专题 8.2　实数二十六大考点

【北师大版】

题型先知

举一反三

【考点 1　求算术平方根、平方根、立方根】

【例 1】（2022·海南省直辖县级单位·七年级期中）0.16 的算术平方根是______，$\sqrt{25}$的平方根是______.

【答案】　0.4　$\pm\sqrt{5}$

【分析】根据求一个数的算术平方根与平方根进行计算即可求解.

【详解】0.16 的算术平方根是0.4，$\sqrt{25}=5$，则$\sqrt{25}$的平方根是$\pm\sqrt{5}$

故答案为：0.4， $\pm\sqrt{5}$

【点睛】本题考查了求一个数的算术平方根与平方根，理解平方根与算术平方根的定义是解题的关键．平方根：如果一个数的平方等于a，那么这个数就叫a的平方根，其中属于非负数的平方根称之为算术平方根．立方根：如果一个数的立方等于a，那么这个数叫做a的立方根．

【变式 1-1】（2022·云南·景洪市第三中学七年级期中）计算正确的是（　　）

A．$\sqrt[3]{1}=\pm 1$　　B．$-\sqrt{0.81}=0.9$　　C．$\sqrt{9}=\pm 3$　　D．$\sqrt{(-3)^2}=3$

【答案】D

【分析】直接利用立方根以及算术平方根的定义分别分析得出答案

【详解】解：

A、$\sqrt[3]{1}=1$，故本选项不符合题意；

B、$-\sqrt{0.81}=-0.9$，故本选项不符合题意；

C、$\sqrt{9}=3$，故本选项不符合题意；

D、$\sqrt{(-3)^2}=3$，故本选项符合题意

故选：D

【点睛】此题主要考查了立方根及算术平方根，正确把握相关定义是解题关键．

【变式 1-2】（2022·全国·八年级专题练习）若 m 是 169 的正的平方根，n 是 121 的负的平方根，求：

(1)$m+n$ 的值；

(2)（$m+n$）^{2}的平方根．

【答案】(1)2

(2)±2

【分析】（1）根据平方根的定义求出 m、n 的值，然后代入计算即可求解；

（2）先求出（$m+n$）^{2}的值，然后再根据平方根的定义进行求解．

（1）

$\because(\pm 13)^2=169$，m 是 169 的正的平方根，

$\therefore m=13$，

$\because$（± 11）$^2=121$，n 是 121 的负的平方根，

$\therefore n=-11$，

$\therefore m+n=13+(-11)=2$；

（2）

$\because m+n=2$

$\therefore (m+n)^2=4=(\pm 2)^2$，

$\therefore (m+n)^2$的平方根是±2.

【点睛】本题考查了平方根的定义，一个正数有两个平方根，它们互为相反数；0 的平方根是 0；负数没有平方根，熟记一些常用的平方数是解题的关键.

【变式 1-3】（2022·湖南·八年级单元测试）－27 的立方根与 9 的平方根之和为（　）

A．0　　B．6　　C．0 或－6　　D．0 或 6

【答案】C

【分析】依据平方根和立方根求得这两个数，然后利用加法法则计算即可.

【详解】解：-27 的立方根是-3，9 的平方根是±3，

-3+3=0，-3+（-3）=-6.

故选：C.

【点睛】本题主要考查的是立方根和平方根，熟练掌握立方根和平方根的意义是解题的关键.

【考点 2　利用算术平方根的非负性求值】

【例 2】（2022·全国·八年级专题练习）已知实数 a，b，c 满足$(a-2)^2+|2b+6|+\sqrt{5-c}=0$.

(1)求实数 a，b，c 的值；

(2)求$\sqrt{a-3b+c}$的平方根.

【答案】(1)$a=2$，$b=-3$，$c=5$

(2)$\sqrt{a-3b+c}$的平方根为±2

【分析】（1）根据非负性可知，$(a-2)^2=0$，$|2b+6|=0$，$\sqrt{5-c}=0$，求出 a，b，c 的值；

（2）由（1）得 $a=2$，$b=-3$，$c=5$，将 a，b，c 代入求解即可.

（1）

解：$\because (a-2)^2+|2b+6|+\sqrt{5-c}=0$，

$\therefore (a-2)^2=0$，$|2b+6|=0$，$\sqrt{5-c}=0$，

∴a﹣2＝0，$2b$+6＝0，5﹣c＝0，

解得 a＝2，b＝﹣3，c＝5；

（2）

解：由（1）知 a＝2，b＝﹣3，c＝5，

则$\sqrt{a-3b+c}$＝$\sqrt{2-3\times(-3)+5}$＝4，而$\pm\sqrt{4}=\pm 2$，

故$\sqrt{a-3b+c}$的平方根为±2．

【点睛】本题考查了平方的非负性，绝对值的非负性以及算术平方根的非负性，以及求一个数的平方根，熟练地运用以上知识是解决问题的关键．

【变式 2-1】（2022·全国·七年级）若 y＝$\sqrt{2x-1}$﹣$\sqrt{1-2x}$+6x，则$\sqrt{2x+2y-3}$的值为 ______．

【答案】2

【分析】根据被开方数非负性即可求出 x、y 的值，再代入计算即可．

【详解】∵y＝$\sqrt{2x-1}$﹣$\sqrt{1-2x}$+6x，

∴$\begin{cases}2x-1\geq 0\\1-2x\geq 0\end{cases}$，解得$x=\frac{1}{2}$

∴$y=3$

∴$\sqrt{2x+2y-3}=\sqrt{2\times\frac{1}{2}+2\times 3-3}=\sqrt{4}=2$

故答案为：2．

【点睛】本题考查算术平方根的非负性以及求一个数的算术平方根，熟记被开方数非负性是解题的关键．

【变式 2-2】（2022·上海·九年级专题练习）若$\sqrt{x-2}+|y+7|+(z-7)^2=0$，则$x-y+z$的平方根为（　）

A．±2　　B．4　　C．2　　D．±4

【答案】D

【分析】根据绝对值，平方，二次根式的非负性求出 x，y，z，算出代数式的值计算即可；

【详解】∵$\sqrt{x-2}+|y+7|+(z-7)^2=0$，

∴$\begin{cases}x-2=0\\y+7=0\\z-7=0\end{cases}$，

解得$\begin{cases}x=2\\y=-7\\z=7\end{cases}$，

∴$x-y+z=2-(-7)+7=16$，

∴$\pm\sqrt{16}=\pm 4$；

故选：D．

【点睛】本题主要考查了平方根的求解，结合绝对值、二次根式的非负性计算是解题的关键．

【变式 2-3】（2022·广东湛江·八年级期末）已知$|2020-m|+\sqrt{m-2021}=m$，求$m-2020^2$的值．

【答案】$m-2020^2=2021$

【分析】根据算术平方根的非负性确定 a 的范围，进而化简绝对值，再根据平方根的定义求得代数式的值．

【详解】解：∵$m-2021\geq0$，

∴$m\geq2021$，

∴$2020-m\leq0$，

∴原方程可化为：$m-2020+\sqrt{m-2021}=m$，

∴$\sqrt{m-2021}=2020$，

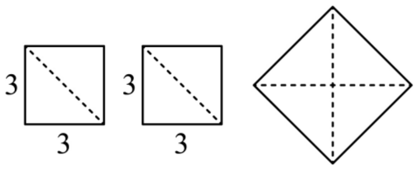
∴$m-2021=2020^2$，

∴$m-2020^2=2021$．

【点睛】本题考查了算术平方根的非负性，化简绝对值，平方根的定义，根据算术平方根的非负性确定 a 的范围化简绝对值是解题的关键．

【考点 3　估算算术平方根的取值范围】

【例 3】（2022·全国·八年级专题练习）如图，用边长为 3 的两个小正方形拼成一个面积为 18 的大正方形，则大正方形的边长最接近的整数是（　）



A．4　　B．5　　C．6　　D．7

【答案】A

【分析】根据算术平方根的概念结合正方形的性质得出其边长，进而得出答案．

【详解】解：∵用边长为 3 的两个小正方形拼成一个大正方形，

∴大正方形的面积为：9+9=18，

则大正方形的边长为：$\sqrt{18}$，

∵$\sqrt{16}<\sqrt{18}<\sqrt{4.5^2}$，

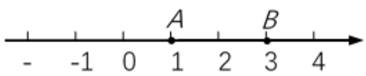
∴$4<\sqrt{18}<4.5$，

∴大正方形的边长最接近的整数是 4.

故选：A.

【点睛】本题主要考查了算术平方根，正确掌握算术平方根的定义是解题关键.

【变式 3-1】（2022·全国·七年级专题练习）数轴上表示下列各数的点，能落在 A，B 两个点之间的是（　　）



A．$-\sqrt{3}$　　B．$\sqrt{7}$

C．$\sqrt{11}$　　D．$\sqrt{13}$

【答案】B

【分析】首先确定 A，B 对应的数，再分别估算四个选项的数值进行判断即可.

【详解】解：由数轴得，A 点对应的数是 1，B 点对应的数是 3，

A.-2＜$-\sqrt{3}$＜-1，不符合题意；

B.2＜$\sqrt{7}$＜3，符合题意；

C、3＜$\sqrt{11}$＜4，不符合题意；

D. 3＜$\sqrt{13}$＜4，不符合题意；

故选：B

【点睛】本题主要考查了对无理数的估算.

【变式 3-2】（2022·天津·九年级期末）估计$\sqrt{7}-2$的值在（　　）

A．0 到 1 之间　　B．1 到 2 之间　　C．2 到 3 之间　　D．3 至 4 之间

【答案】A

【分析】先判断$\sqrt{7}$的取值范围，从而得出$\sqrt{7}-2$的取值范围.

【详解】$\because 2^2<(\sqrt{7})^2<3^2$

$\therefore 2<\sqrt{7}<3$，

$\therefore 0<\sqrt{7}-2<1$，

即$\sqrt{7}-2$在 0 到 1 之间，

故选 A.

【点睛】本题考查二次根式的估算，常见方法有 2 种：平方法去根号比较、将整数转化到根号内比较.

【变式 3-3】（2022·重庆·八年级期中）估计$\frac{\sqrt{13}+1}{2}$的值在（　）

A．1 到 2 之间　　B．2 到 3 之间　　C．3 到 4 之间　　D．4 到 5 之间

【答案】B

【分析】根据二次根式值的估算办法，可得结果.

【详解】解：∵3<$\sqrt{13}<4$,

∴4<$\sqrt{13}+1<5$,

$\therefore 2<\frac{\sqrt{13}+1}{2}<\frac{5}{2}$,

故$\frac{\sqrt{13}+1}{2}$的值在 2 到 3 之间，选 B.

【点睛】本题考查了实数的估计大小，掌握放缩法估计实数的大小是解题的关键.

【考点 4　求算术平方根的整数部分或小数部分】

【例 4】（2022·上海徐汇·七年级阶段练习）$\sqrt{11}$的整数部分是______．小数部分是_______.

【答案】　3　$\sqrt{11}-3$

【分析】根据算术平方根的整数部分和小数部分求解的方法直接进行求解即可.

【详解】解：$\because 9<11<16$，

$\therefore 3<\sqrt{11}<4$，

∴$\sqrt{11}$的整数部分为 3，

∴$\sqrt{11}$的小数部分为$\sqrt{11}-3$；

故答案为 3，$\sqrt{11}-3$.

【点睛】本题主要考查算术平方根，熟练掌握求一个算术平方根的整数部分和小数部分是解题的关键.

【变式 4-1】（2022·浙江·七年级阶段练习）$6-\sqrt{11}$的小数部分为a，$7+\sqrt{11}$的小数部分为b，则$(a+b)^{2018}=$__________.

【答案】1

【分析】先分析$\sqrt{11}$介于哪两个整数之间，再分别求出$6-\sqrt{11}$和$7+\sqrt{11}$介于哪两个整数之间，即可求出$6-\sqrt{11}$和$7+\sqrt{11}$的整数部分，然后用它们分别减去它们的整数部分得到a和b，代入即可.

【详解】解：$\because 3<\sqrt{11}<4$

$\therefore 10<7+\sqrt{11}<11$，$-3>-\sqrt{11}>-4$

$\therefore 3>6-\sqrt{11}>2$

$\therefore 7+\sqrt{11}$的整数部分为 10，$6-\sqrt{11}$的整数部分为 2，

∴a=$6-\sqrt{11}-2=4-\sqrt{11}$

b=$7+\sqrt{11}-10=\sqrt{11}-3$

代入得：

$(a+b)^{2018}=(4-\sqrt{11}+\sqrt{11}-3)^{2018}$

$=1^{2018}$

=1

【点睛】此题考查的是实数（带根号）的整数部分和小数部分的求法.

【变式 4-2】（2022·重庆市万盛经济技术开发区溱州中学七年级期中）已知$\sqrt{2a-1}$＝3，3a﹣b+1 的平方根是±4，c 是$\sqrt{113}$的整数部分，求 a+b+2c 的平方根.

【答案】±5

【分析】分别根据算术平方根、平方根的意义，无理数的估算求出 a、b、c 的值，即可求出 a+b+2c 的值，根据平方根的意义即可求解.

【详解】解：∵$\sqrt{2a-1}$＝3，

∴2a﹣1＝9，

解得：a＝5，

∵3a﹣b+1 的平方根是±4，

∴15﹣b+1＝16，

解得：b＝0，

∵$\sqrt{100}<\sqrt{113}<\sqrt{121}$，

∴10＜$\sqrt{113}$＜11，

∴c＝10，

∴a+b+2c＝5+0+2×10＝25，

∴a+b+2c 的平方根为$\pm\sqrt{25}$＝±5.

【点睛】本题考查了算术平方根、平方根的意义，无理数的估算，熟知算术平方根、平方根的意义是解题关键.

【变式 4-3】（2022·江苏·八年级）设 2+$\sqrt{6}$的整数部分和小数部分分别是 x、y，试求 x、y 的值与 x-1 的算术平方根.

【答案】$\sqrt{3}$.

【详解】试题分析：先找到$\sqrt{6}$介于哪两个整数之间，从而找到整数部分，小数部分让原数减去整数部分，

然后代入求值即可.

试题解析：因为 4＜6＜9，所以 2＜$\sqrt{6}$＜3，

即$\sqrt{6}$的整数部分是 2，

所以 2+$\sqrt{6}$的整数部分是 4，小数部分是 2+$\sqrt{6}$-4=$\sqrt{6}$-2，

即 x=4，y=$\sqrt{6}$-2，所以$\sqrt{x-1}=\sqrt{4-1}$=$\sqrt{3}$.

考点：1．估算无理数的大小；2．算术平方根.

【考点 5　与算术平方根有关的规律探究】

【例 5】（2022·山东菏泽·八年级期中）将一组数$\sqrt{3}$，$\sqrt{6}$，3，$\sqrt{12}$，$\sqrt{15}$，……，$\sqrt{228}$按下面的方法进行排列：

$\sqrt{3}$　$\sqrt{6}$　3　$\sqrt{12}$　$\sqrt{15}$

$\sqrt{18}$　$\sqrt{21}$　$\sqrt{24}$　$\sqrt{27}$　$\sqrt{30}$

……

若$\sqrt{12}$的位置记为(1,4)，$\sqrt{24}$的位置记为(2,3)，则这组数中最大的有理数的位置记为（　）

A．(14,4)　　B．(14,5)　　C．(15,5)　　D．(16,1)

【答案】C

【分析】依据每组数的排列规律，设$a_n=\sqrt{3n}$，这列数中最大的有理数为$\sqrt{225}=\sqrt{3\times75}$，从而得出$n=75$，根据每行 5 个数进一步求解即可.

【详解】解：设$a_n=\sqrt{3n}$，

∵该列数中，最大的有理数为$\sqrt{225}$，

∴$3n=225$，即$n=75$，

∵每行 5 个数，

∴$\sqrt{225}$在第 15 行第 5 列，

∴这组数中最大的有理数的位置记为：(15,5)，

故选：C.

【点睛】本题主要考查了数字的规律探索，正确找出相应规律是解题关键.

【变式 5-1】（2022·全国·八年级专题练习）阅该下列材料：

（1）求下列各数的算术平方根：

$\sqrt{0.000004}$＝0.002，$\sqrt{0.0004}$＝0.02，$\sqrt{0.04}$＝0.2，$\sqrt{4}$＝2，$\sqrt{400}$＝20，

根据以上材料填空：$\sqrt{40000}$＝__，$\sqrt{4000000}$＝__.

（2）已知$\sqrt{2}$≈1.414，直接写出：$\sqrt{0.02}$≈______，$\sqrt{200}$≈_____，$\sqrt{20000}$≈______.

【答案】 200 2000 0.1414 14.14 141.4

【分析】（1） 观察被开方数和算术平方根小数点的位置，即可求解；

（2） 根据 （1） 中的规律，从被开方数和算术平方根小数点的移动位置考虑，即可求解；

【详解】解：（1）由所提供的各数算术平方根的变化规律可知，当被开方数扩大（缩小）100 倍，10000 倍，1000000 倍......则其结果就扩大（缩小）10 倍，100 倍，1000 倍......

所以$\sqrt{40000}$＝200，$\sqrt{4000000}$＝2000，

故答案为：200，2000；

（2）由（1）的规律可得，

$\sqrt{0.02}$＝0.1×$\sqrt{2}$≈0.1414，$\sqrt{200}$＝10$\sqrt{2}$≈14.14，$\sqrt{20000}$＝100$\sqrt{2}$≈141.4，

故答案为：0.1414，14.14，141.4.

【点睛】本题考查了算术平方根的规律，解题的关键是从小数点移动的位数来考虑.

【变式 5-2】（2022·黑龙江·齐齐哈尔市第二十八中学七年级期中）观察下列各式：

$$(1)\sqrt[3]{2\frac{2}{7}}=2\sqrt[3]{\frac{2}{7}},$$

$$(2)\sqrt[3]{3\frac{3}{26}}=3\sqrt[3]{\frac{3}{26}},$$

$$(3)\sqrt[3]{4\frac{4}{63}}=4\sqrt[3]{\frac{4}{63}},$$

$$(4)\sqrt[3]{5\frac{5}{124}}=5\sqrt[3]{\frac{5}{124}}$$

......

用字母 n 表示出一般规律是__________．（n 为不小于 2 的整数）

【答案】$\sqrt[3]{n\frac{n}{n^3-1}}=n\cdot\sqrt[3]{\frac{n}{n^3-1}}$（$n$ 为不小于 2 的整数）

【分析】分析被开方数的变换规律即可求得

【详解】解：1、观察 4 个等式左边根号内分数的特点：

①整数部分与分数部分的分子相等，即 2=2，3=3，4=4，5=5，

②整数部分与分数部分的分母有下列关系：$7=2^3-1,26=3^3-1,63=4^3-1,124=5^3-1$，

2、观察四个等式右边的立方根前的倍数正好是等式左边被开方数的整数部分，立方根里的分数正好是左边

被开方数的分数部分，所以其中的规律可以表示为$\sqrt[3]{n\frac{n}{n^3-1}}=n\cdot\sqrt[3]{\frac{n}{n^3-1}}$（$n$ 为不小于 2 的整数）

故答案为：$\sqrt[3]{n\frac{n}{n^3-1}}=n\cdot\sqrt[3]{\frac{n}{n^3-1}}$（$n$ 为不小于 2 的整数）.

【点睛】本题考查了立方根的规律探究，分析被开方数的变换规律是解题关键.

【变式 5-3】（2022·北京市十一学校二模）由$10^2=100$，$100^2=10000$，我们可以确定$\sqrt{1225}$是两位数．根据类似的想法，由于 1225 个位上的数是 5，我们能确定$\sqrt{1225}$个位上的数是______，如果只看 1225 的前两位 12，而$3^2=9$，$4^2=16$，我们能确定$\sqrt{1225}$十位上的数是______.

【答案】 5 3

【分析】根据题意，以题目给出的思路和方法进行推理得出答案，5 的任何次方尾数均是 5，则可求解①，根据题意确定 1225 的平方根是两位数，再根据 3 的平方和 4 的平方即可确定②.

【详解】∵5 的任何次方尾数均是 5，

∴1225 的平方根的个位数是 5，

∵$3^2=9$，$4^2=16$，9＜12＜16，

∴1225 的平方根的十位数是 3，

故答案为：5，3.

【点睛】考查了实数的意义，平方根的意义以及尾数的特征等知识，阅读理解题目提供的解题方法是解答本题的关键.

【考点 6 已知平方根、算术平方根或立方根，求该数】

【例 6】（2022·山西临汾·七年级期中）若正数 a 的两个平方根分别是$x+2$和$2x-5$，则 a 的值为__________.

【答案】9

【分析】根据一个正数的两个平方根互为相反数可得出 x 的值，再根据$a=(x+2)^2$即可解题.

【详解】∵正数 a 的两个平方根分别是$x+2$和$2x-5$

∴x+2+2x-5=0，

解得：x=1.

∴$a=(x+2)^2=3^2=9$

故答案为：9.

【点睛】本题考查了平方根的知识，属于基础题，注意掌握一个正数的两个平方根互为相反数.

【变式 6-1】（2022·福建·古田县玉田中学八年级阶段练习）若一个数的平方根和立方根都是它的本身，则

这个数是(　)

A．0　　　　　　B．1　　　　　　C．0 或 1　　　　　　D．0 或±1

【答案】A

【分析】根据一个数的平方根是它的本身的数是 0，一个数的立方根是它本身的数是 - 1 或 0 或 1，进行解答即可.

【详解】∵0^2＝0，

∴一个数的平方根是它的本身的数是 0，

∵0^3＝0，$(-1)^3$＝-1，1^3＝1，

∴一个数的立方根是它本身的数是 - 1 或 0 或 1，

∴一个数的平方根和立方根都是它本身的数为 0，

故选 A.

【点睛】本题考查平方根和立方根的性质，牢记一个数的平方根是它的本身的数是 0，一个数的立方根是它本身的数是 - 1 或 0 或 1，是解题的关键.

【变式 6-2】（2022·江苏·八年级专题练习）若 a 的算术平方根为 17.25，b 的立方根为 -8.69；x 的平方根为 ± 1.725，y 的立方根为 86.9，则（　）

A．$x=\frac{1}{100}a,y=-1000b$　　　　B．$x=\frac{1}{100}a,y=100b$

C．$x=100a,y=\frac{1}{100}a$　　　　D．$x=\frac{1}{1000}a,y=-100b$

【答案】A

【分析】根据平方根、算术平方根和立方根的定义求出 a、b、x、y 的值，再找出关系即可.

【详解】解：∵a 的算术平方根为 17.25，b 的立方根为-8.69，

∴a=297.5625，b=-656.234909.

∵x 的平方根为±1.725，y 的立方根为 86.9，

∴x=2.975625，y=656234.909，

∴$x=\frac{1}{100}a,y=-1000b$.

故选：A.

【点睛】本题考查了对平方根、算术平方根和立方根的运用．解题的关键是掌握平方根、算术平方根和立方根的定义.

【变式 6-3】（2022·河南·平顶山市第三中学七年级期中）若 4−2a 与 3a+1 是同一个正数的两个平方根.

(1)求 a 的值；

(2)求这个正数．

【答案】(1)a=-5；

(2)这个正数为 196．

【分析】（1）根据一个正数的两个平方根互为相反数解答即可；

（2）由 a 的值可求得这个正数．

（1）

解：由题意得：4-2a+3a+1=0，解得 a=-5，

答：a=-5；

（2）

解：当 a=-5，

∴4-2a=4-2×(-5)=14，

∴这个正数为$14^2=196$．

【点睛】本题考查平方根，理解平方根的定义是正确解答的前提，掌握一个正数两个平方根的特征是正确解答的关键.

【考点 7　利用平方根、立方根解方程】

【例 7】（2022·江苏·八年级专题练习）求下列等式中的 x；

（1）若$x^2=196$，则$x=$______；（2）若$x^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2$，则$x=$______；

（3）若$x^2=(-5)^2$，则$x=$______；（4）若$(-x)^2=1.21$，则$x=$______.

【答案】　± 14　$\pm\frac{3}{2}$　± 5　± 1.1

【分析】（1）根据平方根的定义，由$(\pm 14)^2=196$，可得x的值；

（2）根据平方根的定义，由$\left(\pm\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$，可得$x$的值；

（3）根据平方根的定义，由$(\pm 5)^2=(-5)^2$=25，可得x的值；

（4）根据平方根的定义，由$(\pm 1.1)^2=1.21$，可得x的值.

【详解】（1）$\because(\pm 14)^2=196$

$\therefore x=\ \pm 14$

故答案为：± 14

（2）$\because \left(\pm\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2$

$\therefore x=\ \pm\frac{3}{2}$

故答案为：$\pm\frac{3}{2}$

（3）$\because(\pm5)^2=(-5)^2$

$\therefore x=\ \pm5$

故答案为：±5

（4）$\because(\pm1.1)^2=1.21$

$\therefore x=\ \pm1.1$

故答案为：±1.1

【点睛】考核知识点：平方根．理解平方根的定义是关键．

【变式 7-1】（2022·黑龙江·拜泉县第三中学七年级阶段练习）用学过的知识解方程

(1)$8(x+1)^3=-125$

(2)$4(x-2)^2-121=0$

【答案】(1)$x=-\frac{7}{2}$

(2)$x_1=\frac{15}{2}$，$x_2=-\frac{7}{2}$

【分析】（1）采用开立方的方法即可求解；

（2）采用开平方的方法即可求解．

（1）

$$8(x+1)^3=-125$$
$$(x+1)^3=\frac{-125}{8}$$
$$(x+1)^3=\left(-\frac{5}{2}\right)^3$$
$$x+1=-\frac{5}{2}$$

$x=-\frac{7}{2}$；

（2）

$$4(x-2)^2-121=0$$

$$4(x-2)^2=121$$

$$(x-2)^2=\frac{121}{4}$$

$$(x-2)^2=\left(\frac{11}{2}\right)^2$$

$$x-2=\pm\frac{11}{2}$$

$$x=2\pm\frac{11}{2}$$

即$x_1=\frac{15}{2}$，$x_2=-\frac{7}{2}$，

即方程的解为：$x_1=\frac{15}{2}$，$x_2=-\frac{7}{2}$.

【点睛】本题考查了利用开立方和开平方的方法求解方程，掌握开平方和开立方的知识是解答本题的关键.

【变式 7-2】（2022·黑龙江鹤岗·七年级期末）$5+\sqrt[3]{x+1}=3$.

【答案】-9

【分析】先将 5 移到等式右边，与 3 合并，两边再立方，即可求出 x 的值.

【详解】解：$5+\sqrt[3]{x+1}=3$

$\sqrt[3]{x+1}=-2$

$x+1=-8$

$x=-9$

【点睛】本题考查了关于立方根的方程，熟练掌握立方根的性质是解决本题的关键.

【变式 7-3】（2022·湖北·监利市玉沙初级中学七年级阶段练习）解方程：

(1)$x^3+27=0$；

(2)$16(x-2)^2-9=0$.

【答案】(1)$x=-3$

(2)$x=\frac{11}{4}$或$x=\frac{5}{4}$

【分析】（1）根据求立方根的方法解方程即可；

（2）根据求平方根的方法解方程即可.

（1）

解：$\because x^3+27=0$，

$\therefore x^3=-27$，

$\therefore x=-3$；

（2）

解：$\because 16\left(x-2\right)^2-9=0$，

$\therefore 16\left(x-2\right)^2=9$，

$\therefore \left(x-2\right)^2=\frac{9}{16}$，

$\therefore x-2=\pm\frac{3}{4}$，

$\therefore x=\frac{11}{4}$或$x=\frac{5}{4}$.

【点睛】本题主要考查了利用求平方根、求立方根的方法解方程，熟知求平方根和立方根的方法是解题的关键.

【考点 8　已知平方根、算术平方根、立方根求参数】

【例 8】2022·吉林四平·七年级期中）已知$2a-1$的平方根是± 3，$a+3b-1$的算术平方根是 4.

(1)求 a、b 的值；

(2)求$ab+5$的平方根.

【答案】(1)$a=5$，$b=4$；

(2)± 5.

【分析】（1）根据平方根，算术平方根的定义，求解即可；

（2）根据平方根定义，求解即可.

(1)

解：$\because 2a-1$的平方根是± 3，$a+3b-1$的算术平方根是 4.

$\therefore 2a-1=9$，$a+3b-1=16$，解得 $a=5$，$b=4$.

(2)

解：当 $a=5$，$b=4$ 时，$ab+5=25$ ，而 25 的平方根为$\pm\sqrt{25}=\pm 5$，

即 $ab+5$ 的平方根是± 5.

【点睛】此题主要考查平方根和算术平方根，解题的关键是熟知平方根，算术平方根的定义.

【变式 8-1】（2022·福建厦门·七年级期中）已知$a^2=81$，$\sqrt[3]{b}=-2$，则$\sqrt{b-a}=$______.

【答案】1

【分析】利用平方根和立方根的意义求得a，b的值，将a，b的值代入利用算术平方根的意义计算即可.

【详解】解：$\because a^2=81$，

$\therefore a=\pm 9$，

$\because \sqrt[3]{b}=-2$，

$\therefore b=-8$，

$\because b-a\geq 0$，

$\therefore a=-9$，$b=-8$，

$\therefore \sqrt{b-a}=\sqrt{1}=1$.

故答案为：1.

【点睛】本题主要考查了平方根、立方根和算术平方根的意义，根据题意正确确定字母的值是解题的关键.

【变式 8-2】（2022·四川·自贡市田家炳中学七年级期中）已知 x+2 的平方根±3，2x+y+7 的立方根是 3，试求$7x-3y$的立方根.

【答案】$\sqrt[3]{31}$

【分析】首先根据平方根和立方根的定义求出 x，y 的值，再把 x，y 的值代入要求的式子，然后根据立方根的定义即可得出答案.

【详解】由题得：$\begin{cases} x+2=(\pm 3)^2 \\ 2x+y+7=3^3 \end{cases}$，

解得$\begin{cases} x=7 \\ y=6 \end{cases}$，

$\therefore \sqrt[3]{7x-3y}=\sqrt[3]{7\times 7-3\times 6}=\sqrt[3]{31}$

【点睛】此题主要考查了求一个数的立方根和平方根的定义，解题的关键是正确理解立方根和平方根的定义.

【变式 8-3】（2022·江西·上饶市广信区第七中学七年级期中）已知$2a-1$的算术平方根是$\sqrt{17}$，$3a+b-1$的立方根是 3.

(1)求 a，b 的值；

(2)求$a+b$的平方根.

【答案】(1)a=9，b=1

(2)$\pm\sqrt{10}$

【分析】（1）根据算术平方根和立方根的定义进行求解；

（2）由（1）将 a，b 的值代入求解即可.

（1）

解：$\because 2a-1$的算术平方根是$\sqrt{17}$，$3a+b-1$的立方根是 3，

$\therefore 2a-1$=17，$3a+b-1$=27，

$\therefore a$=9，b=1.

（2）

解：由（1）知a=9，b=1，

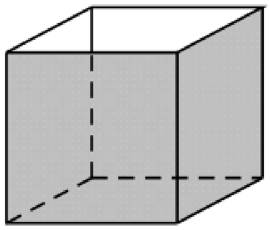
$\therefore a+b=9+1=10$，

$\therefore a+b$的平方根是$\pm\sqrt{10}$.

【点睛】本题考查实数的应用，准确地理解算术平方根，立方根和平方根的定义是解决问题的关键.

【考点 9　平方根、算术平方根、立方根的实际应用】

【例 9】（2022·山西吕梁·七年级期末）如图，在数学活动课上，小颖制作了一个表面积为30cm^2的无盖正方体纸盒，这个正方体纸盒的棱长是（　）



A．$\sqrt{5}$cm　　B．$\sqrt{6}$cm　　C．$\sqrt{10}$cm　　D．$\sqrt{30}$cm

【答案】B

【分析】根据题意得：这个正方体纸盒的每个面的面积为$30\div5=6\text{cm}^2$，再根据算术平方根的性质，即可求解.

【详解】解：根据题意得：这个正方体纸盒的每个面的面积为$30\div5=6\text{cm}^2$，

$\therefore$这个正方体纸盒的棱长是$\sqrt{6}$cm.

故选：B

【点睛】本题主要考查了求一个数的算术平方根，熟练掌握算术平方根的性质是解题的关键.

【变式 9-1】（2022·安徽·潜山市罗汉初级中学七年级阶段练习）交通警察通常根据刹车时后车轮滑过的距离估计车辆行驶的速度．在某高速公路上，常用的计算公式是$v^2=256(df+1)$，其中 v 表示车速（单位；

km/h），d 表示刹车后车轮滑过的距离（单位：m），f 表示摩擦系数，$f=1.25$．在调查这条高速公路的一次交通事故中，测得$d=19.2\mathrm{m}$，求肇事汽车的速度大约是多少．

【答案】肇事汽车的速度大约是 80km/h

【分析】将 d，f 的值代入公式计算出v^2的值，再根据算术平方根的定义可得答案．

【详解】解：当$f=1.25$，$d=19.2$时，

$v^2=256(df+1)=256\times(19.2\times1.25+1)=6400$，

$\therefore v=\sqrt{6400}=80$．

答：肇事汽车的速度大约是 80km/h．

【点睛】本题考查了算术平方根，解题的关键是掌握算术平方根的定义．

【变式 9-2】（2022·福建福州·七年级期末）某学校有一块长、宽分别为 38m 和 16m 的长方形空地，计划沿边建造一个长宽之比为5:3且面积为$540\mathrm{m}^2$的长方形标准篮球场，请判断该学校能否用这块长方形空地建造符合要求的篮球场？并说明理由．

【答案】不能，理由见解析

【分析】通过用同一未知数表示出篮球场的长和宽，列方程进行求解．

【详解】解：不能，理由如下：

设长方形标准篮球场的长为 $5x\ m$．宽为 $3x\ m$，

由题意得：$5x\times3x=540$，

解得：$x=-6$（舍去）或 6，

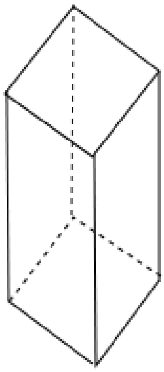
即长方形标准篮球场的长为 $30m$，宽为 $18m$，

$\because 18m>16m$，

∴该学校不能用这块长方形空地建造符合要求的篮球场．

【点睛】此题主要考查了算术平方根，正确得出 x 的值是解题的关键．

【变式 9-3】（2022·新疆·乌鲁木齐市第九中学七年级阶段练习）如图，有一个长方体的水池长、宽、高之比为 2：2：4，其体积为 16 000cm^3．



(1)求长方体的水池长、宽、高为多少？

(2)当有一个半径为 r 的球放入注满水的水池中，溢出水池外的水的体积为水池体积的$\frac{1}{60}$，求该小球的半径为多少（π 取 3，结果精确到 0.01 cm）？

【答案】(1)长方体的水池长、宽、高为：20cm，20cm，40cm；

(2)该小球的半径为 4.05cm．

【分析】（1）设长方体的水池长、宽、高为 $2x$，$2x$，$4x$，根据长方体体积公式列方程，根据立方根定义即可求解，问题得解；

（2）设该小球的半径为 $r$cm，根据溢出水池外的水的体积为水池体积的$\frac{1}{60}$列方程，解方程即可求解．

（1）

解：∵有一个长方体的水池长、宽、高之比为 2：2：4，其体积为 16 000cm³，

∴设长方体的水池长、宽、高为 $2x$，$2x$，$4x$，

∴$2x \bullet 2x \bullet 4x = 16000$，

∴$16x^3 = 16000$，

∴$x^3 = 1000$，

解得：$x = 10$，

∴长方体的水池长、宽、高为：20cm，20cm，40cm；

（2）

解：设该小球的半径为 $r$cm，

由题意得 $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{60}\times 16\,000$，

∴$r^3 = \frac{1}{60}\times 16\,000\times\frac{1}{4}$，

∴$r \approx 4.05$，

答：该小球的半径为4.05cm．

【点睛】本题考查了立方根的应用，熟知立方根的意义，根据题意列出方程是解题关键．

【考点9　实数、无理数的概念】

【例9】（2022·山东青岛·八年级期中）下列各数1.414，$\sqrt{36}$，20π，$\frac{1}{3}$，$\sqrt{8}$，8.181181118...按规律排列），3.1415926中是无理数的有（　　）个．

A．3　　B．4　　C．5　　D．6

【答案】A

【分析】分别根据无理数、有理数的定义逐个判定即可．

【详解】解：1.414，3.1415926，是有限小数，属于有理数；$\sqrt{36}$=6，是整数，属于有理数；

$\frac{1}{3}$是分数，属于有理数；无理数有20π，$\sqrt{8}$，8.181181118...按规律排列）共3个．

故选A．

【点睛】本题主要考查了无理数的定义，注意带根号的要开不尽方才是无理数，无限不循环小数为无理数．

【变式9-1】（2022·福建·晋江市南侨中学八年级阶段练习）关于“$\sqrt{19}$”，下列说法不正确的是（　　）

A．它是一个无理数　　B．它可以用数轴上的一个点表示

C．它可以表示面积为19的正方形的边长　　D．它不是实数

【答案】D

【分析】分别根据无理数的定义、数轴的意义、正方形面积公式，实数的分类判断即可．

【详解】解：A、$\sqrt{19}$是一个无理数，说法正确，故此选项不合题意；

B、$\sqrt{19}$可以用数轴上的一个点来表示，说法正确，故此选项不合题意；

C、$\sqrt{19}$可以表示面积为19的正方形的边长，利用正方形的面积公式$S=a^2$可以验证此说法正确，故选项C不合题意；

D．$\sqrt{19}$是一个无理数，自然也是实数，说法不正确，故此选项符合题意．

故选D．

【点睛】本题主要考查了无理数的定义、数轴的意义，正方形面积公式，实数的分类，掌握相关概念是解题的关键．

【变式9-2】（2022·黑龙江齐齐哈尔·七年级期中）设m为大于1且小于100的整数，则m的平方根中，属于无理数的个数有（　　）

A．92 个　　B．180 个　　C．182 个　　D．184 个

【答案】B

【分析】1 至 100 之间，除去完全平方数，余下的数字的平方根均为无理数.

【详解】1 至 100 之间（不含 1 和 100）共计有 98 个数，完全平方数有 4、9、16、25、36、49、64、81，共计 8 个数，

则余下的数有 98-8=90 个数，

则 m 可以取的数有 90 个，

这 90 个数的平方根有 180 个，且都是无理数，

故选：B.

【点睛】本题考查了无理数以及平方根的知识．无限不循环的小数是无理数，找到 m 可以取值的个数是解答本题的关键.

【变式 9-3】（2022·江苏·泰州市姜堰区第四中学七年级）把下列各数分别填入相应的集合里.

$-|-5|,\left|-\frac{3}{2}\right|,0,-3.14,\frac{22}{7},+1.99,-(-6),2\pi,-12.101001\cdots$（每两个 1 之间 0 的个数依次增加 1）

(1)负数集合：{　　　…}；

(2)非负整数集合：{　　　…}；

(3)分数集合：{　　　…}；

(4)无理数集合：{　　　…}.

【答案】(1) $-|-5|,-3.14,-12.101001\cdots$（每两个 1 之间 0 的个数依次增加 1）

(2)$0,-(-6)$

(3)$\left|-\frac{3}{2}\right|,-3.14,\frac{22}{7},1.99$

(4)$2\pi,-12.101001\cdots$

【分析】根据实数的分类进行判断即可，有理数包括：整数（正整数、0 和负整数）和分数（正分数和负分数），无限不循环小数是无理数，即可求解.

（1）

解：$-|-5|=-5,\left|-\frac{3}{2}\right|=\frac{3}{2},-(-6)=6$，

负数集合：$\{-|-5|,-3.14,-12.101001\cdots$（每两个 1 之间 0 的个数依次增加 1）…}；

（2）

解：$-|-5|=-5, \left|-\frac{3}{2}\right|=\frac{3}{2}, -(-6)=6$，

非负整数集合：$\{0, -(-6)\ldots\}$

（3）

解：$-|-5|=-5, \left|-\frac{3}{2}\right|=\frac{3}{2}, -(-6)=6$，

分数集合：$\{\left|-\frac{3}{2}\right|, -3.14, \frac{22}{7}, 1.99\ldots\}$；

（4）

解：$-|-5|=-5, \left|-\frac{3}{2}\right|=\frac{3}{2}, -(-6)=6$，

无理数集合：{ $2\pi, -12.101001\cdots$（每两个 1 之间 0 的个数依次增加 1）…}

【点睛】本题考查了实数的分类，认真掌握正数、负数、整数、分数、正有理数、负有理数、非负数的定义与特点，注意整数和正数的区别，注意 0 是整数，但不是正数无限不循环小数是无理数是解题的关键.

【考点 10　实数的大小比较】

【例 10】（2022·安徽合肥·七年级期末）下列四个数中最小的实数是（　　）

A．0　　B．$-\pi$　　C．-2　　D．-3

【答案】B

【分析】根据实数的大小比较法则：正数>0>负数；然后根据两个负数比较大小，绝对值大的反而小，即可得到答案.

【详解】解：∵正数>0>负数，

∴较小的三个数为：$-\pi$、-2、-3，

∵|-2|＜|-3|＜$|-\pi|$，

∴-2＞-3＞$-\pi$，

∴最小的数是$-\pi$.

故选：B.

【点睛】本题考查了实数的大小比较，属于基础题，掌握实数大小比较的法则是关键.

【变式 10-1】（2022·福建福州·七年级期中）比较大小：$\sqrt{37}$__________6．（用“>”或“<”连接）

【答案】>

【分析】根据$6=\sqrt{36}<\sqrt{37}$进行判断得到答案.

【详解】$\because 6=\sqrt{36}<\sqrt{37}$

$\therefore \sqrt{37}>6$

故答案为：>.

【点睛】本题考查实数大小的判断，解题的关键是熟练掌握平方根的相关知识.

【变式 10-2】（2022·湖北·测试·编辑教研五八年级阶段练习）四个实数-2，0，1，$\sqrt{2}$中最大的实数是（　）

A．-2　　B．0　　C．1　　D．$\sqrt{2}$

【答案】D

【分析】根据正数大于0，0大于负数，再估算出$\sqrt{2}$的值即可判断出最大的实数.

【详解】解：$\because 1<2<4$，

$\therefore 1<\sqrt{2}<2$，

在四个实数-2，0，1，$\sqrt{2}$中，

$\because \sqrt{2}>1>0>-2$，

$\therefore$ 最大的数是：$\sqrt{2}$，

故选：D.

【点睛】本题考查了实数大小比较，算术平方根，准确估算出$\sqrt{2}$的值是解题的关键.

【变式 10-3】（2022·辽宁阜新·八年级期末）比较大小：$\frac{\sqrt{5}}{2}$______$\frac{5}{4}$（填“>”“<”或“=”）.

【答案】<

【分析】将两数分别平方后，再比较大小即可.

【详解】解：$\because \frac{\sqrt{5}}{2}>0$，$\frac{5}{4}>0$，

$\therefore \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{5}{4}=\frac{20}{16}$，$\left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{25}{16}$，

$\therefore \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2<\left(\frac{5}{4}\right)^2$，

$\therefore \frac{\sqrt{5}}{2}<\frac{5}{4}$.

故答案为：<.

【点睛】本题考查了算术平方根，实数的大小比较，熟练掌握平方运算比较大小是解题的关键.

【考点 11　实数与数轴】

【例 11】（2022·广东韶关实验中学九年级期中）已知实数 a，b 在数轴上的位置如图所示，下列结论中正确的是（　）

A．$a > b$　　B．$|a| < |b|$　　C．$ab > 0$　　D．$-a > b$

【答案】D

【分析】由数轴上点的位置可知$a < 0 < b$，$|a| > |b|$，据此逐一判断即可．

【详解】解：由数轴上点的位置可知$a < 0 < b$，$|a| > |b|$，

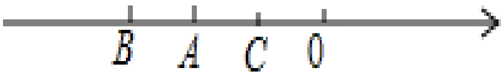
∴$ab < 0$，$-a > b$，

∴四个选项中只有 D 选项正确，

故选 D．

【点睛】本题主要考查了实数与数轴，正确根据数轴得到$a < 0 < b$，$|a| > |b|$是解题的关键．

【变式 11-1】（2022·内蒙古·乌海市第二中学七年级期中）如图，在数轴上表示-1，$-\sqrt{2}$的对应点为 A，B，若点 A 是线段 BC 的中点，则点 C 表示的数为______．



【答案】$\sqrt{2}-2$##$-2+\sqrt{2}$

【分析】设 C 表示的数是 x，根据 A 是线段 BC 的中点，列出算式，求出 x 的值即可．

【详解】解：设 C 表示的数是 x，

∵A 是 BC 中点，

∴$AB=AC$，

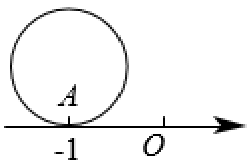
即$x-(-1)=-1-(-\sqrt{2})$，

∴$x=\sqrt{2}-2$．

故答案为：$\sqrt{2}-2$．

【点睛】本题考查了实数与数轴、线段的中点．解题的关键是理解线段中点的含义．

【变式 11-2】（2022·安徽·芜湖市第二十九中学七年级期中）如图，已知直径为 1 个单位长度的圆形纸片上的点 A 与数轴上表示-1 的点重合，若将该圆形纸片沿数轴滚动一周（无滑动）后点 A 与数轴上的点A'重合，则点A'表示的数为______________



【答案】$\pi-1$或$-\pi-1$

【分析】计算圆的周长为π，分A'在-1的左边与右边两种情形讨论即可求解．

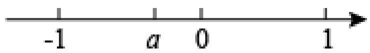
【详解】解：∵圆的周长为$\pi\times1=\pi$，

根据题意，点A'表示的数为$-1+\pi$或$-1-\pi$.

故答案为：$-1+\pi$或$-1-\pi$.

【点睛】本题考查了实数与数轴，理解题意，分类讨论是解题的关键.

【变式 11-3】（2022·湖南·八年级单元测试）若实数 a 的位置如图所示，则 a、$-$a、$\frac{1}{a}$、a^2，的大小关系是______（用＜号连接）



【答案】$\frac{1}{a}<a<a^2<-a$

【分析】根据实数a在数轴上的位置将$-a$，$\frac{1}{a}$,a^2表示在数轴上，比较大小即可.

【详解】解：$\because -1<a<0$

$$\therefore 0<-a<1$$

又$\because -a<1$ ，$a\neq 0$两边同时乘以$-a$

$$\therefore a^2<-a$$

$\because a>-1$ ，$a\neq 0$两边同时除以$-a$

$$\therefore -1>\frac{1}{a}$$

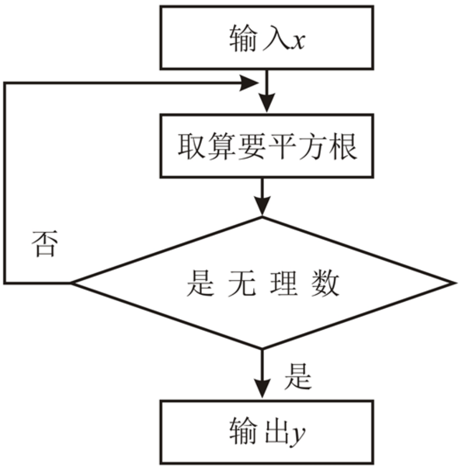
综上所述：$\frac{1}{a}<a<a^2<-a$

故答案为：$\frac{1}{a}<a<a^2<-a$.

【点睛】本题考查了求一个实数的相反数，倒数，实数大小的比较，数形结合是解题的关键.

【考点 12　程序框图中的实数运算】

【例 12】（2022·辽宁葫芦岛·七年级期末）如图是一个无理数生成器的工作流程图，根据该流程图下面说法正确的是（　）



A．输入值x为 16 时，输出y值为 4

B．输入任意整数，都能输出一个无理数

C．输出值y为$\sqrt{3}$时，输入值x为 9

D．存在正整数x，输入x后该生成器一直运行，但始终不能输出y值

【答案】D

【分析】根据运算规则即可求解．

【详解】解:A．输入值 x 为 16 时，$\sqrt{16}=4$，$\sqrt{4}=2$，即 y=$\sqrt{2}$，故 A 错误；

B．当 x=0， 1 时，始终输不出 y 值． 因为 0， 1 的算术平方根是 0， 1，一定是有理数，故 B 错误；

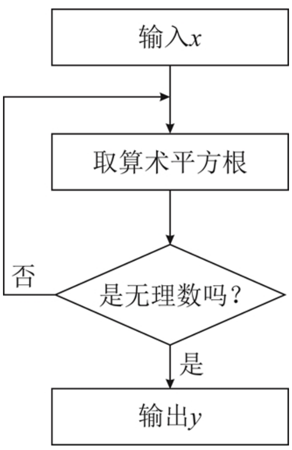
C．x 的值不唯一． x=3 或 x=9 或 81 等，故 C 错误；

D．当 x= 1 时，始终输不出 y 值． 因为 1 的算术平方根是 1，一定是有理数；故 D 正确；

故选:D．

【点睛】本题考查了算术平方根及无理数的概念，正确理解给出的运算方法是关键．

【变式 12-1】（2022·福建厦门·七年级期中）如图是一个无理数生成器的工作流程图，根据该流程图，下面说法：



①当输出值 y 为$\sqrt{2}$时，输入值 x 为 2 或 4；

②当输入值 x 为 9 时，输出值 y 为$\sqrt{3}$；

③对于任意的正无理数 y，都存在正整数 x，使得输入 x 后能够输出 y；

④存在这样的正整数 x，输入 x 之后，该生成器能够一直运行，但始终不能输出 y 值.

其中正确的是________.

【答案】②④##④②

【分析】根据流程图逆向分析即可判断①，把 $x=9$ 代入流程图判断②；通过特殊值法排除③；当 $x=1$ 时判断④.

【详解】解：①∵当$x=16$时，$\sqrt{16}=4$，$\sqrt{4}=2$，2 取算术平方根为$\sqrt{2}$，输出值 y 为$\sqrt{2}$，则输入值 x 为 2 或 4 或16等，故①不符合题意；

②$\sqrt{9}=3$，3取算术平方根为$\sqrt{3}$，输出值 y 为$\sqrt{3}$，故②符合题意；

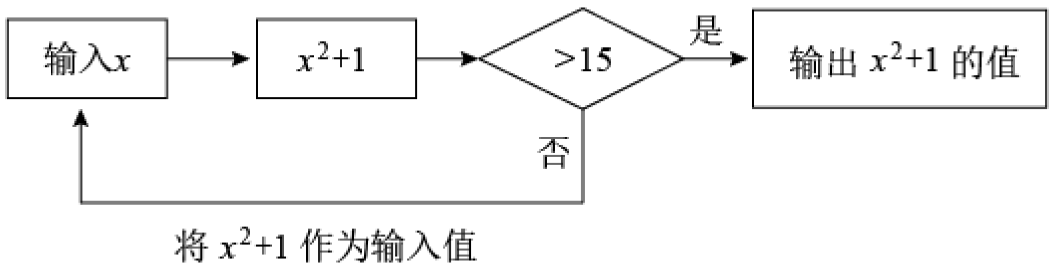
③如 $x=\pi^2$ 时，π^2是正无理数不是正整数，输出值 y 为 π 是正无理数，故③不符合题意；

④当 $x=1$，1 的算术平方根为 1，该生成器能够一直运行，但始终不能输出 y 值，故④符合题意；

故答案为：②④.

【点睛】本题考查了实数的性质，求一个数的算术平方根，无理数的定义，理解题意是解题的关键.

【变式 12-2】（2022·河北邢台·七年级期末）按下面程序计算：



（1）当输入$x=5$时，输出的结果为______

（2）若输入x的值为大于 1 的实数，最后输出的结果为 17，则符合条件的x的值是______

【答案】　26　$\sqrt{3}$或 4##4 或$\sqrt{3}$

【分析】（1）把$x=5$代入x^2+1进行计算，得到结果大于 15，可以输出，从而可得答案；

（2）分三种情况讨论：第一次输出的数为 17，第二次输出的数为 17，第三次输出的数为 17，再利用平方根的含义解方程可得答案.

【详解】解：（1）当$x=5$时，

$\therefore x^2+1=5^2+1=26>15$,

∴输出的数是 26．

（2）当第一次输出的结果为 17 时，

$\therefore x^2+1=17$,

解得：$x=4$或$x=-4$,

又$\because x>1$,

$\therefore x=4$,

当第二次输出的结果为 17 时，则

$(x^2+1)^2+1=17$,

$\therefore x^2+1=4$,（$x^2+1=-4$舍去）

解得：$x=\sqrt{3}$（$x=-\sqrt{3}$舍去）

当第三次输出的数为 17 时，则

$x^2+1=\sqrt{3}$, 此时$x<1$不合题意，舍去，

综上：x 的值为：$\sqrt{3}$或 4

故答案为：（1）26；（2）$\sqrt{3}$或 4

【点睛】本题考查的是程序框图与实数的混合运算，利用平方根的含义解方程，理解题意得到关于 x 的方程是解本题的关键．

【变式 12-3】（2022·内蒙古呼伦贝尔·七年级期末）小王利用计算机设计了一个计算程序，输入和输出的数据如下表：

输入	……	1	2	3	4	5	……
输出	……	−2	4	−8	16	−32	……

那么，当输入数据是 8 时，输出的数据是_______；当输入数据是 n 时，输出的数据是_____

【答案】　256　$(-2)^n$

【分析】从绝对值来看，输出数据等于以 2 为底、输入数据为指数的幂．从符号来看，输入数据为奇数，输出数据为负;输入数据为偶数，输出数据为正．根据这两个特征即可得到解答．

【详解】解：设输入数据为 a，输出数据为 b，则由题意可得：$b=(-2)^a$，所以：

当输入数据是 8 时，输出的数据是$(-2)^8=256$；当输入数据是 n 时，输出的数据是 $(-2)^n$.

故答案为 256；$(-2)^n$.

【考点 13 新定义中的实数运算】

【例 13】（2022·辽宁葫芦岛·七年级阶段练习）对于任何实数a，可用$[a]$表示不超过a的最大整数，如$[4]=4$，$[\sqrt{2}]=1$，则$[\sqrt{19}-1]=$______.

【答案】3

【分析】估计出$3<\sqrt{19}-1<4$，再结合题意，$[a]$表示不超过a的最大整数，因此即可得出$[\sqrt{19}-1]$的答案.

【详解】解：$\because 16<19<25$，

$\therefore 4<\sqrt{19}<5$，

$\therefore 3<\sqrt{19}-1<4$，

$\therefore [\sqrt{19}-1]=3$，

故答案为：3.

【点睛】本题考查了实数的估算，以及新定义运算，熟练找准无理数的整数部分是本题的关键.

【变式 13-1】（2022·全国·七年级）对于正数x，规定$f(x)=\frac{x}{1+x}$，例如$f(3)=\frac{3}{1+3}=\frac{3}{4}$，$f(\frac{1}{3})=\frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}$，计算：$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2021)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{2021}\right)=$ __________

【答案】$2020\frac{1}{2}$

【分析】按照定义式规定$f(x)=\frac{x}{1+x}$，发现规律，两两组合相加，剩下$\frac{1}{2}$，最后再求和即可.

【详解】解：$\because f(1)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$，$f(2)=\frac{2}{1+2}=\frac{2}{3}$，$f(3)=\frac{3}{1+3}=\frac{3}{4}$，…，$f(2021)=\frac{2021}{1+2021}=\frac{2021}{2022}$，

$f(\frac{1}{2})=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$，$f(\frac{1}{3})=\frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}$，…，$f(\frac{1}{2021})=\frac{\frac{1}{2021}}{1+\frac{1}{2021}}=\frac{1}{2022}$，

$\therefore f(2)+f(\frac{1}{2})=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$，

$f(3)+f(\frac{1}{3})=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$，

…，

$f(2021)+f(\frac{1}{2021})=\frac{2021}{2022}+\frac{1}{2022}=1$，

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2021)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{2021}\right)$

$=\frac{1}{2}+2020$

$=2020\frac{1}{2}$.

故答案为：$2020\frac{1}{2}$.

【点睛】本题考查了定义新运算在有理数的混合运算中的应用，读懂定义，发现规律，是解题的关键.

【变式 13-2】（2022·四川省德阳市第二中学校七年级阶段练习）任何实数 a，可用$[a]$表示不超过 a 的最大整数，如[2]＝2，[3.7]＝3，现对 72 进行如下操作：$72\xrightarrow{\text{第一次}}[\sqrt{72}]=8\xrightarrow{\text{第二次}}[\sqrt{8}]=2\xrightarrow{\text{第三次}}[\sqrt{2}]=1$，这样对 72 只需进行 3 次操作后变为 1，类似地：对 109 只需进行_________次操作后变为 1

【答案】3

【分析】根据题意可得 $109\xrightarrow{\text{第一次}}[\sqrt{109}]=10\xrightarrow{\text{第二次}}[\sqrt{10}]=3\xrightarrow{\text{第三次}}[\sqrt{3}]=1$，即可求解.

【详解】解：根据题意得：$109\xrightarrow{\text{第一次}}[\sqrt{109}]=10\xrightarrow{\text{第二次}}[\sqrt{10}]=3\xrightarrow{\text{第三次}}[\sqrt{3}]=1$，

∴对 109 只需进行 3 次操作后变为 1.

故答案为：3

【点睛】本题主要考查了无理数的估算，明确题意，准确理解$[a]$的含义是解题的关键.

【变式 13-3】（2022·重庆市第三十七中学校九年级阶段练习）已知一个四位自然数 n，若 n 满足千位上的数字等于个位上的数字，百位上的数字等于十位和个位上的数字之和，则称 n 为“加油数”．对于一个“加油数”n，将 n 的百位数字记为 x，百位数字与十位数字的积记为 y，令$F(n)=3x^2-y$.

例如：当$n=1541$时，$\because 1=1$且$5=4+1$，∴1541 是“加油数”：此时$x=5$，$y=5\times4=20$，$F(1541)=3\times5^2-20=55$；当$n=3213$时，$\because 3=3$但$2\neq1+3$，∴3213 不是“加油数”.

(1)请判断 2422，1531 是否是“加油数”、并说明理由；如果是，请求出对应的$F(n)$的值；

(2)已知 m 是个位上的数字小于十位上的数字的“加油数”，将 m 的各个数位上的数字之和记为$G(m)$，若$\frac{F(m)}{G(m)}$能被 4 整除，求 m 的所有可能值.

【答案】(1)2422 是“加油数”， 1531 不是“加油数”，理由见解析；$F(2422)=40$

(2)1431、1871、2862、3853

【分析】（1）根据题干所给的方法直接进行计算即可；

（2）根据题意，设 m=1000a+100(a+b)+10b+a，求出 F（m），结合材料求出 G（m），进而求得$\frac{F(m)}{G(m)}$=a+b，再根据$\frac{F(m)}{G(m)}$能被 4 整除，求解即可.

（1）

当$n=2422$时，$\because 2=2$且$4=2+2$，∴2422 是“加油数”，

此时 x=4，y=$4\times2=8$，$F(2422)=3\times4^2-8=40$；

当$n=1531$时，∵$1=1$但$5\neq3+1$，∴1531 不是“加油数”；

（2）

设 m=1000a+100(a+b)+10b+a=1101a+110b，

其中$1\leq a\leq9$，$1\leq b\leq9$，$1\leq a+b\leq9$，$a<b$，且 a、b 为整数，

∴$1\leq a\leq4$，

则 x=a+b，y=(a+b)b，

∴$F(m)=3(a+b)^2-(a+b)a=3a^2+5ab+2b^2$，

$G(m)=a+a+b+b+a=3a+2b$，

∴$\frac{F(m)}{G(m)}=\frac{3a^2+5ab+2b^2}{3a+2b}=\frac{(3a+2b)(a+b)}{(3a+2b)}=a+b$，

若$\frac{F(m)}{G(m)}$能被 4 整除，

当 a=1 时，满足条件的 b=3 或 7，此时 a+b=4 或 8，

∴m=1101a+110b=1431 或 1871；

当 a=2 时，满足条件的 b=6，此时 a+b= 8，

∴m=1101a+110b=2862；

当 a=3 时，满足条件的 b=5，此时 a+b= 8，

∴m=1101a+110b=3853；

当 a=4 时，没有 b 满足条件，

综上所述，m 的所有可能值为 1431、1871、2862、3853.

【点睛】本题考查了新定义的运算，解题的关键是根据“加油数”的定义表示出四位数 m，再结合题意因式分解化简讨论即可.

【考点 14　实数的运算】

【例 14】（2022·河南信阳·七年级期末）计算：

(1)$(-2)^3\times\sqrt{(-4)^2}+\sqrt[3]{(-4)^3}+\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\sqrt[3]{27}$

(2)$|1-\sqrt{2}|+|\sqrt{2}-\sqrt{3}|+|\sqrt{3}-2|+|2-\sqrt{5}|$

【答案】(1)$-38\frac{3}{4}$

(2)$\sqrt{5}-1$

【分析】（1）先化简各式，然后再进行计算即可解答；

（2）先化简每一个绝对值，然后再进行计算即可解答．

（1）

解：$(-2)^3\times\sqrt{(-4)^2}+\sqrt[3]{(-4)^3}+\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\sqrt[3]{27}$

$=-8\times4+(-4)+\frac{1}{4}-3$

$=-32-4+\frac{1}{4}-3$

$=-38\frac{3}{4}$;

（2）

解：$|1-\sqrt{2}|+|\sqrt{2}-\sqrt{3}|+|\sqrt{3}-2|+|2-\sqrt{5}|$

$=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+2-\sqrt{3}+\sqrt{5}-2$

$=\sqrt{5}-1$；

【点睛】本题考查了实数的运算，准确熟练地化简各式是解题的关键．

【变式 14-1】（2022·福建龙岩·八年级期中）计算：$(-1)^{2021}-\sqrt{(-2)^2}-\sqrt[3]{-8}+|\sqrt{3}-2|$．

【答案】$1-\sqrt{3}$

【分析】根据幂的计算，算术平方根、立方根、绝对值化简计算即可 ．

【详解】解：$(-1)^{2021}-\sqrt{(-2)^2}-\sqrt[3]{-8}+|\sqrt{3}-2|$

$=-1-2-(-2)+2-\sqrt{3}$

$=-1-2+2+2-\sqrt{3}$

$=1-\sqrt{3}$．

【点睛】本题考查了幂的计算、求一个数的算术平方根、立方根、绝对值化简，熟练掌握运算法则是解题的关键．

【变式 14-2】（2022·辽宁·鞍山市第二中学七年级阶段练习）计算：

(1) $-\sqrt[3]{-8}+\sqrt[3]{125}+\sqrt{(-2)^2}$；

(2) $|7-\sqrt{2}|-|\sqrt{2}-\pi|-\sqrt{(-7)^2}$；

(3) $\sqrt{1}+\sqrt[3]{-27}-\sqrt{\frac{1}{4}}+\sqrt[3]{0.125}+\sqrt{1-\frac{63}{64}}$；

(4) $-4^2+\sqrt{16}-\sqrt[3]{(-3)^3}-|\sqrt{2}-2|$．

【答案】(1)9

(2) $-\pi$

(3) $-\frac{15}{8}$

(4) $-11+\sqrt{2}$

【分析】（1）根据立方根的定义和算术平方根的定义计算即可；

（2）根据绝对值的意义、算术平方根的定义计算即可；

（3）根据立方根的定义和算术平方根的定义计算即可；

（4）根据有理数的乘方、立方根、算术平方根的定义、绝对值的意义进行计算即可．

（1）

解：原式 $=-(-2)+5+2$

$$=2+5+2$$

$=9$；

（2）

解：原式 $=7-\sqrt{2}+\sqrt{2}-\pi-7$

$=-\pi$；

（3）

解：原式 $=1+(-3)-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{64}}$

$$=-2+\frac{1}{8}$$

$=-\frac{15}{8}$；

（4）

解：原式 $=-16+4-(-3)+\sqrt{2}-2$

$$=-16+4+3+\sqrt{2}-2$$

$=-11+\sqrt{2}$．

【点睛】本题考查了算术平方根、立方根、绝对值的意义、有理数的乘方，解本题的关键在熟练掌握定义和运算法则．一般地，如果一个正数x的平方等于a，即$x^2=a$，那么这个正数x就叫做a的算术平方根；如果一个数的立方等于a，那么这个数就叫做a的立方根．

【变式 14-3】（2022·辽宁鞍山·七年级期中）计算

(1)$\sqrt{0.04}+\sqrt[3]{-8}-\sqrt{\frac{1}{4}}$

(2)$-2^3\div(-4)-\sqrt[3]{27}-(1-\sqrt{9})+|1-\sqrt{2}|$

【答案】(1)－2.3

(2)$\sqrt{2}$

【分析】（1）由算术平方根、立方根的定义进行计算，即可得到答案；

（2）由乘方、立方根、绝对值的意义进行计算，即可求出答案．

（1）

解：$\sqrt{0.04}+\sqrt[3]{-8}-\sqrt{\frac{1}{4}}$

$=0.2+(-2)-\frac{1}{2}$

$=-2.3$；

（2）

解：$-2^3\div(-4)-\sqrt[3]{27}-(1-\sqrt{9})+|1-\sqrt{2}|$

$=-8\div(-4)-3-(1-3)+\sqrt{2}-1$

$=2-3+2+\sqrt{2}-1$

$=\sqrt{2}$.

【点睛】本题考查了算术平方根、立方根、绝对值的意义，解题的关键是熟练掌握运算法则，正确的进行计算

【考点 15　实数运算的规律探究】

【例 15】（2022·湖南·李达中学七年级期中）已知$C_3^2=\frac{3\times2}{1\times2}$=3 ，$C_5^3=\frac{5\times4\times3}{1\times2\times3}=10$，$C_6^4=\frac{6\times5\times4\times3}{1\times2\times3\times4}=15$，......观察以上计算过程，寻找规律计算$C_8^5$的值为(　　)

A．56　　　　B．54　　　　C．52　　　　D．50

【答案】A

【分析】根据题意，得出对于$C_a^b(b<a)$来讲，等于一个分式，其中分母是从 1 到b的b个数相乘，分子是从a开始乘，乘b个连续自然数数．

【详解】解：∵ $C_3^2=\frac{3\times2}{1\times2}=3$，$C_5^3=\frac{5\times4\times3}{1\times2\times3}=10$，$C_6^4=\frac{6\times5\times4\times3}{1\times2\times3\times4}=15$，

∴ $C_8^5=\frac{8\times7\times6\times5\times4}{1\times2\times3\times4\times5}=56$.