第二节 常数项级数的审敛法

（ Interrogate of constant term series ）

一、正项级数及其审敛法

(Interrogate of positive term series)

若 $u_n \geq 0$, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数 .

定理 1 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ 部分和序列 $\{s_n\}$ 有界 .

证: " $\Longrightarrow$ " 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 , 则 $\{S_n\}$ 收敛, 故有界.

" $\Longleftarrow$ " $\because u_n \geq 0$, $\therefore$ 部分和数列 $\{S_n\}$ 单调递增,

又已知 $\{S_n\}$ 有界, 故 $\{S_n\}$ 收敛 , 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.

定理2 (比较审敛法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是两个正项级数, 且存在 $N \in Z^+$, 对一切 $n > N$, 有 $u_n \le k\, v_n$ (常数 $k > 0$), 则有

(1) 若强级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则弱级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

(2) 若弱级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则强级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

证: 因在级数前加、减有限项不改变其敛散性, 故不妨设对一切 $n \in Z^+$, 都有 $u_n \le k\, v_n$, 令 S_n 和 σ_n 分别表示弱级数和强级数的部分和, 则有 $S_n \le k\, \sigma_n$

(1) 若强级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则有 $\sigma = \lim_{n\to\infty} \sigma_n$

因此对一切 $n \in Z^+$, 有 $S_n \le k\sigma$

由定理 1 可知, 弱级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛 .

(2) 若弱级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则有 $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$,

因此 $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \infty$, 这说明强级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散 .

定理3 (比较审敛法的极限形式)

设两正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 满足 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$, 则有

(1) 当 $0 < l < +\infty$ 时, 两个级数同时收敛或发散；

(2) 当 $l = 0$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

(3) 当 $l = +\infty$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散.

证: 据极限定义, 对 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in Z^+$, 当 $n > N$ 时,

$$\left| \frac{u_n}{v_n} - l \right| < \varepsilon \quad (l \neq \infty)$$

$$(l-\varepsilon)v_n \le u_n \le (l+\varepsilon)v_n \qquad (n>N)$$

(1) 当$0<l<\infty$时，取$\varepsilon<l$，由定理 2 可知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同时收敛或同时发散；

(2) 当$l=0$时，利用 $u_n<(l+\varepsilon)v_n \ (n>N)$，由定理2 知若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；

(3) 当$l=\infty$时，存在 $N\in Z^+$，当$n>N$时，$\dfrac{u_n}{v_n}>1$，即

$$u_n>v_n$$

由定理2可知，若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散.