福建省南安名校2023届高三上学期12月月考

数学试题

一、单选题

1．已知集合$A=\{x\in N|1<x<\log_2 k\}$，集合A中至少有2个元素，则（　）

A．$k\ge 16$　　B．$k>16$　　C．$k\ge 8$　　D．$k>8$

2．已知圆锥的轴截面是一个正三角形，则其侧面积与轴截面面积之比是（ ）

A．$\frac{2}{3}$　　B．$\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{2}\pi}{3}$　　D．$\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$

3．"函数$y=\tan x$的图象关于$(x_0,0)$中心对称"是"$\sin x_0=0$"的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

4．若$(z-2\mathrm{i})(\bar{z}+2\mathrm{i})=1$，则$|z|$的最大值为（　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．2　　D．3

5．已知等差数列$\{a_n\}$和等比数列$\{b_n\}$均为递增数列，且$a_1=b_2=1$，$a_2=b_6$，若$a_k=b_{10}$，则k的最小值为（　）

A．3　　B．4　　C．5　　D．6

6．在$\triangle ABC$中，点P满足$2\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{PC}$，过点$P$的直线与$AB$，$AC$所在的直线分别交于点$M$，$N$，若$\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AN}=y\overrightarrow{AC}(x>0,y>0)$，则$2x+y$的最小值为（　）

A．3　　B．$3\sqrt{2}$　　C．1　　D．$\frac{1}{3}$

7．下图中的多边形均为正多边形，M，N是所在边的中点，双曲线均以F_1，F_2为焦点，且经过M，N两点．设图1，图2，图3中双曲线的离心率分别为e_1，e_2，e_3，则（　）

图1

图2

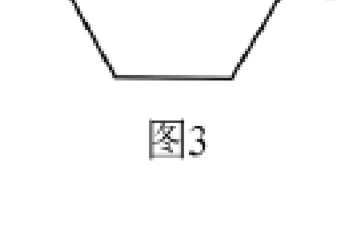


图3

A．$e_1>e_2>e_3$　　　B．$e_2>e_1>e_3$　　　C．$e_3>e_2>e_1$　　　D．$e_1>e_3>e_2$

8．已知函数$f(x)=\ln x+x^2-ax$有两个极值点m，n，且$m\in[1,2]$，则$f(m)-f(n)$的最大值为（　）

A．$\frac{2}{3}-\ln 2$　　　B．$\ln 2-\frac{2}{3}$　　　C．$\ln 2-\frac{3}{4}$　　　D．$\frac{3}{4}-\ln 2$

二、多选题

9．已知a，b，c为非零实数，且$a-b\ge 0$，则下列结论正确的有（　）

A．$a+c\ge b+c$　　　B．$-a\le -b$　　　C．$a^2\ge b^2$　　　D．$\frac{1}{ab^2}\ge\frac{1}{ba^2}$

10．设$\omega>0$，函数$f(x)=-\sqrt{3}\sin\omega x+\cos\omega x$在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$上有零点，则$\omega$的值可以是（　）

A．$\frac{1}{6}$　　　B．$\frac{5}{6}$　　　C．$\frac{1}{3}$　　　D．$\frac{2}{3}$

11．四边形$ABCD$是边长为2的正方形，E、F分别为BC、CD的中点，分别沿AE、AF及EF所在直线把$\triangle AEB$、$\triangle AFD$和$\triangle EFC$折起，使B、C、D三点重合于点P，得到三棱锥$P-AEF$，则下列结论中正确的有（　）.

A．三棱锥$P-AEF$的体积为$\frac{2}{3}$

B．平面$APF\perp$平面EPF

C．三棱锥中无公共端点的两条棱称为对棱，则三棱锥$P-AEF$中有三组对棱相互垂直

D．若M为AF的中点，则过点M的平面截三棱锥$P-AEF$的外接球，所得截面的面积的最小值为$\frac{5\pi}{4}$

12．已知实数$a>2$，$b>2$，且$a\ne b$，若$a^b=b^a$，则$a-b$可能等于（　）

A．0.5　　　B．1　　　C．2　　　D．3

三、填空题

13．同时将圆$x^2+y^2=1$和$x^2+y^2-2x-4y=0$的面积平分的直线的斜截式方程为________.

14．$C_5^1 0.998+C_5^2 0.998^2+C_5^3 0.998^3+C_5^4 0.998^4+C_5^5 0.998^5\approx$_______（精确到0.01）

15．已知定义$\mathbf{R}$上的函数$f(x)$满足$f(x)=f(6-x)+f(3)$，又$f(x+\pi)$的图象关于点$(-\pi,0)$对称，且$f(1)=2022$，则$f(2023)=$______

16．已知抛物线$C:y^2=4x$，点$P(1,2)$，A,B,M,N是抛物线C上的四个动点，过点P作

分别作AB，MN的垂线，垂足分别为E，F，$k_{PA}+k_{PB}=k_{PM}+k_{PN}=2$，则点$E$、$F$距离的最大值为__________.

四、解答题

17．记$\triangle ABC$的内角A,B,C 的对边分别为a,b,c，$2\sin A=\sin C+\sin(B-A)$.

(1)证明：$\cos A=\dfrac{a}{b}$；

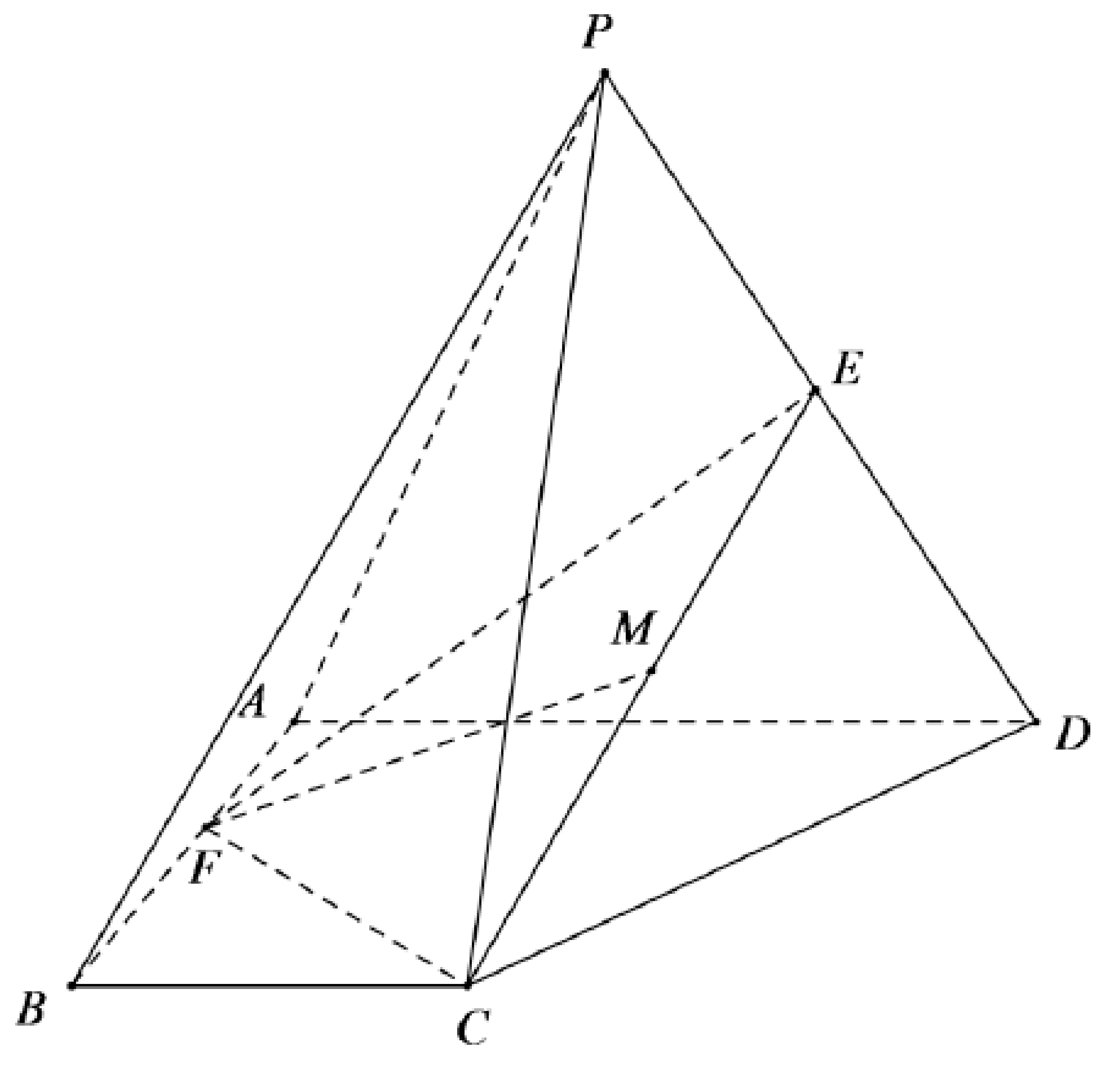
(2)若$b^2=ac$，求$\cos B$.

18．已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1,a_{n+1}=\dfrac{3-(-1)^n}{2}a_n+\dfrac{1+(-1)^n}{2}$.

(1)设$b_n=a_{2n-1}$，求数列$\{b_n\}$的通项公式；

(2)求数列$\{a_n\}$的前$2n$项和S_{2n}.

19．如图，在四棱锥$P-ABCD$中，侧面PAD为等边三角形且垂直于底面$ABCD$，$AD//BC$，$AB\perp AD$．$AB=2BC=4$，E是棱PD上的动点（除端点外），F,M分别为AB,CE的中点.

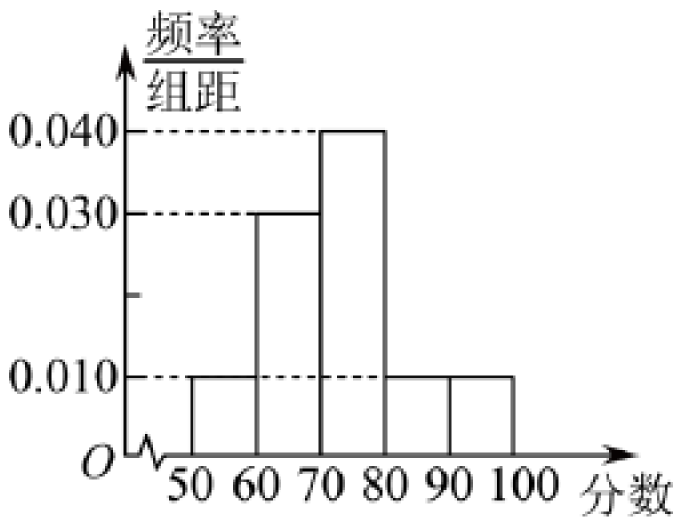


(1)求证：$FM//$平面PAD；

(2)若直线EF与平面PAD所成的最大角为30°，求平面CEF与平面PAD所成锐二面角的余弦值.

20．某中学在一次考试后，对本年级学生物理成绩进行分析，随机抽取了300名同学的物理

成绩（均在 50~100 分之间），将抽取的成绩分组为$[50,60)$，$[60,70)$，$[70,80)$，$[80,90)$，$[90,100]$，得到如图所示的频率分布直方图.



(1)求这 300 名同学物理平均成绩$\overline{x}$与第三四分位数的估计值；（结果精确到 1）

(2)已知全年级同学的物理成绩服从正态分布$N(\mu,\ \sigma^2)$，其中μ取（1）中的$\overline{x}$，经计算，$\sigma=11$，现从全年级随机选取一名同学的物理成绩，求该成绩在区间$(62,95)$的概率（结果精确到 0.1）；

(3)根据（2）的条件，用频率估计概率，现从全年级随机选取 n 名同学的物理成绩，若他们的成绩都在$(62,95)$的概率不低于 1%，求 n 的最大值（n 为整数）.

附：$\lg 2\approx 0.301$，若$\xi\sim N(\mu,\ \sigma^2)$，则$P(\mu-\sigma<\xi<\mu+\sigma)\approx 0.68$，

$P(\mu-2\sigma<\xi<\mu+2\sigma)\approx 0.96$.

21．已知椭圆$E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，过坐标原点$O$的直线交椭圆$E$于$P,A$两点，其中$P$在第一象限，过$P$作$x$轴的垂线，垂足为$C$，连接$AC$.当$C$为椭圆的右焦点时，$\triangle PAC$的面积为$\sqrt{2}$.

(1)求椭圆E的方程；

(2)若B为AC的延长线与椭圆E的交点，试问：$\angle APB$是否为定值，若是，求出这个定值；若不是，说明理由.

22．某大学有 A，B 两个餐厅为学生提供午餐与晚餐服务，甲、乙两位学生每天午餐和晚餐都在学校就餐，近 100 天选择餐厅就餐情况统计如下：

选择餐厅情况（午餐，晚餐）	(A,A)	(A,B)	(B,A)	(B,B)
甲	30 天	20 天	40 天	10 天

乙	20 天	25 天	15 天	40 天

假设甲、乙选择餐厅相互独立，用频率估计概率.

(1)分别估计一天中甲午餐和晚餐都选择 A 餐厅就餐的概率，乙午餐和晚餐都选择 B 餐厅就餐的概率；

(2)记 X 为甲、乙在一天中就餐餐厅的个数，求 X 的分布列和数学期望 $E\left(X\right)$；

(3)假设 M 表示事件“A 餐厅推出优惠套餐”，N 表示事件“某学生去 A 餐厅就餐”，$P\left(M\right)>0$，一般来说在推出优惠套餐的情况下学生去该餐厅就餐的概率会比不推出优惠套餐的情况下去该餐厅就餐的概率要大，证明：$P\left(M|N\right)>P\left(M|\bar{N}\right)$.

福建省南安名校 2023 届高三上学期 12 月月考

数学试题

一、单选题

1．已知集合 $A=\{x\in N|1<x<\log_2 k\}$，集合 A 中至少有 2 个元素，则（　）

A．$k\geq 16$　　B．$k>16$　　C．$k\geq 8$　　D．$k>8$

【答案】D

【分析】由于集合 A 中至少有 2 个元素，所以 $\log_2 k>3$,从而可求出 k 的取值范围

【详解】解：因为集合 A 中至少有 2 个元素，

所以 $\log_2 k>3$，解得 $k>8$，

故选：D

2．已知圆锥的轴截面是一个正三角形，则其侧面积与轴截面面积之比是（ ）

A．$\frac{2}{3}$　　B．$\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{2}\pi}{3}$　　D．$\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$

【答案】B

【分析】分别计算侧面积和面积作比即可.

【详解】设底面圆的半径为 r，则母线长为 $2r$，

得侧面积是 $\frac{1}{2}\times 2\pi r\times 2r=2\pi r^2$

轴截面是一个正三角形，边长为 $2r$，

则其面积 $\frac{1}{2}\times 2r\times 2r\times \sin 60^\circ=\sqrt{3}r^2$.

所以面积之比是 $\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$.

故选：B

3．“函数 $y=\tan x$ 的图象关于 $(x_0,0)$ 中心对称”是“$\sin x_0=0$”的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

【答案】B

【分析】分别求出 $y=\tan x$ 与 $y=\sin x$ 的对称中心，比较两个中心关系.

【详解】$y=\tan x$ 的对称中心为 $(\frac{k}{2}\pi,0),k\in Z$，$y=\sin x$ 的对称中心为 $(k\pi,0),k\in Z$，$y=\tan x$ 的对称中心不一定为 $y=\sin x$ 的对称中心；$y=\sin x$ 的对称中心一定为 $y=\tan x$ 的对称中心.

故选：B.

4．若 $\left(z-2i\right)\left(\bar{z}+2i\right)=1$，则 $|z|$ 的最大值为（　）

A．$\sqrt{2}$　　　　B．$\sqrt{3}$　　　　C．2　　　　D．3

【答案】D

【分析】根据题意结合共轭复数的概念运算整理的 $a^2+\left(b-2\right)^2=1$，即复数 z 对应的点 $\left(a\ \ b\right)$ 在圆 $x^2+\left(y-2\right)^2=1$ 上，根据圆的性质求 $|z|$ 的最大值.

【详解】设 $z=a+bi,\left(a,b\in R\right)$，则 $z-2i=a+\left(b-2\right)i,\bar{z}+2i=a-\left(b-2\right)i$

$\because \left(z-2i\right)\left(\bar{z}+2i\right)=\left[a+\left(b-2\right)i\right]\left[a-\left(b-2\right)i\right]=a^2+\left(b-2\right)^2=1$

$\therefore$ 复数 z 对应的点 $\left(a\ \ b\right)$ 在圆 $x^2+\left(y-2\right)^2=1$ 上

圆 $x^2+\left(y-2\right)^2=1$ 的圆心 $C\left(0,2\right)$，半径 $r=1$，则 $|z|$ 的最大值为 $|OC|+r=3$，其中 O 为复平面的坐标原点

故选:D.

5．已知等差数列 $\{a_n\}$ 和等比数列 $\{b_n\}$ 均为递增数列，且 $a_1=b_2=1$，$a_2=b_6$，若 $a_k=b_{10}$，则 k 的最小值为（　）

A．3　　　　B．4　　　　C．5　　　　D．6

【答案】B

【分析】由等差数列和等比数列的通项公式可得 $k=d+3$，由 $d>0$，即可得 k 的最小值.

【详解】设等差数列 $\{a_n\}$ 公差为　，等比数列 $\{b_n\}$ 公比为 q，

则 $d>0$，$q>1$，因为 $a_1=b_2=1$，$a_2=b_6$，

所以 $1+d=q^4$①，而 $a_k=b_{10}$，

所以 $1+(k-1)d=q^8$②，

由①②得：$(1+d)^2=1+(k-1)d$，

即 $k=d+3$，$d>0$，$k\in \mathbf{N}^*$，

所以k的最小值为4.

故选：B

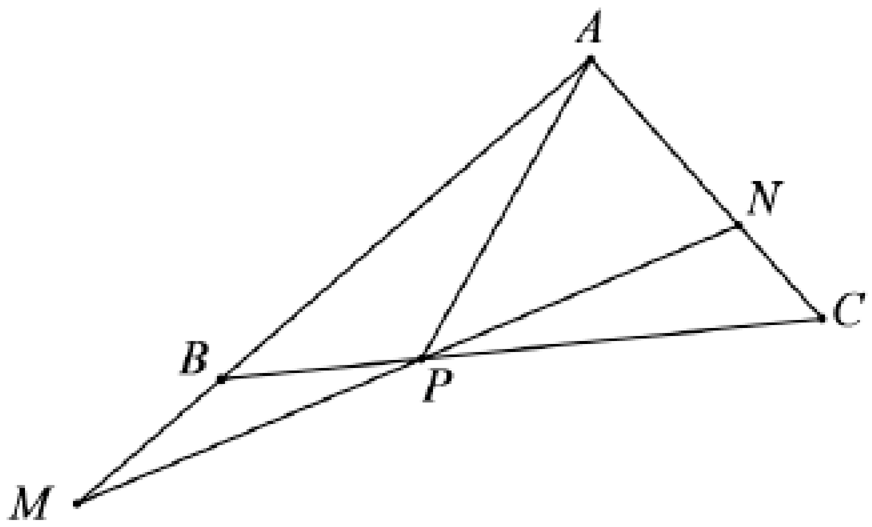
6．在$\triangle ABC$中，点P满足$2\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{PC}$，过点$P$的直线与$AB$，$AC$所在的直线分别交于点$M$，$N$，若$\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AN}=y\overrightarrow{AC}\left(x>0,y>0\right)$，则$2x+y$的最小值为（　　）

A．3　　　　B．$3\sqrt{2}$　　　　C．1　　　　D．$\frac{1}{3}$

【答案】A

【分析】由向量加减的几何意义可得$\overrightarrow{AP}=\frac{2\overrightarrow{AB}}{3}+\frac{\overrightarrow{AC}}{3}$，结合已知有$\overrightarrow{AP}=\frac{2\overrightarrow{AM}}{3x}+\frac{\overrightarrow{AN}}{3y}$，根据三点共线知$\frac{2}{3x}+\frac{1}{3y}=1$，应用基本不等式“1”的代换即可求最值，注意等号成立的条件.

【详解】由题设，如下图示：$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AB}+\frac{\overrightarrow{BC}}{3}=\overrightarrow{AB}+\frac{\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}}{3}=\frac{2\overrightarrow{AB}}{3}+\frac{\overrightarrow{AC}}{3}$，又$\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AN}=y\overrightarrow{AC}\left(x>0,y>0\right)$，



$\therefore\overrightarrow{AP}=\frac{2\overrightarrow{AM}}{3x}+\frac{\overrightarrow{AN}}{3y}$，由$M,P,N$三点共线，有$\frac{2}{3x}+\frac{1}{3y}=1$，

$\therefore 2x+y=(2x+y)(\frac{2}{3x}+\frac{1}{3y})=\frac{5}{3}+\frac{2x}{3y}+\frac{2y}{3x}\ge\frac{5}{3}+2\sqrt{\frac{2x}{3y}\cdot\frac{2y}{3x}}=3$，当且仅当$x=y$时等号成立.

故选：A

【点睛】关键点点睛：利用向量线性运算的几何表示，得到$\overrightarrow{AP}$、$\overrightarrow{AM}$、$\overrightarrow{AN}$的线性关系，根据三点共线有$\frac{2}{3x}+\frac{1}{3y}=1$，再结合基本不等式求最值.

7．下图中的多边形均为正多边形，M，N是所在边的中点，双曲线均以F_1，F_2为焦点，且经过M，N两点．设图1，图2，图3中双曲线的离心率分别为e_1，e_2，e_3，则（　　）

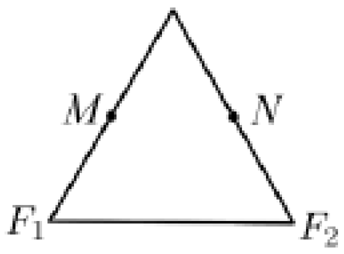


图1

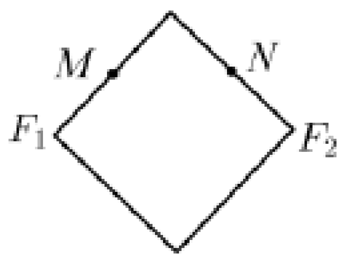


图2

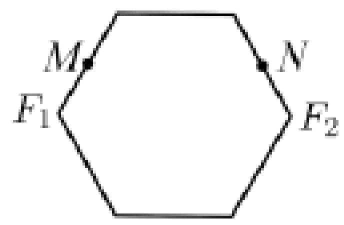


图3

A．$e_1 > e_2 > e_3$　　B．$e_2 > e_1 > e_3$　　C．$e_3 > e_2 > e_1$　　D．$e_1 > e_3 > e_2$

【答案】A

【分析】由双曲线定义有$|F_1F_2| = 2c$、$|F_1N| - |F_2N| = 2a$，结合正多边形的性质求得$|F_1N| - |F_2N|$关于c的表达式，即可求各图对应双曲线的离心率.

【详解】在图 1 中，$|F_1F_2| = 2c$，又$|F_1N| - |F_2N| = 2a = (\sqrt{3}-1)c$，则$e_1 = \dfrac{4}{2\sqrt{3}-2}$.

在图 2 中，$|F_1F_2| = 2c$，$|F_1N| = \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}c\right)^2 + (\sqrt{2}c)^2} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}c$，$|F_2N| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}c$，

$|F_1N| - |F_2N| = 2a = \dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}c$，则$e_2 = \dfrac{4}{\sqrt{10}-\sqrt{2}}$.

在图 3 中，$|F_1F_2| = 2c$，$|F_2N| = \dfrac{1}{2}c$，

由余弦定理得：$|F_1N| = \sqrt{|F_1F_2|^2 + |F_2N|^2 - 2|F_1F_2||F_2N|\cos 60^\circ} = \dfrac{\sqrt{13}}{2}c$，

$|F_1N| - |F_2N| = 2a = \dfrac{\sqrt{13}-1}{2}c$，则$e_3 = \dfrac{4}{\sqrt{13}-1}$.

因为$2\sqrt{3}-2 < \sqrt{10}-\sqrt{2} < \sqrt{13}-1$，所以$e_1 > e_2 > e_3$.

故选：A

8．已知函数$f(x) = \ln x + x^2 - ax$有两个极值点m，n，且$m \in [1,2]$，则$f(m) - f(n)$的最大值为（　）

A．$\dfrac{2}{3} - \ln 2$　　B．$\ln 2 - \dfrac{2}{3}$　　C．$\ln 2 - \dfrac{3}{4}$　　D．$\dfrac{3}{4} - \ln 2$

【答案】C

【分析】对$f(x)$求导得$f'(x)$，得到m，n是$2x^2 - ax + 1 = 0$两个根，由根与系数的关系可得m，n的关系，然后构造函数，利用导数求单调性，进而得最值.

【详解】由$f(x) = \ln x + x^2 - ax$得：$f'(x) = \dfrac{1}{x} + 2x - a = \dfrac{2x^2 - ax + 1}{x}$

m，n是$2x^2 - ax + 1 = 0$两个根，由根与系数的关系得：$m + n = \dfrac{a}{2}, mn = \dfrac{1}{2}$，故$n = \dfrac{1}{2m}$

$f(m)-f(n)=\ln m+m^2-am-\ln n-n^2+an=\ln\frac{m}{n}-m^2+n^2=\ln 2m^2+\frac{1}{4m^2}-m^2$，

令 $x=m^2,x\in[1,4]$

记 $g(x)=\ln 2x+\frac{1}{4x}-x,x\in[1,4]$，则 $g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{4x^2}-1=\frac{4x-1-4x^2}{4x^2}=\frac{-(2x-1)^2}{4x^2}<0$，故 $g(x)$

在 $x\in[1,4]$ 上单调递减.

$g(x)_{\max}=g(1)=\ln 2-\frac{3}{4}$

故选：C

二、多选题

9．已知 a，b，c 为非零实数，且 $a-b\geq 0$，则下列结论正确的有（　）

A．$a+c\geq b+c$　　　B．$-a\leq -b$　　　C．$a^2\geq b^2$　　　D．$\frac{1}{ab^2}\geq\frac{1}{ba^2}$

【答案】ABD

【解析】根据不等式的性质判断，错误的命题可举反例.

【详解】因为 $a-b\geq 0$，所以 $a\geq b$.根据不等式的性质可知 A，B 正确；

因为 a，b 的符号不确定，所以 C 不正确；

$\frac{1}{ab^2}-\frac{1}{ba^2}=\frac{a-b}{a^2b^2}\geq 0$.

可得 $\frac{1}{ab^2}\geq\frac{1}{ba^2}$，所以 D 正确.

故选：ABD.

【点睛】本题考查不等式的性质，掌握不等式的性质是解题关键.

10．设 $\omega>0$，函数 $f(x)=-\sqrt{3}\sin\omega x+\cos\omega x$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上有零点，则 ω 的值可以是（　）

A．$\frac{1}{6}$　　　B．$\frac{5}{6}$　　　C．$\frac{1}{3}$　　　D．$\frac{2}{3}$

【答案】BCD

【分析】由题得 $f(x)=-2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)$，令 $\omega x-\frac{\pi}{6}=k\pi$，求出 $x=\frac{\pi}{6\omega}+\frac{k\pi}{\omega}$，解不等式 $0<\frac{\pi}{6\omega}\leqslant\frac{\pi}{2}$ 得解.

【详解】由题得 $f(x)=-\sqrt{3}\sin\omega x+\cos\omega x=-2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)$，

令 $\omega x-\frac{\pi}{6}=k\pi$ ，解得 $x=\frac{\pi}{6\omega}+\frac{k\pi}{\omega}$,$\because\omega>0$，取 $k=0$，

$\therefore 0<\frac{\pi}{6\omega}\leqslant\frac{\pi}{2}$，即 $\omega\geqslant\frac{1}{3}$.

故选：BCD

11．四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，E、F 分别为 BC 、CD 的中点，分别沿 AE 、AF 及 EF 所在直线把 $\triangle AEB$ 、$\triangle AFD$ 和 $\triangle EFC$ 折起，使 B、C、D 三点重合于点 P，得到三棱锥 $P-AEF$ ，则下列结论中正确的有（　 ）.

A．三棱锥 $P-AEF$ 的体积为 $\frac{2}{3}$

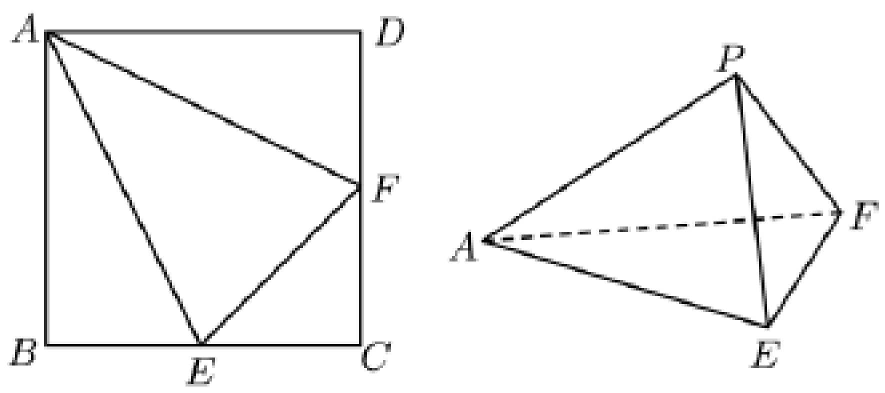
B．平面 $APF\perp$ 平面 EPF

C．三棱锥中无公共端点的两条棱称为对棱，则三棱锥 $P-AEF$ 中有三组对棱相互垂直

D．若 M 为 AF 的中点，则过点 M 的平面截三棱锥 $P-AEF$ 的外接球，所得截面的面积的最小值为 $\frac{5\pi}{4}$

【答案】BCD

【分析】由条件结合线面垂直判定定理证明 $PA\perp$ 平面 EFP ，根据面面垂直判定定理证明平面 $APF\perp$ 平面 EPF ，判断 B，根据锥体体积公式求三棱锥 $P-AEF$ 的体积判断 A，由线面垂直的性质判断 C，由球的截面的性质判断 D.



【详解】

由已知 $AE=AF=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$， $EF=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，

翻折前 $AB\perp BE$， $CE\perp CF$， $AD\perp DF$，

翻折后，则有 $PA\perp PE$， $PA\perp PF$， $PE\perp PF$，

因为 $PA\perp PE$， $PA\perp PF$， $PE\cap PF=P$， $PE,PF\subset$ 平面 EFP，

所以 $PA\perp$ 平面 EFP，

因为 $PA\perp$ 平面 EFP， $PE\perp PF$，又 $PE=PF=1$， $PA=2$，所以

$V_{P-AEF}=V_{A-EFP}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle EFP}\times AP=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2=\frac{1}{3}$，A 错误，

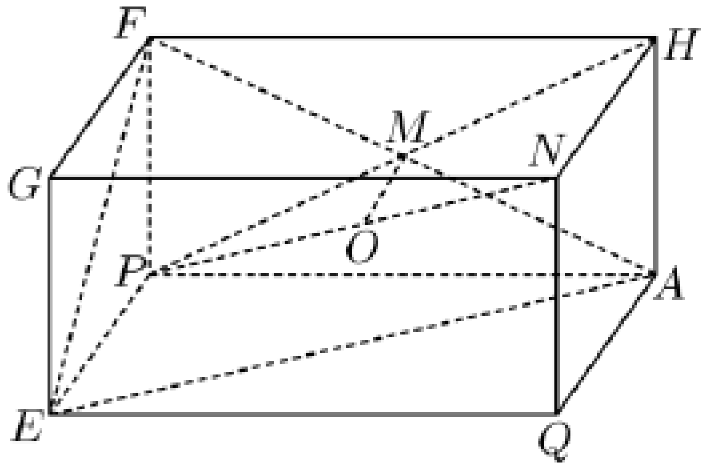
因为 $PA\perp$ 平面 EFP，又 $PA\subset$ 平面 APF，所以平面 $APF\perp$ 平面 EPF，B 正确，

因为 $PA\perp$ 平面 EFP， $EF\subset$ 平面 EFP，所以 $PA\perp EF$，

因为 $PA\perp PF$， $PE\perp PF$， $PA\cap PE=P$， $PE,PA\subset$ 平面 PAE，

所以 $PF\perp$ 平面 PAE，又 $AE\subset$ 平面 PAE，所以 $PF\perp AE$， 同理可证 $PE\perp AF$，所以三棱锥 $P-AEF$ 中有三组对棱相互垂直，C 正确，

将三棱锥 $P-AEF$ 补成长方体 $PEQA-FGNH$，



则三棱锥 $P-AEF$ 的外接球球心 O 为体对角线 PN 的中点，

且 $PN=\sqrt{PE^2+PF^2+PA^2}=\sqrt{6}$，即球 O 的半径为 $R=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，

所以，过点 M 的平面截三棱锥 $P-AEF$ 的外接球所得截面圆的半径设为 r，

设球心 O 到截面圆的距离为 ，则 $0\le d\le OM$，

$\because O$、M 分别为 PN、PH 的中点，则 $OM=\dfrac{1}{2}HN=\dfrac{1}{2}$，

则 $0\le d\le\dfrac{1}{2}$，又 $r=\sqrt{R^2-d^2}$，所以当 $d=\dfrac{1}{2}$ 时，r^2 取最小值 $\dfrac{5}{4}$，所以过点 M 的平面截三棱锥 $P-AEF$ 的外接球，所得截面的面积的最小值为 $\dfrac{5\pi}{4}$，D 正确，

故选：BCD.

12．已知实数 $a>2$，$b>2$，且 $a\neq b$，若 $a^b=b^a$，则 $a-b$ 可能等于（　）

A．0.5　　B．1　　C．2　　D．3

【答案】AB

【分析】问题可转化为 a,b 是 $f\left(x\right)=\dfrac{\ln x}{x}$ 大于 2 的两个不同零点，利用导数研究单调性并作出图象，结合图象即可求解

【详解】因为实数 $a>2$，$b>2$，且 $a\neq b$，若 $a^b=b^a$，

所以 $\ln a^b=\ln b^a$，即 $b\ln a=a\ln b$，

所以 $\dfrac{\ln a}{a}=\dfrac{\ln b}{b}$，

令 $f\left(x\right)=\dfrac{\ln x}{x}$，