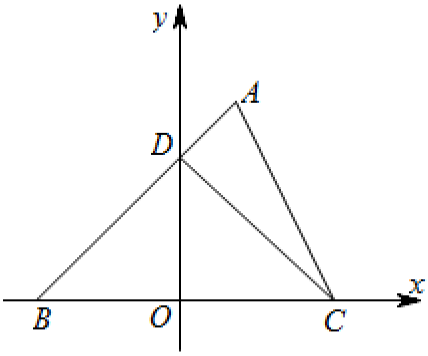
$\therefore P\left(0,\frac{28}{13}\right)$；

综上所述：当 $\triangle APQ$ 与 $\triangle AOB$ 相似时，$P\left(0,\frac{36}{11}\right)$ 或 $P\left(0,\frac{28}{13}\right)$；

故答案为 $P\left(0,\frac{36}{11}\right)$ 或 $P\left(0,\frac{28}{13}\right)$.

【点睛】本题主要考查相似三角形的性质，熟练掌握相似三角形的性质是解题的关键.

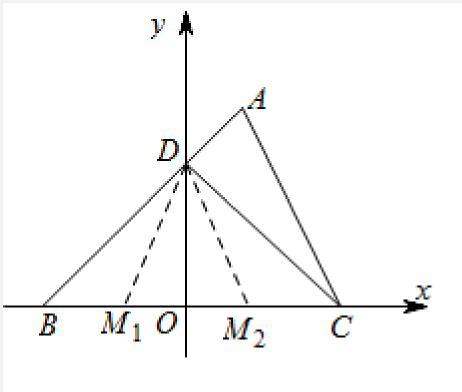
4．（2023秋·全国·九年级专题练习）如图，$\triangle ABC$ 在平面直角坐标系中，AB 与 y 轴交于点 D，已知点 $A(1,4)$，$C(3,0)$，$D(0,3)$，M 是线段 BC 上一点，连接 DM，若 $\triangle ODM$ 与 $\triangle CAD$ 相似，则 CM 的长为_____.



【答案】2 或 4

【分析】$\triangle ODM$ 是一个直角三角形，若 $\triangle ODM$ 与 $\triangle CAD$ 相似，必须证明 $\triangle CAD$ 是直角三角形，再用相似三角形的性质即可求出点 M 的坐标.

【详解】如图，



∵$A(1,4)$，　$C(3,0)$，　$D(0,3)$，

∴ $AD^2=1^2+1^2=2$，　$AC^2=4^2+2^2=20$，$CD^2=OD^2+OC^2=3^2+3^2=18$，

$AC^2=AD^2+CD^2$；

∴$\triangle CAD$ 是直角三角形

∵点 M 在 x 轴上，设点 M 的坐标是（x，0），

$\triangle ODM\backsim\triangle CAD$

∴$\dfrac{AD}{CD}=\dfrac{OM}{OD}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}=\dfrac{|x|}{3}$

∴$|x|=1$

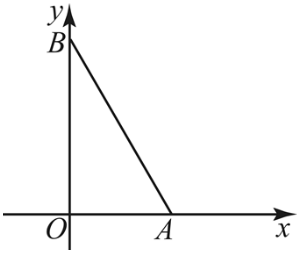
$\therefore |x|=\pm1$

当 $x=1$ 时，$CM=2$；当 $x=-1$ 时 $CM=4$，

故答案为：2 或 4．

【点睛】此题考查相似三角形的性质，熟悉掌握相似三角形的性质是解题的关键．

．（2023·福建厦门·统考模拟预测）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，点A 的坐标为 $(6,0)$，B 是 y 轴上一点．



(1) B 上求作点 M，使得 $\triangle AMO\backsim\triangle AOB$（要求：尺规作图，不写作法，保留作图痕迹）；

(2)在（1）的条件下，$AB=4AM$，OC 是 $\triangle AOB$ 的中线，过点 M 的直线交 OC 于点 D，交 x 轴于点 F，当 $MO=MF$ 时，求点 D 的坐标．

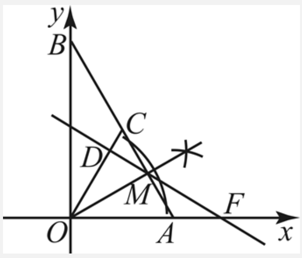
【答案】(1)见解析

(2) $D\left(\frac{9}{4},\frac{9\sqrt{3}}{4}\right)$

【分析】（1）作 $OM\perp AB$ 于点 M 即可；

（2）求出直线 OC，直线 MF 的解析式，构建方程组求解．

【详解】（1）如图，点 M 即为所求；



（2）$\because \triangle AMO\backsim\triangle AOB$，

$\therefore AO：AB=AM：AO$，

$\therefore OA^2=AM\cdot AB$，

$\because A(6,0)$，

$\therefore OA=6$，