版本要求

本课件需用office2010及以上版本打开，如果您的电脑是office2007及以下版本或者WPS软件，可能会出现不可编辑的文档。

乱码问题

如您在使用过程中遇到公式不显示或者乱码的情况，可能是因为您的电脑缺少字体，请登录网站www.canpointgz.cn/faq 下载。

联系我们

如您还有其他方面的问题，请登录网站www.canpointgz.cn/faq ，点击“常见问题”，或致电010-58818058。

全品学练考

高中数学

选择性必修第一册 RJA

第一章空间向量与立体几何

录

CONTENTS

1.4 空间向量的应用

1.4.2 用空间向量研究距离、夹角问题

第1课时用空间向量研究距离问题

【学习目标】

1.借助直线的方向向量和平面的法向量，能计算点到直线的距离、点到平面的距离，并知道两条平行直线之间的距离、直线与平面平行时两者间的距离、两个平行平面之间的距离.

2.能分析和解决一些立体几何中的距离问题，体会向量方法与综合几何方法的共性和差异，体会直线的方向向量和平面的法向量的作用，感悟向量是研究几何问题的有效工具.

课 前 预 习

◆知识点用空间向量研究距离问题

1. 点到直线的距离

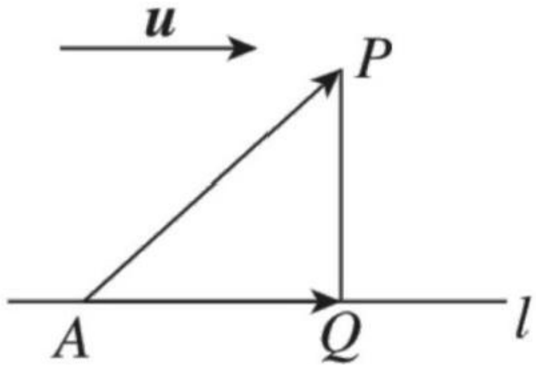


图1-4-18

如图1-4-18, 已知直线l 的单位方向向量为u,A 是 直 线上的定点， P 是直线l外一点，设AP=a, 则向量AP 在直线l 上的投影向量AQ=(a·u)u. 在Rt△APQ中，由勾股定理，得 $PQ=$ $\sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2-|\overrightarrow{AQ}|^2}$ $=$ $\sqrt{\boldsymbol{a}^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u})^2}$

课 前 预 习

2. 点到平面的距离

如图1-4-19, 已知平面α的法向量为n,A 是平面α内的定点，P 是平面α外一点. 过点P 作平面α的垂线l, 交平面α于点Q, 则n 是直线l 的方向向量，且点P 到平面α的距离就是AP 在直线l 上的投影向量QP 的长度. 因此

$$PQ=\left|\overrightarrow{AP}\cdot\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|=\underline{\left|\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|}=\underline{\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}}.$$

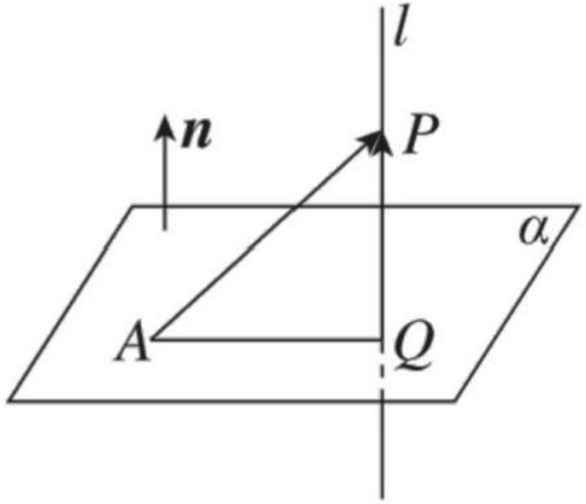


图1-4-19

课 前 预 习

3. 用空间向量解决立体几何问题的“三步曲”

(1)建立立体图形与空间向量的联系，用空间向量表示问题中涉及的点、直线、平面，把立体几何问题转化为向量问题；

(2)通过向量运算，研究点、直线、平面之间的位置关系以及它们之间的距离和夹角等问题；

(3)把向量运算的结果“翻译”成相应的几何结论.

课 前 预 习

【诊断分析】 判断正误.(请在括号中打“ √ ”或“×”)

(1)平面α外一点A到平面α的距离，就是点A与平面α内一点B所成向量$\overline{AB}$的长度.(×)

(2)若直线l//平面α,则直线l到平面α的距离就是直线l上的点到平面α的距离.(√)

(3)若平面α//平面β,则两平面α，β的距离可转化为平面α内某条直线到平面β的距离，也可转化为平面α内某点到平面β的距离.(√)

课中探究

◆探究点一 点到直线的距离

例1 (1) 在空间直角坐标系中，点A(1, 2, 3)关于y轴的对称点为点B，则点C(3, 0, 1)到直线AB的距离为(C)

A. $2\sqrt{3}$　　B. $\frac{2\sqrt{10}}{5}$　　C. $\frac{2\sqrt{65}}{5}$　　D. 6

[解析] 由题意，知B(−1, 2, −3), $\overrightarrow{AB}=(-2, 0, -6)$，取直线AB的一个单位方向向量为 $\boldsymbol{u}=\left(\frac{-2}{\sqrt{4+36}}, 0, \frac{-6}{\sqrt{4+36}}\right)=\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, 0, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$, $\overrightarrow{AC}=(2,-2,-2)$, 则点C到直线AB的距离 $d=\sqrt{\overrightarrow{AC}^2-\left(\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{u}\right)^2}=\sqrt{4+4+4-\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\times 2+\frac{3}{\sqrt{10}}\times 2\right)^2}=\frac{2\sqrt{65}}{5}$.

故选C.

课 中 探 究

(2)如图1-4-20,在空间直角坐标系中有长方体

ABCD-A’BC’D′ ,|AB|=1,|BC|=2,|AA=3, 求 B

点B 到直线A'C的距离.

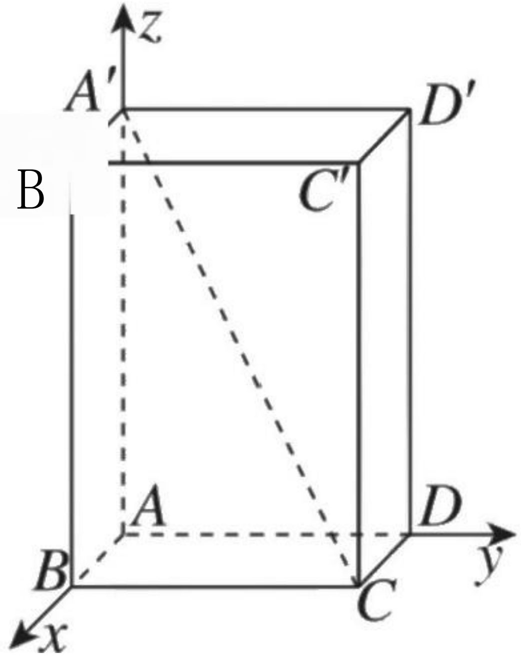


图1-4-20

课 中 探 究

解 因为|AB|=1, |BC|=2, |AA|=3,

所以A'(0,0,3),C(1,2,0),B(1,0,0),

所以直线A’C 的方向向量A℃=(1, 2, -3)

又$\overline{BC}$=(0,2,0), 所以BC 在直线A'C上的投影向量的长度为 $\frac{|\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{A'C}|}{|\overrightarrow{A'C}|}=\frac{4}{\sqrt{14}}$ 1 FIL

点 B 到直线A'C 的距离 $d=\sqrt{|\overrightarrow{BC}|^2-\left(\frac{|\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{A'C}|}{|\overrightarrow{A'C}|}\right)^2}=\sqrt{4-\frac{16}{14}}=\frac{2\sqrt{35}}{7}$.

课中探究

变式 如图1-4-21,三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，所有棱长都为2,且$\angle A_1AC=60°$，平面$A_1ACC_1\perp$平面ABC，点P,Q分别在AB,A_1C_1上，且$AP=A_1Q$.

(1)求证：$PQ//$平面B_1BCC_1;

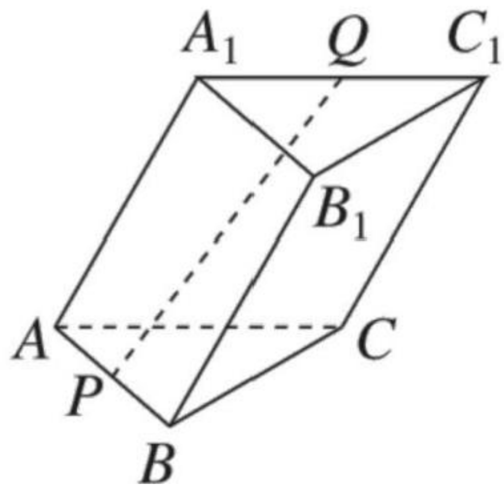


图1-4-21

课中探究

证明：如图，作$PD//AC$，交BC于点D，则由$A_1Q=AP$，
得$BP=QC_1$，

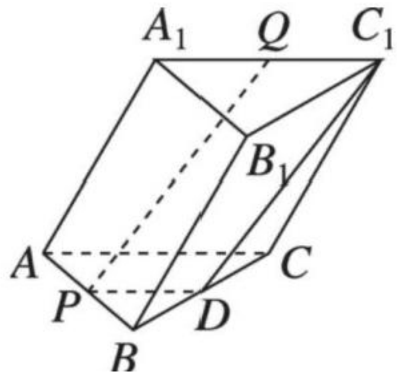
$\because PD//AC$，$\dfrac{PD}{AC}=\dfrac{BP}{AB}$ 即$PD=BP=QC_1$，$\therefore PD//QC_1$且

$PD=QC_1$，连接DC_1

$\therefore$四边形C_1QPD为平行四边形，

$\therefore PQ//C_1D$. $\because PQ\neq$ 平面BCC_1B_1，且$C_1D\subset$平面BCC_1B_1，

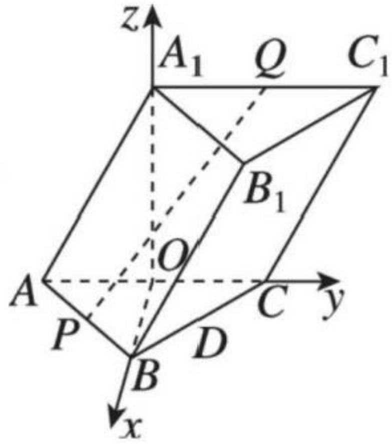
$\therefore PQ//$平面BCC_1B_1 .



课中探究

(2)当点P是棱AB的中点时，求点B_1到直线PQ的距离.

解：取AC的中点O，连接A_1O，BO



$\because AO=\frac{1}{2}AC=1$，$AA_1=2$，$\angle A_1AO=60°$，∴根据余弦定理得

$A_1O^2=AA_1^2+AO^2-2AA_1\cdot AO\cdot\cos 60°=4+1-2\times2\times1\times\frac{1}{2}=3$，∴$A_1O=V3$,

则$A_1O\perp AC$，又平面$A_1ACC_1\perp$平面ABC，平面$A_1ACC_1\cap$平面ABC=AC,

∴$A_1O\perp$ 平面ABC.

∵△ABC是等边三角形，∴$BO\perp AC$，建立如图所示的空间直角坐标系，则A(0,-1,0),B($\sqrt{3}$,0,0),A_1(0,0,$\sqrt{3}$),$P\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0\right)$,Q(0,1,$\sqrt{3}$),$B_1$(V3,1,$\sqrt{3}$),

课 中 探 究

$\therefore \overrightarrow{QP}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2},-\sqrt{3}\right),\overrightarrow{QB_1}=(\sqrt{3},0,0)$ ，

$\therefore \cos\langle\overrightarrow{QP},\overrightarrow{QB_1}\rangle=\frac{\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QB_1}}{|\overrightarrow{QP}|\cdot|\overrightarrow{QB_1}|}=\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{6}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$ ， 点B_1到直线PQ 的距离为

$|\overrightarrow{QB_1}|\cdot\sqrt{1-\cos^2\langle\overrightarrow{QP},\overrightarrow{QB_1}\rangle}=\sqrt{3}\times\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{42}}{4}$.

课 中 探 究

[素养小结]

用向量法求点到直线的距离的一般步骤:

(1)建立空间直角坐标系;

(2)求直线的方向向量;

(3)计算所求点与直线上某一点所构成的向量在直线上的投影向量的长度;

(4)利用勾股定理求解.

另外，要注意平行直线间的距离与点到直线的距离之间的转化.

课中探究

◆ 探究点二点到平面的距离

例2 如图1-4-22所示，在四棱锥P-ABCD 中，四边形ABCD 为正方形，PD⊥ 平面ABCD, PD=DA=2, F, E 分别为AD, PC 的中点.

(1)求证： DE// 平面PFB;

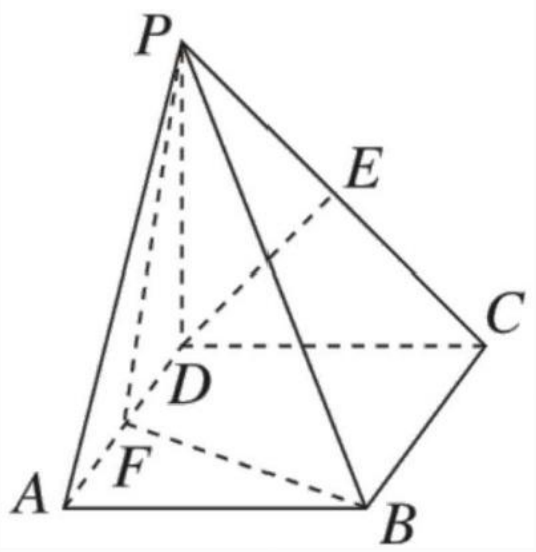


图1-4-22

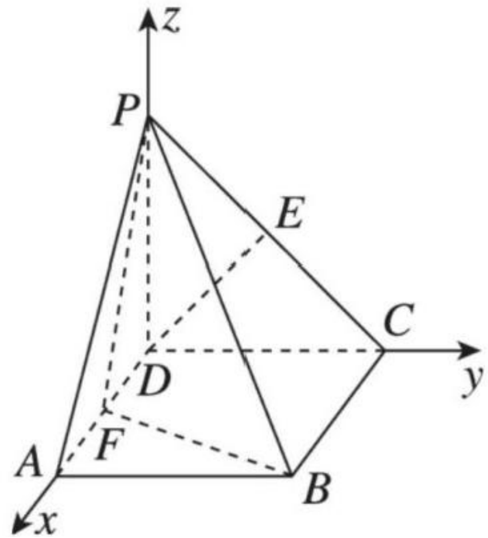
课 中 探 究

证明： *以D 为原点，DA,DC,DP 所在直线分别为x*
轴、 y 轴、 z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，则
P(0,0,2),F(1,0,0),B(2,2,0),E(0,1,1),D(0,0,0), 所以
FP=(-1,0,2),FB=(1,2,0),DE=(0,1,1)

所以$\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{FP}+\frac{1}{2}\overrightarrow{FB}$,

又因为DE≠ 平 面PFB,

所以DE// 平 面PFB.



课中探究

(2)求点E到平面PFB的距离.

解：由(1)可知，DE// 平面PFB, 所以点E 到平面PFB 的距离等于点D 到平面PFB的距离.

设平面PFB 的法向量为n =(x, y, z),

则$\begin{cases} \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{FB}=0, \\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{FP}=0, \end{cases}$ 即$\begin{cases} x+2y=0, \\ -x+2z=0, \end{cases}$ 取x=2, 得n=(2,-1,1).

因为$\overrightarrow{FD}$=(-1,0,0), 所以点D到平面PFB的距离$d=\frac{|\overrightarrow{FD}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$ I 所以点E到平面PFB的距离为$\frac{\sqrt{6}}{3}$.

课 中 探 究

变式如图1-4-23, 四边形ABCD 是矩形， PD⊥ 平面ABCD,PD=DC=a,AD=$\sqrt{2}$a,M,N 分别是AD,PB 的中点，求点A到平面MNC的距离.

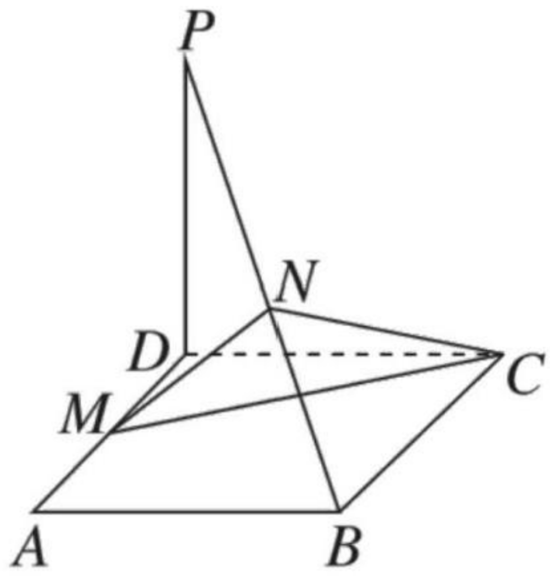


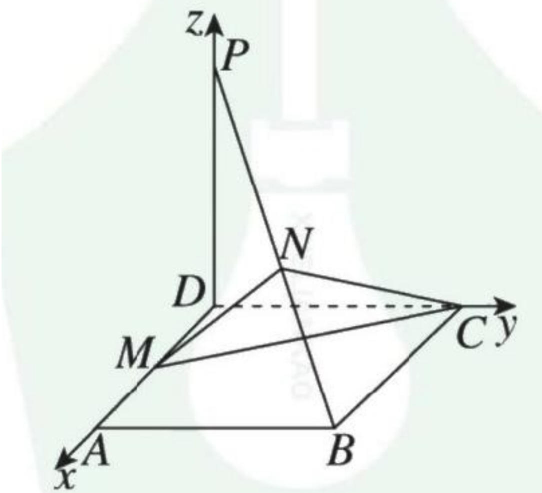
图1-4-23

课中探究

解： 如图，以D 为原点建立空间直角坐标系Dxyz， 则D(0,0,0),

A($\sqrt{2}$a, 0, 0), B($\sqrt{2}$a, a, 0), C(0, a, 0), P(0, 0, a), ∵M, N 分别是AD, PB

的中点,



∴ $M\left(\frac{\sqrt{2}a}{2},0,0\right)$, $N\left(\frac{\sqrt{2}a}{2},\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$,

∴ $\overrightarrow{MC}=\left(-\frac{\sqrt{2}a}{2},a,0\right)$, $\overrightarrow{MN}=\left(0,\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$, $\overrightarrow{MA}=\left(\frac{\sqrt{2}a}{2},0,0\right)$

课中探究

设n=(x,y,z) 为平面MNC 的法向量，

则$\begin{cases} \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MN}=0 \\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MC}=0 \end{cases}$，即$\begin{cases} \frac{a}{2}y+\frac{a}{2}z=0, \\ -\frac{\sqrt{2}a}{2}x+ay=0, \end{cases}$

令z=−1， 得n=($\sqrt{2}$, 1, −1)，

∴点A到平面MNC的距离$d=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MA}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{a}{2}$.