重庆市部分学校2025届度高三上学期12月月考数学试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．已知集合 $A=\left\{x\in\mathbf{N}^{*}\mid x^{2}-5x\leq 0\right\},B=\{x\in\mathbf{Z}\mid|x-1|<2\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A．$\{0,1,2,3,4,5\}$　　B．$\{0,1,2\}$　　C．$\{1,2\}$　　D．$\{1,2,3,4,5\}$

2．已知复数 z 满足 $|z|+z=8+4\mathrm{i}$，则 $z=$（　　）

A．$3+4\mathrm{i}$　　B．$3-4\mathrm{i}$　　C．$-3+4\mathrm{i}$　　D．$-3-4i$

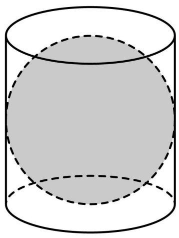
3．已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1，设点 M、N 满足 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AN}=\mu\overrightarrow{AD}$.若 $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CN}=1$，则 $\lambda^{2}+2\mu^{2}$ 的最小值为（　　）

A．2　　B．1　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$\frac{3}{4}$

4．若 $\sin\alpha+\cos(\pi-\alpha)=\frac{3}{4},\alpha\in(0,\pi)$，则 $\sin\left(a+\frac{\pi}{4}\right)$ 的值为（　　）

A．$\frac{7}{8}$　　B．$-\frac{\sqrt{46}}{8}$　　C．$-\frac{7}{8}$　　D．$\frac{\sqrt{46}}{8}$

5．如图所示的是古希腊数学家阿基米德的墓碑上刻着的一个圆柱，圆柱内有一个内切球，这个球的直径恰好与圆柱的高相等.相传这个图形表达了阿基米德最引以为荣的发现.设圆柱的体积与球的体积之比为 m，圆柱的表面积与球的表面积之比为 n，则 $\left(\frac{n}{m}x-\frac{1}{x^{2}}\right)^{6}$ 的展开式中的常数项是（　　）



A．-15　　B．-20　　C．15　　D．20

6．将函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象向右平移 $m(m>0)$ 个单位长度，得到的图象对应的函数 $y=f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}\right]$ 上单调递减，则 m 的最小值为（　　）

A．$\frac{\pi}{4}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{\pi}{2}$　　D．$\frac{3\pi}{4}$

7．在等差数列$\{a_n\}$中，S_n是a_n的前n项和，满足$S_{18}<0$，$S_{19}>0$，则有限项数列

$\frac{S_1}{a_1},\frac{S_2}{a_2},\cdots,\frac{S_{18}}{a_{18}},\frac{S_{19}}{a_{19}}$中，最大项和最小项分别为（　）

A．$\frac{S_9}{a_9},\frac{S_{18}}{a_{18}}$　　B．$\frac{S_9}{a_9},\frac{S_{10}}{a_{10}}$

C．$\frac{S_{19}}{a_{19}},\frac{S_{10}}{a_{10}}$　　D．$\frac{S_{19}}{a_{19}},\frac{S_{18}}{a_{18}}$

8．已知函数$y=f(x)(x\neq 0)$满足$f(xy)=f(x)+f(y)-1$，当$x>1$时，$f(x)<1$，则（　）

A．$f(x)$为奇函数　　B．若$f(2x+1)>1$，则$-1<x<0$

C．若$f(2)=\frac{1}{2}$，则$f(1024)=-4$　　D．若$f\left(\frac{1}{2}\right)=2$，则$f\left(\frac{1}{1024}\right)=10$

二、多选题

9．已知在一次数学测验中，某校1000学生的成绩服从正态分布$N(100,100)$，其中90分为及格线，120分为优秀线，则对于该校学生成绩，下列说法正确的有(参考数据：

①$P(\mu-\sigma<X\le\mu+\sigma)=0.6827$；②$P(\mu-2\sigma<X\le\mu+2\sigma)=0.9545$；

③$P(\mu-3\sigma<X\le\mu+3\sigma)=0.9973$.)（　）

A．标准差为100

B．及格率超过86%

C．得分在$(70,130]$内的人数约为997

D．得分低于80的人数和优秀的人数大致相等

10．已知函数$f(x)=a(x-a)^2(x-b)$（$a\neq 0$）的极大值点为$x=a$，则（　）

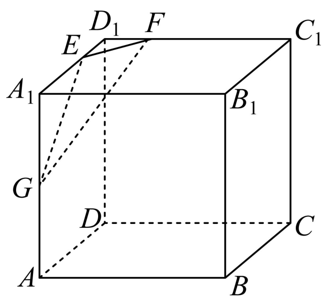
A．$a^2<b^2$

B．$a^2<ab$

C．若$f'(x_1)=f'(x_2)=0$，则$x_1+x_2>0$

D．若$f'(x_1)=f'(x_2)=0$，则$x_1x_2>0$

11．如图，正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为4，点E、F、G分别在棱D_1A_1、D_1C_1、A_1A上，满足$\frac{D_1E}{D_1A_1}=\frac{D_1F}{D_1C_1}=\frac{1}{4}$，$\frac{A_1G}{A_1A}=\lambda(\lambda>0)$，记平面$EFG$与平面$A_1B_1CD$的交线为$l$，则（　）



A．存在 $\lambda \in (0,1)$ 使得平面 EFG 截正方体所得截面图形为四边形

B．当 $\lambda = \frac{3}{4}$ 时，三棱锥 $B-EFG$ 体积为 $\frac{3}{2}$

C．当 $\lambda = \frac{3}{4}$ 时，三棱锥 A_1-EFG 的外接球表面积为 34π

D．当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时，直线 l 与平面 $ABCD$ 所成的角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{33}}{33}$

三、填空题

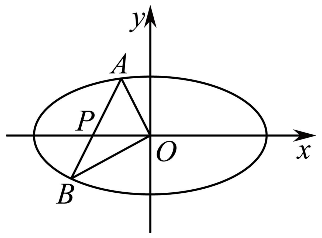
12．若曲线 $y=ax^2$ 与 $y=\ln x$ 有一条斜率为 2 的公切线，则 $a=$___________.

13．在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，且满足 $b\cos C + c\cos B = 2a\cos A$，若 $\triangle ABC$ 的中线 $AD=\sqrt{3}$，且 $b+c=4$，则 $\triangle ABC$ 的面积为_________.

14．已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+2x+3, x\le 0 \\ \ln x, x>0 \end{cases}$，若存在实数 x_1，x_2，x_3 且 $x_1<x_2<x_3$，使得 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=a$，则 $x_3(x_1+x_2+\ln x_3)$ 的最大值为______.

四、解答题

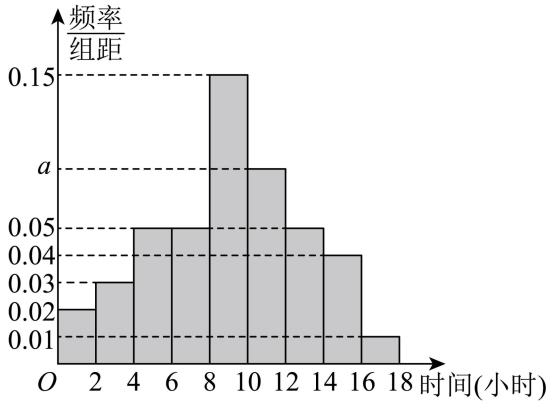
15．古希腊数学家阿基米德利用“逼近法”得到椭圆的面积等于圆周率 π 与椭圆的长半轴长、短半轴长的乘积.已知椭圆 M 的中心为坐标原点，焦点 F_1，F_2 均在 x 轴上，面积为 2π，点 $\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 在椭圆 M 上.



(1)求椭圆 M 的标准方程；

(2)经过点$P(-1,0)$的直线l与曲线M交于A，B两点，$\triangle OAB$与椭圆M的面积比为$\frac{2}{5\pi}$，求直线l的方程.

16．在某地区进行高中学生每周户外运动调查，随机调查了1000名高中学生户外运动的时间（单位：小时），得到如下样本数据的频率分布直方图.



(1)求a的值，估计该地区高中学生每周户外运动的平均时间；（同一组数据用该区间的中点值作代表）

(2)为进一步了解这1000名高中学生户外运动的时间分配，在$(14,16]$，$(16,18]$两组内的学生中，采用分层抽样的方法抽取了5人，现从这5人中随机抽取3人进行访谈，记在$(14,16]$内的人数为X，求X的分布列和期望；

(3)以频率估计概率，从该地区的高中学生中随机抽取8名学生，用“$P_8(k)$”表示这8名学生中恰有k名学生户外运动时间在$(8,10]$内的概率，当$P_8(k)$最大时，求k的值.

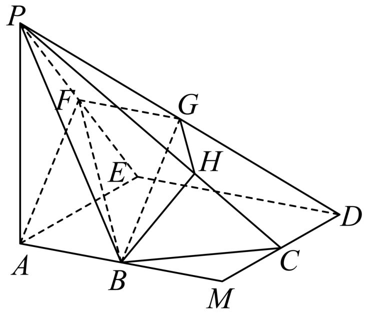
17．记$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$\sin C\sin(A-B)=\sin B\sin(C-A)$.

(1)求A取值的范围；

(2)若$a=2$，求$\triangle ABC$周长的最大值；

(3)若$b=2, A=2B$，求$\triangle ABC$的面积.

18．如图，正方形$AMDE$的边长为2，B，C分别为AM，MD的中点.在五棱锥$P-ABCDE$中，F为棱PE上一点，平面ABF与棱PD，PC分别交于点G，H.



(1)求证：$AB \,//\, FG$；

(2)若$PA \perp$底面$ABCDE$，且$PA = AE$，直线BC与平面ABF所成角为$\frac{\pi}{6}$.

（i）确定点F的位置，并说明理由；

（ii）求线段PH的长.

19．已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n = \frac{1}{3}(1 - a_n)\left(n \in \mathbf{N}^*\right)$．若$2 + b_n = 3\log_{\frac{1}{4}} a_n$，且数列$\{c_n\}$满足$c_n = a_n \cdot b_n$.

(1)求证：数列$\{b_n\}$是等差数列；

(2)求证：数列$\{c_n\}$的前n项和$T_n < \frac{2}{3}$；

(3)若$c_n \le \frac{1}{4}\left(t^2 + t - 1\right)$对一切$n \in \mathbf{N}^*$恒成立，求实数$t$的取值范围.

参考答案：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	A	C	D	C	D	B	C	CD	ABD
题号	11									
答案	BD									

1．C

【分析】解出集合后再求交集即可.

【详解】由$x^2-5x\le 0$，解得$0\le x\le 5$，所以$A=\{1,2,3,4,5\}$，

由$|x-1|<2$，解得$-1<x<3$，所以$B=\{0,1,2\}$，$A\cap B=\{1,2\}$，

故选：C．

2．A

【分析】设$z=x+y\mathrm{i}$，$x,y\in R$，根据复数相等列方程求解可得结果．

【详解】设$z=x+y\mathrm{i}$，$x,y\in R$

由$|z|+z=8+4\mathrm{i}$得$\sqrt{x^2+y^2}+x+y\mathrm{i}=8+4\mathrm{i}$

所以$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}+x=8\\ y=4\end{cases}$，解得$x=3,y=4$

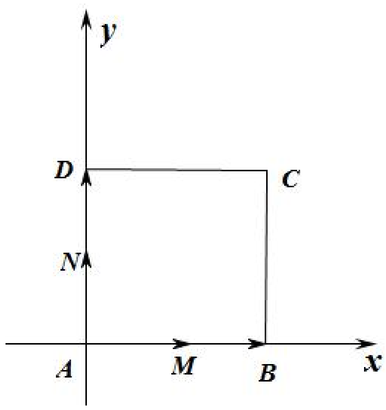
$\therefore z=3+4\mathrm{i}$．

故选：A．

3．C

【解析】建立坐标系，求出A，B，C，D的坐标，求出$\lambda+\mu=1$，可得$\lambda^2+2\mu^2=3\mu^2-2\mu+1$，结合二次函数的性质求出代数式的最小值即可．

【详解】如图所示：以A为原点，建立平面直角坐标系，



因为正方形$ABCD$的边长为1，

可得$A(0,0)$，$B(1,0)$，$C(1,1)$，$D(0,1)$，

$\because \overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AN}=\mu\overrightarrow{AD}$，

$\therefore M(\lambda,0)$，$N(0,\mu)$，$\overrightarrow{CM}=(\lambda-1,-1)$，$\overrightarrow{CN}=(-1,\mu-1)$，

$\therefore \overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CN}=1-\lambda+1-\mu=1$，故$\lambda+\mu=1$，

$\therefore \lambda^2+2\mu^2=(1-\mu)^2+2\mu^2=3\mu^2-2\mu+1$，

故$\mu=\dfrac{1}{3}$时，$3\mu^2-2\mu+1$的最小值是$\dfrac{2}{3}$，

故选：C．

【点睛】平面向量数量积的计算问题，往往有两种形式，一是利用数量积的定义式，二是利用数量积的坐标运算公式，涉及几何图形的问题，先建立适当的平面直角坐标系，可起到化繁为简的妙用．利用向量夹角公式、模公式及向量垂直的充要条件，可将有关角度问题、线段长问题及垂直问题转化为向量的数量积来解决．解答本题的关键是建立直角坐标系，转化为坐标运算求解.

4．D

【分析】由三角函数的诱导公式和基本关系式，求得$2sin\alpha cos\alpha=\dfrac{7}{16}>0$，得到$\sin\alpha+\cos\alpha>0$，结合三角函数的基本关系式，求得$\sin\alpha+\cos\alpha$的值，再利用两角和的正弦公式，即可求解.

【详解】由$sin\alpha+cos(\pi-\alpha)=sin\alpha-cos\alpha=\dfrac{3}{4}$，

所以$(sin\alpha-cos\alpha)^2=1-2sin\alpha cos\alpha=\dfrac{9}{16}$，可得$2sin\alpha cos\alpha=\dfrac{7}{16}>0$，

因为$\alpha\in(0,\pi)$，所以$\sin\alpha>0,\cos\alpha>0$，可得$\sin\alpha+\cos\alpha>0$，

又由$(sin\alpha+cos\alpha)^2=1+2sin\alpha cos\alpha=\dfrac{23}{16}$，可得$sin\alpha+cos\alpha=\dfrac{\sqrt{23}}{4}$，

所以$sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(sin\alpha+cos\alpha)=\dfrac{\sqrt{46}}{8}$.

故选：D.

5．C

【分析】设球的半径为R，分别表达出球，圆柱的体积和表面积，求出$\dfrac{n}{m}=1$，利用二项式定理得到通项公式，求出常数项.

【详解】设球的半径为R，则球的体积为$\dfrac{4}{3}\pi R^3$，圆柱的底面积为πR^2，高为$2R$，

故圆柱的体积为$\pi R^2\cdot 2R=2\pi R^3$，

故$m=\dfrac{2\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\dfrac{3}{2}$，

球的表面积为$4\pi R^2$，圆柱的表面积为$2\pi R^2+2\pi R\cdot 2R=6\pi R^2$，

故$n=\dfrac{6\pi R^2}{4\pi R^2}=\dfrac{3}{2}$，

故$\dfrac{n}{m}=1$，$\left(x-\dfrac{1}{x^2}\right)^6$展开式中的通项公式为$T_{r+1}=C_6^r x^{6-r}\left(-x^{-2}\right)^r=\left(-1\right)^r C_6^r x^{6-3r}$，

令$6-3r=0$，解得$r=2$，故常数项为$T_3=\left(-1\right)^2 C_6^2=15$.

故选：C

6．D

【分析】由三角函数的图象变换求得函数$y=f\left(x\right)$的解析式，再根据正弦型函数的单调性，求得m的取值，进而求得m的最小值.

【详解】由题意，将函数$y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$的图象向右平移$m(m>0)$个单位长度，

得到的图象对应的函数$y=f\left(x\right)=\sin(2x-2m+\dfrac{\pi}{6})$的图象，

因为$f\left(x\right)$在区间$\left[-\dfrac{\pi}{12},\dfrac{5\pi}{12}\right]$上单调递减，

所以$2\times(-\dfrac{\pi}{12})-2m+\dfrac{\pi}{6}\geq 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$且$2\times\dfrac{5\pi}{12}-2m+\dfrac{\pi}{6}\leq 2k\pi+\dfrac{3\pi}{2},k\in z$，

解得$-k\pi-\dfrac{\pi}{4}\leq m\leq -k\pi-\dfrac{\pi}{4},k\in z$，即$m=-k\pi-\dfrac{\pi}{4}$，

令$k=-1$，可得m的最小值为$\dfrac{3\pi}{4}$.

故选：D.

7．B

【分析】确定$a_{10}>0$，$a_9<0$，$d>0$，考虑$1\leqslant n\leqslant 9$，$10\leq n\leq 18$，$n=19$三种情况，确定$\dfrac{S_{19}}{a_{19}}<\dfrac{S_9}{a_9}$，计算得到答案.

【详解】$S_{18}=\dfrac{18\left(a_1+a_{18}\right)}{2}=9\left(a_9+a_{10}\right)<0$，即$a_9+a_{10}<0$，

$S_{19}=\dfrac{19\left(a_1+a_{19}\right)}{2}=19a_{10}>0$，即$a_{10}>0$，故$a_9<0$，$d>0$，

①当$1\leqslant n\leqslant 9$，$n\in N^*$时，$a_n<0$，$S_n<0$，故$\dfrac{S_n}{a_n}>0$，

$\left|S_n\right|_{\max}=\left|S_9\right|$，$\left|a_n\right|_{\min}=\left|a_9\right|$，故$\left\{\dfrac{S_n}{a_n}\right\}_{\max}=\dfrac{S_9}{a_9}$；

②当$10\le n\le 18$，$n\in\mathrm{N}^*$时，$a_n>0$，$S_n<0$，故$\dfrac{S_n}{a_n}<0$，

$\left|S_n\right|_{\max}=\left|S_{10}\right|$，$\left|a_n\right|_{\min}=\left|a_{10}\right|$，$\left\{\dfrac{S_n}{a_n}\right\}_{\min}=\dfrac{S_{10}}{a_{10}}$；

③当$n=19$时，$\dfrac{S_{19}}{a_{19}}>0$且$\dfrac{S_{19}}{a_{19}}=\dfrac{S_{18}+a_{19}}{a_{19}}=\dfrac{S_{18}}{a_{19}}+1<1$，$\dfrac{S_9}{a_9}=\dfrac{S_8+a_9}{a_9}=\dfrac{S_8}{a_9}+1>1$，

故$\dfrac{S_{19}}{a_{19}}<\dfrac{S_9}{a_9}$；

综上所述：$\dfrac{S_1}{a_1},\dfrac{S_2}{a_2},\cdots,\dfrac{S_{18}}{a_{18}},\dfrac{S_{19}}{a_{19}}$中，最大项和最小项分别为$\dfrac{S_9}{a_9},\dfrac{S_{10}}{a_{10}}$.

故选：B.

8．C

【分析】根据赋值法可得$f(1)=1$，$f(-1)=1$，进而可得$f(-x)=f(x)$，即可判断A，根据函数单调性的定义可判断$y=f(x)(x\ne 0)$在$(0,+\infty)$上为减函数，即可求解B，代值逐步求解即可判断CD.

【详解】令$x=1$，$y=-1$，$f(-1)=f(1)+f(-1)-1$，所以$f(1)=1$；

令$x=-1$，$y=-1$，$f(1)=f(-1)+f(-1)-1$则$f(-1)=1$.

令$y=-1$，得$f(-x)=f(x)$，故$y=f(x)(x\ne 0)$为偶函数．A错误，

任取x_1，$x_2\in(0,+\infty)$，$x_1<x_2$，则$\dfrac{x_2}{x_1}>1$，

则$f(x_2)=f(x_1)+f\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)-1<f(x_1)$，故$y=f(x)(x\ne 0)$在$(0,+\infty)$上为减函数.

由已知$f(2x+1)>1$，可得$f(|2x+1|)>f(1)$，故$|2x+1|<1$，解得$-1<x<0$，且$x\ne-\dfrac{1}{2}$．B错误，

若$f(2)=\dfrac{1}{2}$，则$f(1024)=f(2^{10})=f(2^9)+f(2)-1=10f(2)-9=-4$，C正确，

若$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2$，则$f\left(\dfrac{1}{2^2}\right)=2f\left(\dfrac{1}{2}\right)-1=3$，$f\left(\dfrac{1}{2^4}\right)=2f\left(\dfrac{1}{2^2}\right)-1=5$，

$f\left(\dfrac{1}{2^5}\right)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{2^5}\right)-1=6$，所以$f\left(\dfrac{1}{1024}\right)=2f\left(\dfrac{1}{2^5}\right)-1=11$，故D错误，

故选：C.

9．CD

【分析】利用正态分布中两个量μ和σ的意义，以及曲线的对称性即可判断各选项正误.

【详解】由题意知，$\mu=100$，$\sigma^{2}=100$，

A：标准差：$\sqrt{\sigma^{2}}=10$，故A错误；

B：$P(100-10<X\leq100+10)=P(90<X\leq110)=0.6827$

$P\left(X<90\right)=\frac{1}{2}[1-P(90<X\leq110)]=0.15865$，

$P\left(X\geq90\right)=1-P(X<90)=0.84135<0.86=86\%$，故B错误；

C：$P(100-30<X\leq100+30)=P(70<X\leq130)=0.9973$，

$\therefore1000\times0.9973\approx997$人，故C正确；

D：$P(100-20<X\leq100+20)=P(80<X\leq120)=0.9545$，

因为成绩服从标准正态分布，

$\therefore P\left(X<80\right)=P\left(X\geq120\right)=\frac{1}{2}[1-P(80<X\leq120)]=0.02275$，故D正确.

故选：CD

10．ABD

【分析】求得导函数$f'\left(x\right)=a\left(x-a\right)\left(3x-2b-a\right)$，令$f'\left(x\right)=0$，$x=a$或$x=\frac{2b+a}{3}$由极大值点为$x=a$，讨论$a>0,a<0$得出$a,b$关系，依次判断各选项即可得出结果.

【详解】$\because f\left(x\right)=a\left(x-a\right)^{2}\left(x-b\right)(a\neq0)$，

$\therefore f'\left(x\right)=2a\left(x-a\right)\left(x-b\right)+a\left(x-a\right)^{2}=a\left(x-a\right)\left(3x-2b-a\right)$，

令$f'\left(x\right)=0$，$x=a$或$x=\frac{2b+a}{3}$,由题意可知，$\frac{2b+a}{3}\neq a$.

$\because$函数$f\left(x\right)=a\left(x-a\right)^{2}\left(x-b\right)(a\neq0)$的极大值点为$x=a$，

$\therefore\begin{cases}a>0\\\frac{2b+a}{3}>a\end{cases}$或$\begin{cases}a<0\\\frac{2b+a}{3}<a\end{cases}$.即$b>a>0$或$b<a<0$.

所以$a^{2}<b^{2}$，A正确，$a^{2}<ab$，B正确，

$x_{1}+x_{2}=\frac{2b+a}{3}+a=\frac{2b+4a}{3}$，$b>a>0$时，$x_{1}+x_{2}>0$正确，$b<a<0$时$x_{1}+x_{2}>0$错误，则C错误，