高二—人教A版—数学—选择性必修第一册—第二章

2.3.3 点到直线的距离公式

一、学习目标

1．了解点到直线的距离公式的推导方法；

2．掌握点到直线的距离公式并会应用；

3．通过点到直线的距离公式的探索和推导过程，培养运用等价转化、数形结合等数学方法解决问题的能力，以及数学抽象、逻辑推理、直观想象和数学运算的数学学科素养.

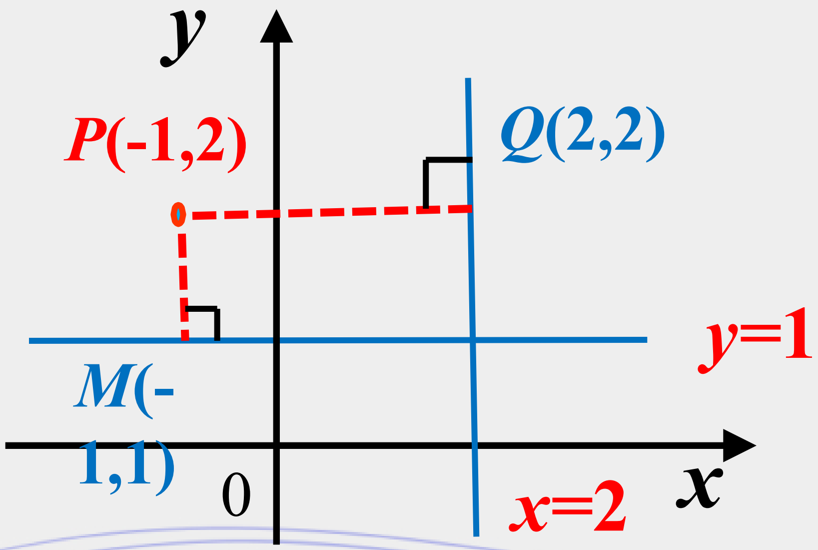
二、点到直线的距离公式——引入

试一试： （1）点$P(-1, 2)$到直线$x=2$的距离是______.

（2）点$P(-1, 2)$到直线$y=1$的距离是______.

问：通过作图，你能作出点P到直线l的距离吗？

点P到直线l的距离，就是P到直线l的垂线段PQ的长度，其中Q为垂足.



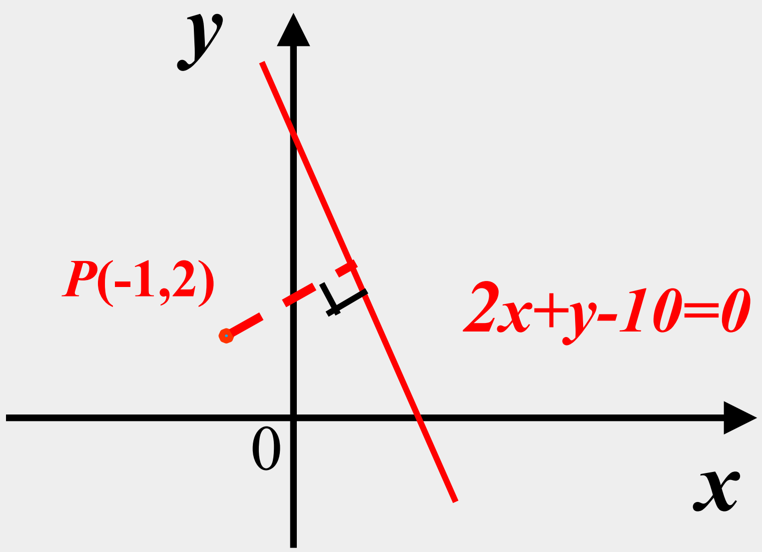
二、点到直线的距离公式——引入

试一试：（3）点$P(-1,2)$到直线$2x+y-10=0$的距离是________.

思 考：

1、本题能快速看出垂线段的长度吗？

2、是否能像求两点距离一样，有点到线的距离公式呢？



三、点到直线的距离公式——探究

探究：如图，已知点$P(x_0, y_0)$，直线$l: Ax+By+C=0$，如何求点P到直线l的距离呢？

点P到直线l的距离，即垂线段长度$|PQ|$

⬆

问：怎么求PQ的长度呢？

通过两点间距离公式

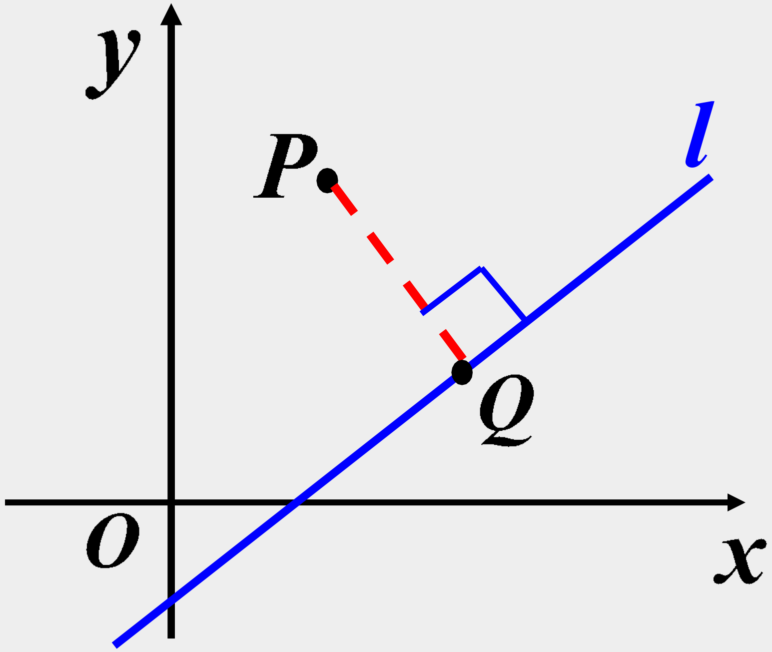
⬆

问：点Q坐标怎么求？

通过联立两直线方程求交点Q

⬆

求直线PQ方程



三、点到直线的距离公式——推导

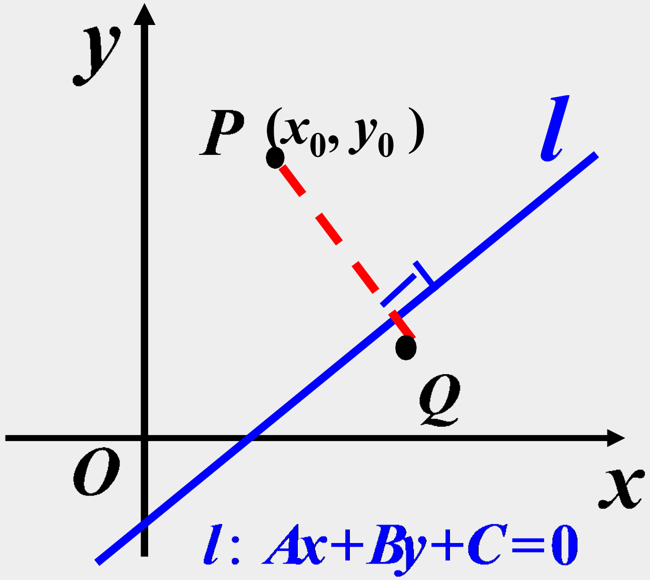
问：求直线方程，需要几个条件？　2个条件，两点或者一点一斜（斜率或倾斜角）

☞ **直线PQ 过点$P(x_0, y_0)$，且与直线l垂直.**

(1) 当 $A \neq 0$，$B \neq 0$,则直线 l 的斜率为 $-\dfrac{A}{B}$，又由 $PQ \perp l$,，可得

垂线 PQ 的斜率为 $\dfrac{B}{A}$，因此，垂线 PQ 的方程为 $y - y_0 = \dfrac{B}{A}(x - x_0)$，

即 $Bx - Ay = Bx_0 - Ay_0$.



(2)当A、B中有一个为0时，如A=0，B≠0 时，直线l ：$By+C=0$，

此时PQ方程为$x= x_0$.当B=0，A≠0时，PQ方程为$y= y_0$.

综上所述PQ方程为：$Bx- Ay = B x_0 -A y_0$

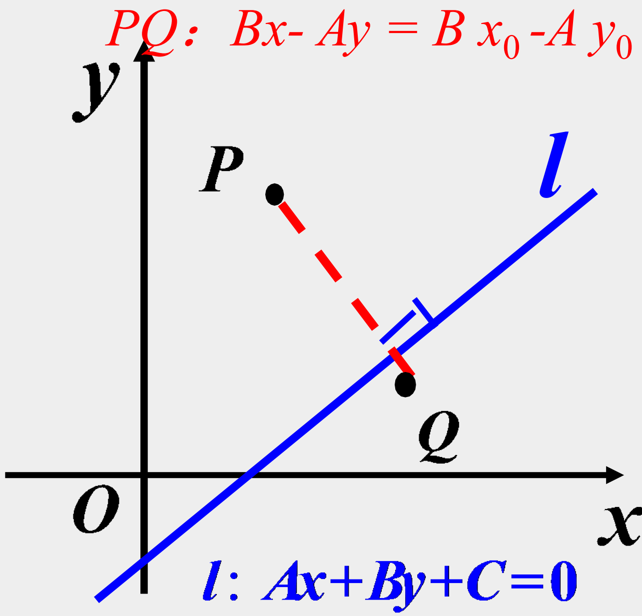
三、点到直线的距离公式——推导

解方程组$\begin{cases} Ax+By+C=0 \\ Bx-Ay=Bx_0-Ay_0 \end{cases}$，得直线 l 与 PQ 的交点坐标，

即垂足 Q 的坐标为$\left(\dfrac{B^2x_0-ABy_0-AC}{A^2+B^2},\dfrac{-ABx_0+A^2y_0-BC}{A^2+B^2}\right)$.

$$\text{于是}|PQ|=\sqrt{\left(\frac{B^2x_0-ABy_0-AC}{A^2+B^2}-x_0\right)^2+\left(\frac{-ABx_0+A^2y_0-BC}{A^2+B^2}-y_0\right)^2}$$

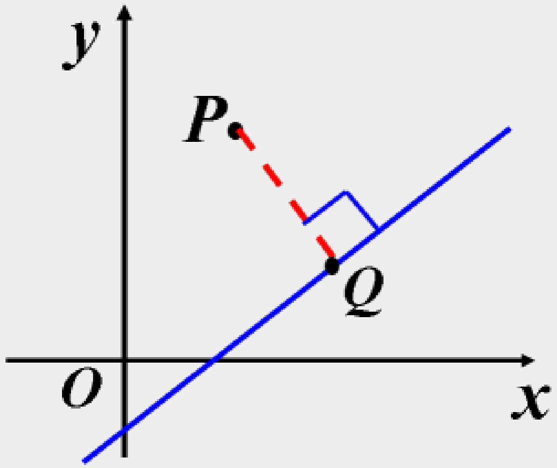
$$=\sqrt{\frac{(Ax_0+By_0+C)^2}{A^2+B^2}}=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$



三、点到直线的距离公式

点$P(x_0，y_0)$到直线l：$Ax+By+C=0$的距离为：

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$



公式结构特征：

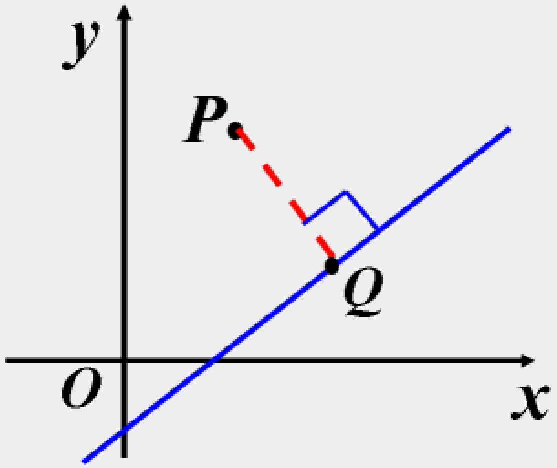
1、分子：将点坐标代入直线方程中，外套绝对值；

2、分母：根号下A^2+B^2

三、点到直线的距离公式

点$P_0(x_0，y_0)$到直线l：$Ax+By+C=0$的距离为：

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$



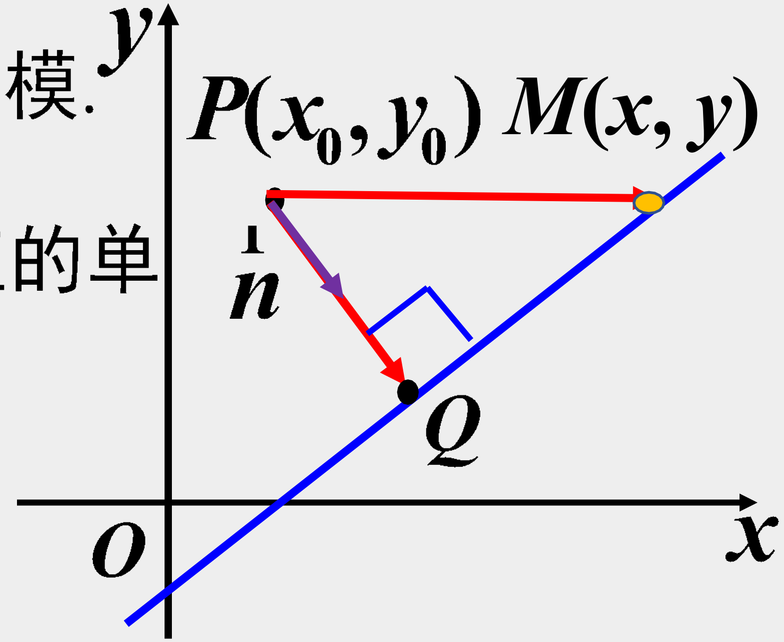
思考：上述方法中，我们根据点到直线距离的定义，将点到直线的距离化为两点之间的距离，思路自然但运算量大. 你能想到其它方法吗？

探究：我们知道，向量是解决距离、角度问题的有力工具，能否用向量方法求点到直线的距离？

如图，点 P 到直线 l 的距离，就是向量 $\overrightarrow{PQ}$ 的模.

设 $M(x,y)$ 是直线 l 上的任意一点，$\boldsymbol{n}$ 是与 l 垂直的单位向量，则 $\overrightarrow{PQ}$ 是 $\overrightarrow{PM}$ 在 $\boldsymbol{n}$ 上的投影向量，

则 $|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{PM}\cdot\boldsymbol{n}|$.



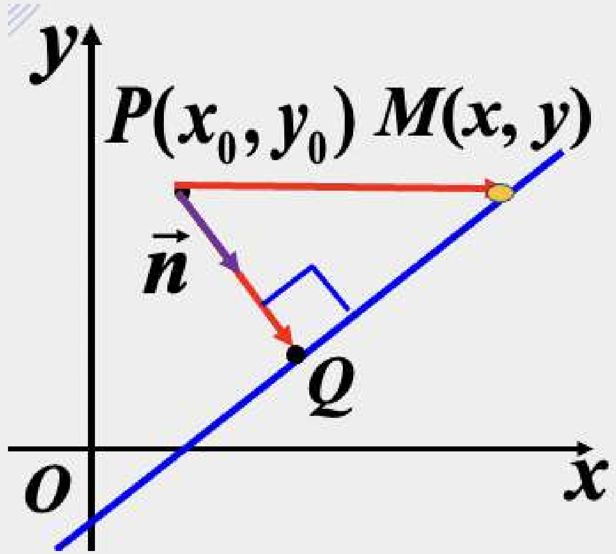
思考：如何利用直线l的方程得到与l的方向向量垂直的单位向量$\vec{n}$？

设$P_1(x_1,y_1)$， $P_2(x_2,y_2)$是直线 l 上的任意两点，

则$\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$是直线 l 的方向向量，

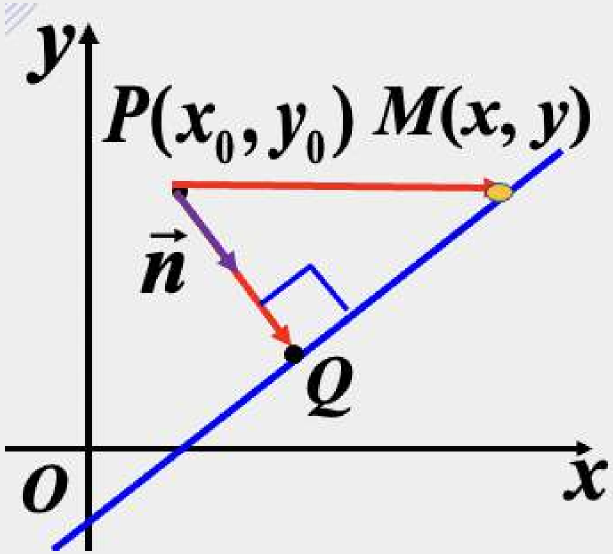
把$Ax_1+By_1+C=0$， $Ax_2+By_2+C=0$两式相减，得

$$A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)=0.$$



由平面向量的数量积运算可知，向量(A,B)与向量(x_2-x_1,y_2-y_1)垂直.

我们可取 $\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}(A,B)$



从而 $\overrightarrow{PM}\cdot\boldsymbol{n}=\left(x-x_0,y-y_0\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}(A,B)$

$$=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}\left[A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)\right]$$

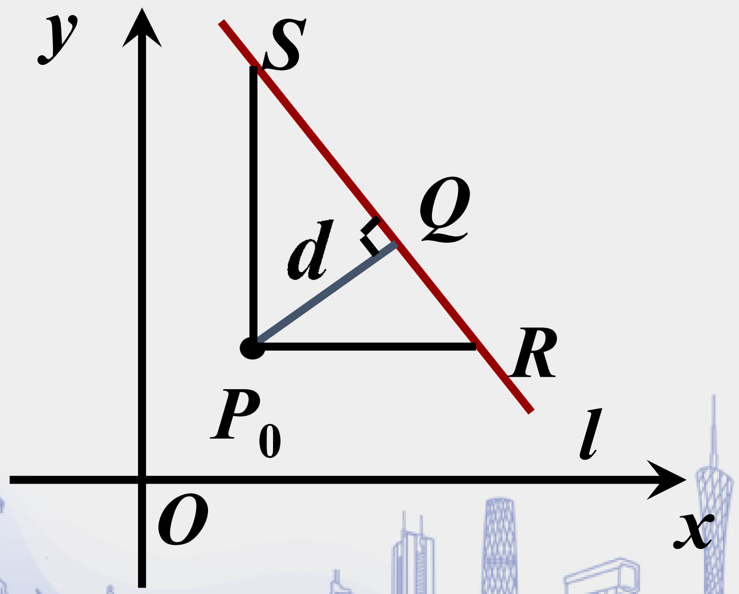
$$=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}\left(Ax+By-Ax_0-By_0\right).$$

因为点 $M(x,y)$ 在直线 l 上，所以 $Ax+By+C=0$.所以 $Ax+By=-C$.

代入上式，因此 $|PQ|=|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{PM}\cdot\boldsymbol{n}|=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

思考：比较上述两种方法，第一种方法从定义出发，把问题转化为求两点间的距离，通过代数运算得到结果，思路自然；第二种方法利用向量投影，通过向量运算求出结果，简化了运算.

除了上述两种方法，你还有其他推导方法吗?



构造三角形，利用等面积法求高，即点到直线的距离d.

$$d \cdot |RS| = |P_0R| \cdot |P_0S|.$$

只需求出点S、R坐标.

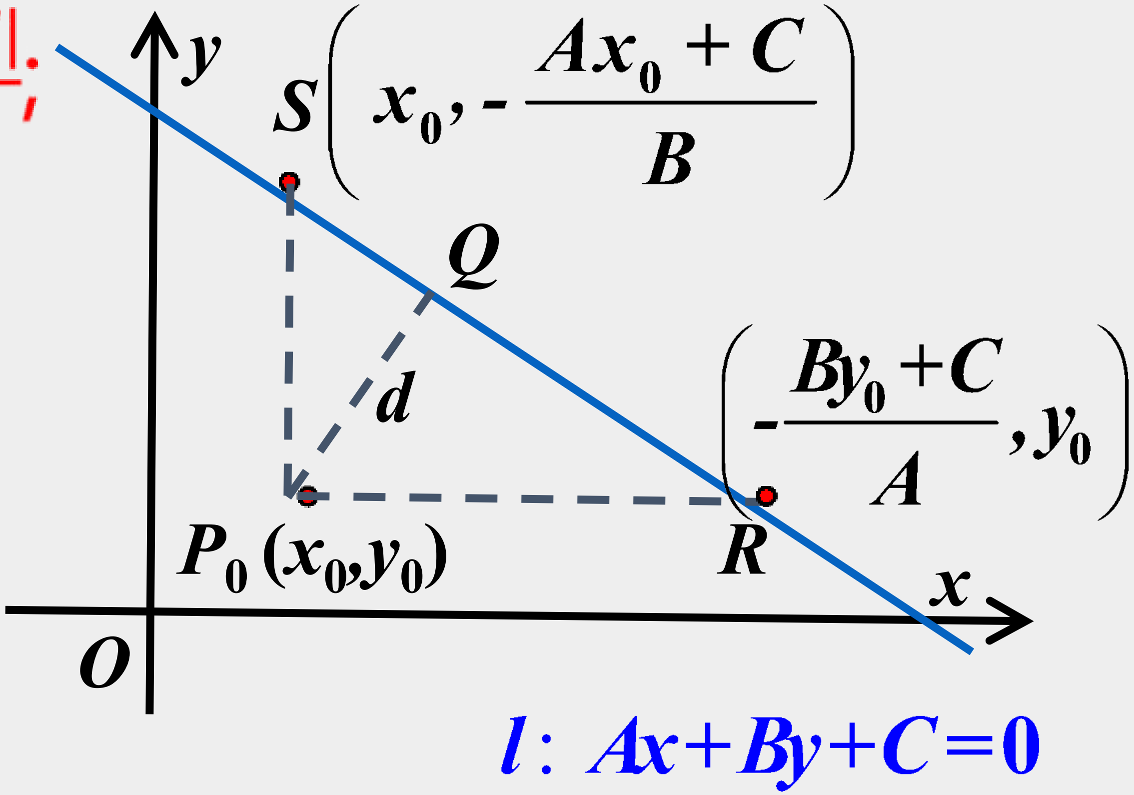
$$|P_0R| = \left|-\frac{By_0 + C}{A} - x_0\right| = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{|A|};$$

$$|P_0S| = \left|-\frac{Ax_0 + C}{B} - y_0\right| = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{|B|};$$

$$|RS| = \sqrt{|P_0R|^2 + |P_0S|^2}$$

勾股定理

$$= \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{|A||B|} \cdot |Ax_0 + By_0 + C|.$$



于是得$d = \frac{|P_0R|\cdot|P_0S|}{|RS|} = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

等面积法

五、典型例题

例题1　求点$P(-1,2)$到下列直线的距离.

$(1)2x+y-10=0$;　　　$(2)3x=2$.

解: (1) 根据点到直线的距离公式，得

$$d=\frac{|2\times(-1)+2-10|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}.$$

五、典型例题

例题1 求点$P(-1,2)$到下列直线的距离.

$$(1)2x+y-10=0; \qquad (2)3x=2.$$

解：（2）根据点到直线的距离公式得 $d=\dfrac{|3\times(-1)+2|}{\sqrt{3^2+0^2}}=\dfrac{1}{3}$.

思考：观察直线方程，有其它方法吗？

如右图，看图可知，$d=\dfrac{5}{3}$

思考：用距离公式得出答案不同，哪里出错了？