重庆市巴渝学校高二年级 2024—2025 学年上学期期中测试

数学试卷

（考试时间：120 分钟　　试卷满分：150 分）

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡和试卷指定位置上.

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.

3．测试范围：空间向量与立体几何+直线和圆的方程+椭圆.

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

1. 直线 $\sqrt{3}x-y-2=0$ 的倾斜角为（　　）

A. 30°　　B. 60°　　C. 120°　　D. 150°

【答案】B

【解析】

【分析】首先将直线方程化为斜截式，即可求出斜率，再根据斜率与倾斜角的关系即可得解.

【详解】直线的方程为 $\sqrt{3}x-y-2=0$，即 $y=\sqrt{3}x-2$，

所以直线的斜率 $k=\sqrt{3}$，设倾斜角为 α，则 $\tan\alpha=\sqrt{3}$，

因为 $0^{\circ}\le\alpha<180^{\circ}$，所以 $\alpha=60^{\circ}$.

故选：B.

2. 已知 $A(1,0,-1),B(-1,2,3)$，则 A，B 两点间的距离为（　　）

A. $2\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{6}$　　C. 12　　D. 24

【答案】B

【解析】

【分析】由空间两点间距离公式求解.

【详解】因为 $A(1,0,-1),B(-1,2,3)$，

所以 $|AB|=\sqrt{2^2+2^2+4^2}=2\sqrt{6}$，故选：B

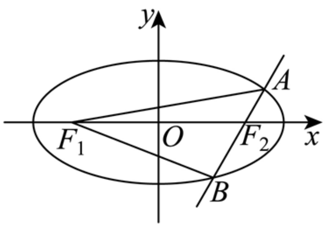
3. 经过椭圆$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$的右焦点$F_2$的直线$l$交椭圆于A，$B$两点，$F_1$是椭圆的左焦点，则$\triangle AF_1B$的周长是（　　）

A. 8　　　　B. 9　　　　C. 10　　　　D. 20

【答案】D

【解析】

【分析】$\triangle AF_1B$为焦点三角形，周长等于两个长轴长，再根据椭圆方程，即可求出$\triangle AF_1B$的周长.

【详解】


Q F_1, F_2为椭圆$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$的两个焦点，

$\therefore |AF_1|+|AF_2|=10, |BF_1|+|BF_2|=10$，

$\therefore$VAF_1B的周长为$|AB|+|AF_2|+|BF_2|=|AF_1|+|AF_2|+|BF_1|+|BF_2|=10+10=20$.

故选：D.

4. 已知圆$(x-1)^2+(y-1)^2=r^2$经过点$P(2,2)$，则圆在点P处的切线方程为（　　）

A. $x+y-4=0$　　　　B. $x+y=0$

C. $x-y=0$　　　　D. $x-y-4=0$

【答案】A

【解析】

【分析】首先求r^2的值，然后求圆心坐标，接着求圆心C与点P连线的斜率k_{CP}，最后求圆在点P处的切线方程.

【详解】因为圆$(x-1)^2+(y-1)^2=r^2$经过点$P(2,2)$，

将点$P(2,2)$代入圆的方程可得：$(2-1)^2+(2-1)^2=r^2$.即$1+1=r^2$，所以$r^2=2$，

则圆的方程为$(x-1)^2+(y-1)^2=2$.对于圆$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，其圆心坐标为(a,b)，所以此圆的圆心$C(1,1)$.∴

根据斜率公式 $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$，这里 $C(1,1)$，$P(2,2)$，则 $k_{CP}=\dfrac{2-1}{2-1}=1$.

因为圆的切线与圆心和切点连线垂直，若两条垂直直线的斜率分别为 k_1 和 k_2，则 $k_1k_2=-1$.

已知 $k_{CP}=1$，所以切线的斜率 $k=-1$.

又因为切线过点 $P(2,2)$，根据点斜式方程 $y-y_0=k(x-x_0)$（这里 $x_0=2,y_0=2,k=-1$），

可得切线方程为 $y-2=-(x-2)$.整理得 $x+y-4=0$.

故选：A.

5. 圆 $C_1:x^2+y^2=4$ 与圆 $C_2:(x-2)^2+(y-3)^2=9$ 的公切线有（　　）条

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】由两圆位置关系，可确定公切线条数.

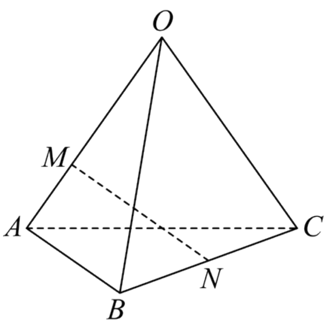
【详解】由题可得圆 C_1 圆心 $\left(0,0\right)$，半径为 2；圆 C_2 圆心 $(2,3)$，半径为 3.

则两圆圆心距为 $\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$，注意到 $3-2<\sqrt{13}<3+2$，

则两圆相交，故两圆有 2 条公切线.

故选：B

6. 如图，空间四边形 $OABC$ 中，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，点 M 在 OA 上，且 $\overrightarrow{OM}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OA}$，点 N 为 BC 中点，则 $\overrightarrow{MN}$ 等于（　　）



A. $\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}-\dfrac{1}{2}\vec{c}$　　B. $-\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}$　C. $\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}-\dfrac{1}{2}\vec{c}$　　D. $-\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}-\dfrac{1}{2}\vec{c}$

【答案】B

【解析】

【分析】利用空间向量的加法及减法运算法则进行线性运算，逐步表示即可得到结果.

【详解】∵点 N 为 BC 中点，

$\therefore \overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$，

$\therefore \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{ON}-\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}-\frac{2}{3}\vec{a}=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$.

故选：B.

7. 已知圆 $A: x^2+(y-3)^2=1$ 与圆 B 关于直线 $y=x$ 对称，则圆 B 的方程为（　　）

A. $x^2+y^2=1$　　B. $(x-3)^2+(y-3)^2=1$

C. $x^2+(y+3)^2=1$　　D. $(x-3)^2+y^2=1$

【答案】D

【解析】

【分析】根据题意，求得圆心 A 关于直线 $y=x$ 的对称点，即可得到结果.

【详解】由题意可得，圆 A 的圆心坐标为 $(0,3)$，圆 A 和圆 B 的半径均为 1，

设圆心 $A(0,3)$ 关于直线 $y=x$ 的对称点为 $B(a,b)$，

则 $\begin{cases}\frac{b-3}{a}\times 1=-1\\ \frac{a}{2}=\frac{b+3}{2}\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=3\\ b=0\end{cases}$，所以圆 B 的标准方程为 $(x-3)^2+y^2=1$.

故选：D

8. 已知圆 O：$x^2+y^2=1$，点 P 在椭圆 C：$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$ 运动，过点 P 作圆 C 的两条切线，切点分别为 A，B，则 $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|$ 的取值范围是（　　）

A. $\left[\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$　　B. $\left[\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$　　C. $\left[\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$　　D. $\left[\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{2\sqrt{6}}{3}\right]$

【答案】A

【解析】【分析】设 $P(x_0,y_0)$，依题意可得切点弦方程为 $x_0x+y_0y=1$，取 AB 的中点 D，连接 OD，则 $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|=2\left|\overrightarrow{OD}\right|$，利用点到直线的距离公式及 y_0^2 的范围计算可得.

【详解】设 $P(x_0,y_0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，设切线 PA 上任意一点为 $Q(x,y)$，则 $\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{OA}=0$，

所以$\left(x_1-x\right)x_1+\left(y_1-y\right)y_1=0$，即$xx_1+yy_1=x_1^2+y_1^2=1$，即切线$PA$的方程为$xx_1+yy_1=1$，

同理可得切线PB的方程为$xx_2+yy_2=1$，

所以$x_0x_1+y_0y_1=1$且$x_0x_2+y_0y_2=1$，

所以直线AB的方程为$x_0x+y_0y=1$，

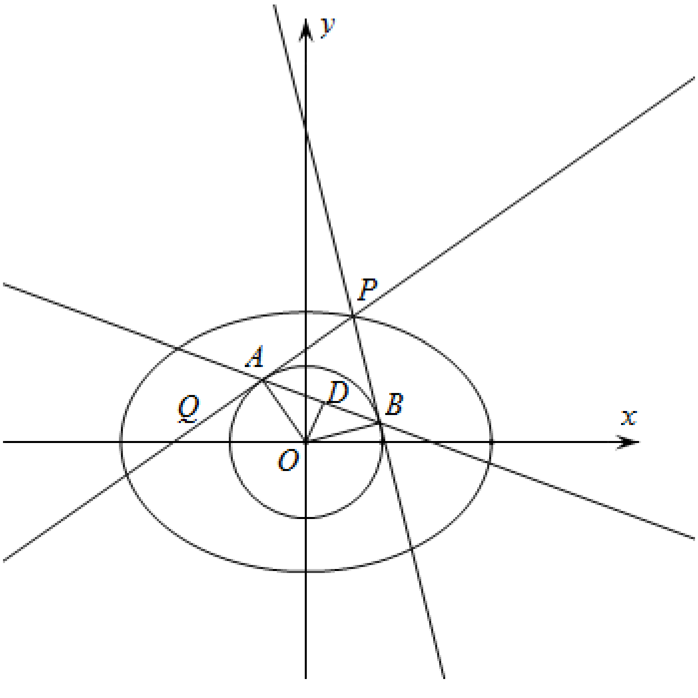
取AB的中点D，连接OD，则$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OD}$，$OD\perp AB$，

又$\dfrac{x_0^2}{6}+\dfrac{y_0^2}{3}=1$，即$x_0^2=6-2y_0^2$，

所以$\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|=2\left|\overrightarrow{OD}\right|=\dfrac{2}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{6-2y_0^2+y_0^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{6-y_0^2}}$，

因为$0\le y_0^2\le 3$，所以$\sqrt{3}\le\sqrt{6-y_0^2}\le\sqrt{6}$，则$\dfrac{\sqrt{6}}{3}\le\dfrac{2}{\sqrt{6-y_0^2}}\le\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

所以$\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|\in\left[\dfrac{\sqrt{6}}{3},\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right]$.



故选：A **二、多选选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．**

9. 已知空间向量$\vec{a}=\left(2,2,2\right)$，$\vec{b}=\left(1,-1,1\right)$，$\vec{c}=\left(1,3,1\right)$，则（　　）

A. $\left|\vec{a}\right|=2\sqrt{3}$　　　　B. $\vec{a}-\vec{b}=\left(1,3,1\right)$

C. $\vec{a}//\vec{b}$　　D. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 是共面向量

【答案】ABD

【解析】

【分析】根据题意，利用空间向量的坐标运算与表示，共线向量的坐标运算，共面向量定理，逐项判定，即可求解.

【详解】由向量 $\vec{a}=(2,2,2),\vec{b}=(1,-1,1),\vec{c}=(1,3,1)$，

可得 $|\vec{a}|=\sqrt{2^2+2^2+2^2}=2\sqrt{3}$，$\vec{a}-\vec{b}=(1,3,1)$，所以 A、B 正确；

设 $\vec{a}=\lambda\vec{b}$，可得 $(2,2,2)=\lambda\cdot(1,-1,1)$，所以 $\begin{cases}2=\lambda\\2=-\lambda\\2=\lambda\end{cases}$，此时方程组无解，

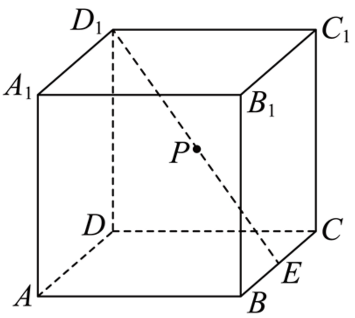
所以向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 不共线，所以 C 错误；

设 $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$，可得 $(1,3,1)=x\cdot(2,2,2)+y\cdot(1,-1,1)$，

所以 $\begin{cases}2x+y=1\\2x-y=3\\2x+y=1\end{cases}$，解得 $x=1,y=-1$，所以 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面，所以 D 正确.

故选：ABD.

10. 如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为 BC 的中点，点 P 在线段 D_1E 上，则下列说法正确的是（　　）



A. A_1B_1 与 CD 的距离为 $\sqrt{2}$　B. 当点 P 为 D_1E 的中点时，$PC_1=\dfrac{3}{2}$

C. 当点 P 在 D_1E 的中点时，点 P 到平面 A_1BD 的距离为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

D. 点 P 到直线 CC_1 的距离的最小值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

【答案】BC

【解析】

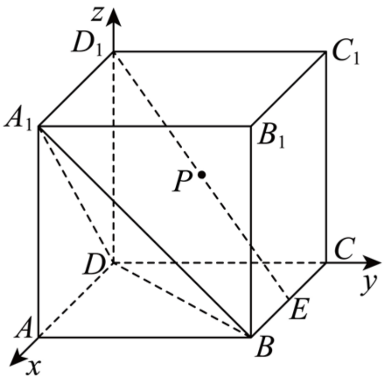
【分析】找出直线 A_1B_1 与 CD 的公垂线段，并求其长度，可判断 A 选项；以点 D 为坐标原点，DA、DC、DD_1 所在直线分别为 x、y、z 轴建立空间直角坐标系，利用空间向量法可判断 BCD 选项.

【详解】对于 A 选项，连接 A_1D，

因为 $A_1B_1\perp$ 平面 AA_1D_1D，$A_1D\subset$ 平面 AA_1D_1D，则 $A_1D\perp A_1B_1$，

同理可得 $CD\perp A_1D$，所以，A_1B_1 与 CD 的距离为 $A_1D=\sqrt{2}AD=2\sqrt{2}$，A 错；

以点 D 为坐标原点，DA、DC、DD_1 所在直线分别为 x、y、z 轴建立如下图所示的空间直角坐标系，



则 $A_1(2,0,2)$、$B(2,2,0)$、$D(0,0,0)$、$D_1(0,0,2)$、$E(1,2,0)$、$C_1(0,2,2)$，

对于 B 选项，当点 P 为线段 D_1E 的中点时，$P\left(\frac{1}{2},1,1\right)$，

此时，$|PC_1|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-0\right)^2+(1-2)^2+(1-2)^2}=\frac{3}{2}$，B 对；

对于 C 选项，当点 P 在 D_1E 的中点时，$\overrightarrow{DP}=\left(\frac{1}{2},1,1\right)$，$\overrightarrow{DA_1}=(2,0,2)$，$\overrightarrow{DB}=(2,2,0)$，设平面 A_1BD 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{DB}=2x+2y=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{DA_1}=2x+2z=0\end{cases}$，

取 $x=1$，可得 $y=-1$，$z=-1$，

所以 $\vec{m}=(1,-1,-1)$ 为平面 A_1BD 的一个法向量，

此时，点 P 到平面 A_1BD 的距离为 $\frac{|\overrightarrow{DP}\cdot\vec{m}|}{|\vec{m}|}=\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，C 对；

对于 D 选项，设 $\overrightarrow{D_1P}=\lambda\overrightarrow{D_1E}=\lambda(1,2,-2)=(\lambda,2\lambda,-2\lambda)$，其中 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$，

$\overrightarrow{C_1P}=\overrightarrow{C_1D_1}+\overrightarrow{D_1P}=(0,-2,0)+(\lambda,2\lambda,-2\lambda)=(\lambda,2\lambda-2,-2\lambda)$，

所以，点 P 到直线 CC_1 的距离为 $d=\sqrt{\left|\overrightarrow{C_1P}\right|^2-\left(\dfrac{\overrightarrow{C_1P}\cdot\overrightarrow{CC_1}}{\left|\overrightarrow{CC_1}\right|}\right)^2}$

$=\sqrt{5\lambda^2+(2\lambda-2)^2-(-2\lambda)^2}=\sqrt{5\lambda^2-8\lambda+4}=\sqrt{5\left(\lambda-\dfrac{4}{5}\right)^2+\dfrac{4}{5}}\geq\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

当且仅当 $\lambda=\dfrac{4}{5}$ 时，等号成立，故点 P 到直线 CC_1 的最短距离为 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，D 错.

故选：BC.

11. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(2>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，上顶点为 B，动点 P 在椭圆 C 上，则下列描述正确的有（　　）

A. 若 $\triangle PF_1F_2$ 的周长为 6，则 $b=\sqrt{3}$

B. 若当 $\angle F_1PF_2=\dfrac{\pi}{3}$ 时，$\triangle PF_1F_2$ 的内切圆半径为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，则 $b=\sqrt{3}$

C. 若存在 P 点，使得 $PF_1\perp PF_2$，则 $b\in[\sqrt{2},2)$

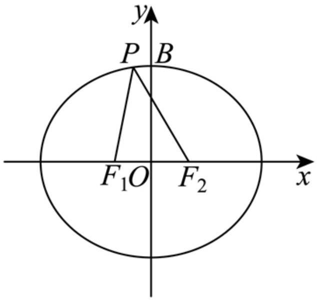
D. 若 $\left|PB\right|$ 的最大值为 $2b$，则 $b\in[\sqrt{2},2)$

【答案】ABD

【解析】

【分析】利用焦点三角形的周长求得 $c=1$，可求 b 判断 A；利用余弦定理求得焦点三角形的面积，可得 $\dfrac{1}{2}(|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|)\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(2+c)$，求解可判断 B；若 $PF_1\perp PF_2$，则以 O 为圆心，b 为半径的圆与椭圆有交点，则 $b\leq c$，求解可判断 C；$|PB|=\sqrt{(1-\dfrac{4}{b^2})(y-\dfrac{b^3}{b^2-4})^2-\dfrac{b^4}{b^2-4}+b^2+4}$，利用二次函数的最值可求得 b 的范围判断 D.

【详解】对于 A, 由椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(2>b>0)$，可得 $a=2$，



因为$\triangle PF_1F_2$的周长为 6，所以$2a+2c=6$，解得$c=1$，

因为$a^2-b^2=c^2$，所以$4-b^2=1$，解得$b=\sqrt{3}$，故 A 正确；

对于 B，由$a=2$，可得$|PF_1|+|PF_2|=2a=4$，

当$\angle F_1PF_2=\dfrac{\pi}{3}$时，由余弦定理可得$(2c)^2=|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cos\angle F_1PF_2$

$=(|PF_1|+|PF_2|)^2-3|PF_1|\cdot|PF_2|=4a^2-3|PF_1|\cdot|PF_2|$，

则$3|PF_1|\cdot|PF_2|=4a^2-4c^2=4b^2$，解得$|PF_1|\cdot|PF_2|=\dfrac{4}{3}b^2$，

所以$S_{\triangle PF_1F_2}=\dfrac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\sin\angle F_1PF_2=\dfrac{\sqrt{3}}{3}b^2$，

又$\triangle PF_1F_2$的内切圆半径为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

所以$S_{\triangle PF_1F_2}=\dfrac{1}{2}(|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|)\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(2+c)$，

所以$\dfrac{\sqrt{3}}{3}(2+c)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}b^2$，所以$2+c=b^2=2^2-c^2$，解得$c=-2$（舍去）或$c=1$，

所以$b=\sqrt{3}$，故 B 正确；对于 C，若$PF_1\perp PF_2$，则以O为圆心，c为半径的圆与椭圆有交点，则$b\le c$，

所以$b^2\le c^2$，所以$b^2\le a^2-b^2=4-b^2$，解得$0<b\le\sqrt{2}$，

所以存在P点，使得$PF_1\perp PF_2$，则$b\in(0,\sqrt{2}]$，故 C 错误；

对于 D，设$P(x,y),B(0,b)$，

$|PB|=\sqrt{(x-0)^2+(y-b)^2}=\sqrt{4(1-\dfrac{y^2}{b^2})+(y-b)^2}=\sqrt{(1-\dfrac{4}{b^2})y^2-2by+b^2+4}$

$=\sqrt{(1-\frac{4}{b^2})(y-\frac{b}{1-\frac{4}{b^2}})^2-\frac{b^2}{1-\frac{4}{b^2}}+b^2+4}=\sqrt{(1-\frac{4}{b^2})(y-\frac{b^3}{b^2-4})^2-\frac{b^4}{b^2-4}+b^2+4}$,

又因为$-b\le y\le b$，因为下顶点到上顶点的距离为 $2b$，又$|PB|$的最大值为 $2b$，

故 $y=-b$ 时取最大值，所以 $\frac{b^3}{b^2-4}\le -b$，解得 $\sqrt{2}\le b<2$，故 D 正确.

故选：ABD.

【点睛】结论点睛：椭圆中焦点三角形的有关结论

（1）焦点三角形的周长为$2a+2c$；

（2）当点 P 为椭圆短轴的一个端点时，$\angle F_1PF_2$ 为最大.

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知直线$2x+y-3=0$与直线$4x+2y+4=0$平行，则它们之间的距离是______.

【答案】$\sqrt{5}$

【解析】

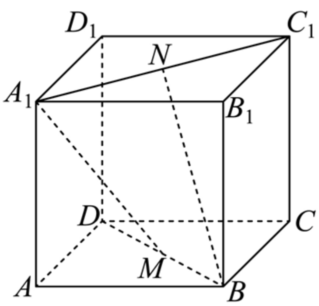
【分析】首先将直线$4x+2y+4=0$化为$2x+y+2=0$，再由两平行线间的距离公式计算可得.

【详解】直线$4x+2y+4=0$即$2x+y+2=0$，

所以平行直线$2x+y+2=0$与直线$2x+y-3=0$的距离$d=\frac{|2-(-3)|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$.

故答案为：$\sqrt{5}$

13. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M，N 分别为 DB，A_1C_1 的中点，则直线 A_1M 和 BN 的夹角的余弦值为______



【答案】$\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】建立空间直角坐标系，设正方体棱长为 2