2024中考数学新定义及探究题专题 《三角函数及新定义（一）》 （学生版）

【知识储备】

模型1、新定义模型

此类模型主要包含高中数学中的三角函数和解三角形的相关定理（公式），而这些定理（公式）也可利用初中数学知识证明。

若无特殊说明，一般认为△ABC的3个角∠A、∠B、∠C，分别对应边a、b、c；

1）正弦定理：如图1，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$（其中$R$是三角形外接圆的半径）。

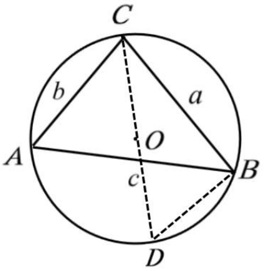


图1

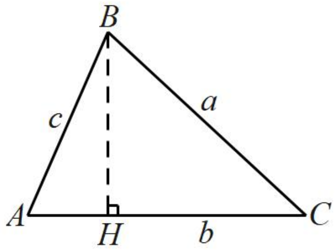


图2

2）余弦定理：如图2，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$　　$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

3）正弦面积公式：如图2，$S_{\Delta}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ac\sin B$.

4）同角三角函数的基本关系式: $sin^2\theta+cos^2\theta=1$，$tan\theta=\dfrac{sin\theta}{cos\theta}$。

5）和（差）、二倍角角公式：

$sin(\alpha\pm\beta)=sin\alpha cos\beta\pm cos\alpha sin\beta$；　　$sin2\alpha=2sin\alpha cos\alpha$.

$cos(\alpha\pm\beta)=cos\alpha cos\beta\quad sin\alpha sin\beta$；

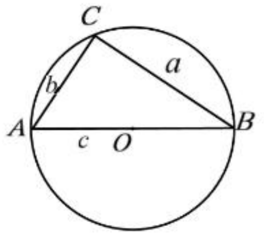
$cos2\alpha=cos^2\alpha-sin^2\alpha=2cos^2\alpha-1=1-2sin^2\alpha$.

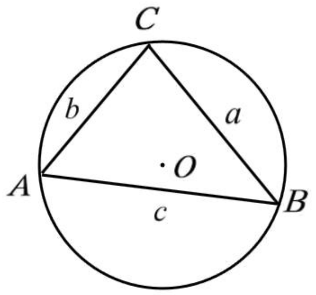
$tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{tan\alpha\pm tan\beta}{1\quad tan\alpha tan\beta}$　　$tan2\alpha=\dfrac{2tan\alpha}{1-tan^2\alpha}$.

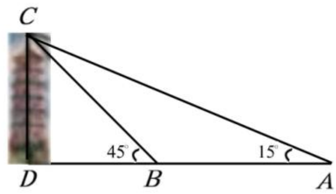
例1．（2023·福建厦门·统考模拟预测）阅读理解：如图，$Rt\quad ABC$中，a，b，c分别是$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$的对边，$\angle C=90°$，其外接圆半径为R·根据锐角三角函数的定义：$\sin A=\dfrac{a}{c}$，$\sin B=\dfrac{b}{c}$，可得$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$，即：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$，（规定$\sin 90°=1$）.

探究活动：如图，在锐角 ABC 中，a，b，c 分别是 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的对边，其外接圆半径为 R，试证明：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$.

学以致用：如图，在某次数学活动中，小凤同学测量一古塔 CD 的高度，在A处用测角仪测得塔顶 C 的仰角为 15°，又沿古塔的方向前行了 100m 到达 B 处，此时A，B，D 三点在一条直线上，在 B 处测得塔顶 C 的仰角为 45°，求古塔 CD 的高度（结果保留小数点后一位）.（$\sqrt{3}\approx 1.732$，$\sin 15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$）







例 2.（2023 秋·广东九年级课时练习）我们知道，直角三角形的边角关系可用三角函数来描述，那么在任意三角形中，边角之间是否也存在某种关系呢？（已知 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$）

如图，锐角 ABC 中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 所对的边分别为 a、b、c，过点 C 作 $CD\perp AB$，

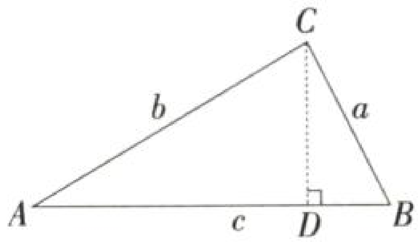
在 Rt ADC 中，$CD=b\sin A, AD=b\cos A$，$\therefore BD=c-b\cos A$，

在 Rt BDC 中，由勾股定理得 $BD^2+CD^2=BC^2$，即 $(c-b\cos A)^2+(b\sin A)^2=a^2$，

整理可得：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，同理可得：$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B, c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

利用上述结论解答下列问题：(1) 在 ABC 中，$\angle A=45^\circ, b=2\sqrt{2}, c=2$，求 a 和 $\angle C$ 的大小；

（2）在 ABC 中，$a=\sqrt{3}, b=\sqrt{2}, \angle B=45^\circ$，其中 $c>a>b$，求边长 c 的长度.



例 3．（2023 秋·重庆九龙坡·九年级统考期末）问题：阅读下面材料，解决后面的问题：

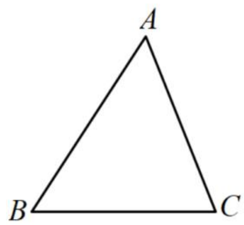
我们知道，三角形的面积等于二分之一底乘高，在学习了三角函数后，还可以这样求三角形的面积：对 ABC，a，b，c 分别为$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$的对边，则其面积

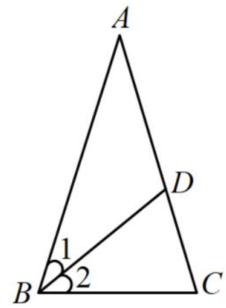
$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B$$

(1)在 ABC 中，$\angle A=30°$，$b=2$，$c=3$，求 b 边对应的高的长度．

(2)如图，在 ABC 中，已知 $AB=2$，$BC=1$，D 为 BC 上一点，证明：$BD=\dfrac{2\sin(\angle 1+\angle 2)}{2\sin\angle 1+\sin\angle 2}$．

(3)正数 a，b，c，d，e，f 满足 $a+b=c+d=e+f=1$，证明：$af+bc+de<1$．





例 4．（2022 春·辽宁沈阳·九年级校考开学考试）设一个三角形的三边长分别为a，b，c，$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，则有下面的面积公式

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$（海伦公式）

$S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[a^2b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2\right]}$（秦九韶公式）

若一个三角形的三边长依次为 5，6，7，则这个三角形的面积为________（可以直接利用上面的面积公式）

例 5．（2022 秋·湖南永州·九年级校考阶段练习）关于三角函数有如下公式：

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$，$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$，$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$（其中：$1-\tan\alpha\tan\beta\neq 0$）

例如：$\sin 90°=\sin(30°+60°)=\sin 30°\cos 60°+\cos 30°\sin 60°=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=1$．利用上述公式计算下列三角函数：①$\sin 105°=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，②$\sin 15°=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，③$\cos 90°=0$， ④ $\sin 15°+\tan 105° = 2-2\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

其中正确的个数为（　　）

A．1　　　　　　B．2　　　　　　C．3　　　　　　D．4

例 6．（2022 春·浙江·九年级专题练习）1.某数学兴趣小组在探究如何求 tan15°的值，经过思考、讨论、交流，得到以下思路：

思路一　如图 1，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C$=90°，$\angle ABC$=30°，延长 CB 至点 D，使 $BD=BA$，连接 AD．设 AC=1，则 $BD=BA$=2，$BC=\sqrt{3}$，tan$D$=tan15°=$\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}=\dfrac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=2-\sqrt{3}$．

思路二　利用科普书上的和（差）角正切公式：tan（$\alpha\pm\beta$）=$\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\quad\tan\alpha\tan\beta}$．假设$\alpha$=60°，$\beta$=45°代入差角正切公式：tan15°=tan（60°－45°）=$\dfrac{\tan 60^{\circ}-\tan 45^{\circ}}{1+\tan 60^{\circ}\tan 45^{\circ}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}$　$=2-\sqrt{3}$．

请解决下列问题（上述思路仅供参考）．(1)类比：求出 tan75°的值；(2)应用：如图 2，某电视塔建在一座小山上，山高 BC 为 30 米，在地平面上有一点 A，测得 A，C 两点间距离为 60 米，从 A 测得电视塔的视角（$\angle CAD$）为 45°，求这座电视塔 CD 的高度．

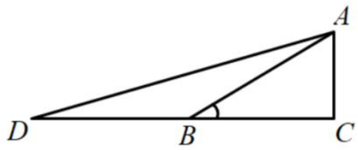


图1

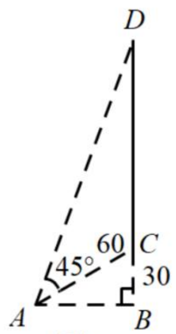


图2

例 7．（2022·山东济南·统考模拟预测）通过学习三角函数，我们知道在直角三角形中，一个锐角的大小与两条边长的比值相互唯一确定，因此边长与角的大小之间可以相互转化．类似的，可以在等腰三角形中建立边角之间的联系．我们定义：等腰三角形中底边与腰的比叫做顶角的正对（sad）．如果　ABC 中，$AB=AC$，那么顶角 A 的正对记作 sad$A$，这时 sad$A=\dfrac{底边}{腰}=\dfrac{BC}{AB}$．容易知道一个角的大小与这个角的正对值也是相互唯一确定的．根据上述角的正对定义，填空：如果$\angle A$的正弦函数值为$\dfrac{3}{5}$，那么 sad A 的值为___________．

例 8．（2023·湖南·统考一模）已知 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$，$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$（其中 α 和 β 都表示角度），比如求 $\tan105^\circ$，可利用公式得 $\tan105^\circ=\tan\left(60^\circ+45^\circ\right)=\dfrac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}=-\sqrt{3}-2$，又如求 $\tan120^\circ$，可利用公式得 $\tan120^\circ=\tan\left(2\times60^\circ\right)=\dfrac{2\times\sqrt{3}}{1-\left(\sqrt{3}\right)^2}=-\sqrt{3}$，请你结合材料，若 $\tan\left(120^\circ+\lambda\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$（$\lambda$ 为锐角），则 λ 的度数是__________.

例 9．（2023 秋·山东·九年级专题练习）已知：根据图中数据完成填空，再按要求答题：

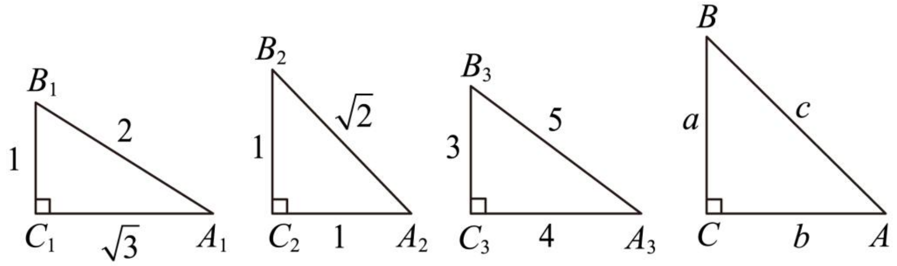


图1　图2　图3　图4

如图 1：$\sin^2\angle A_1+\sin^2\angle B_1=$______，如图 2：$\sin^2\angle A_2+\sin^2\angle B_2=$______，如图 3：$\sin^2\angle A_3+\sin^2\angle B_3=$______

①观察上述等式，猜想：如图 4，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，都有 $\sin^2\angle A+\sin^2\angle B=$_；

②如图 4，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的对边分别是 a，b，c，利用三角函数的定义和勾股定理，证明你的猜想；③已知：$\angle A+\angle B=90^\circ$，且 $\sin\angle A=0.7$，求 $\sin\angle B$.

例 10．（2023 春·湖北·九年级专题练习）在初中，我们学习过锐角的正弦、余弦、正切和余切四种三角函数，即在图 1 所示的直角三角形 ABC，$\angle A$ 是锐角，那么 $\sin A=\angle A$ 的对边÷斜边，$\cos A=\angle A$ 的邻边÷斜边，$\tan A=\angle A$ 的对边÷$\angle A$ 的邻边．为了研究需要，我们再从另一个角度来规定一个角的三角函数的意义：设有一个角α，我们以它的顶点作为原点，以它的始边作为 x 轴的正半轴 ox，建立直角坐标系（图 2），在角α的终边上任取一点 P，它的横坐标是 x，纵坐标是 y，点 P 和原点 $(0,0)$ 的距离为 $r=\sqrt{x^2+y^2}$（r 总是正的），然后把角α的三角函数规定为：$\sin\alpha=\dfrac{y}{r}$，$\cos\alpha=\dfrac{x}{r}$，$\tan\alpha=\dfrac{y}{x}$．我们知道，图 1 的四个比值的大小与角 A 的大小有关，而与直角三角形的大小无关，同样图 2 中四个比值的大小也仅与角α的大小有关，而与点 P 在角α的终边位置无关．比较图 1 与图 2，可以看出一个角的三角函数的意义的两种规定实际上是一样的，根据第二种定义回答下列问题：

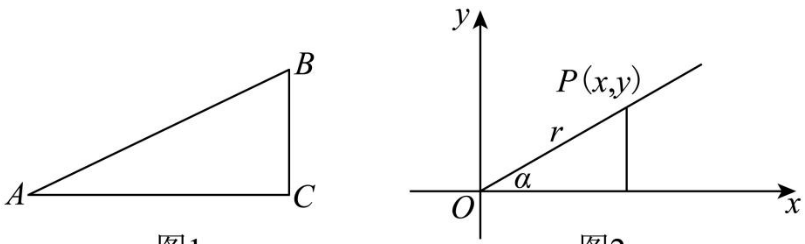


图1　　图2

(1)若 $90°<\alpha<180°$，则角α的三角函数值 $\sin\alpha$、$\cos\alpha$、$\tan\alpha$，其中取正值的是_；

(2)若角α的终边与直线 $y=2x$ 重合，则 $\sin\alpha+\cos\alpha$ 的值；

(3)若角α是钝角，其终边上一点 $P(x,2)$，且 $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}x$，求 $\tan\alpha$ 的值；

(4)若 $0°<\alpha\le 90°$，则 $\sin\alpha+\cos\alpha$ 的取值范围是_.

专项训练（一）

1．（2023春·广东深圳·九年级校联考开学考试）数学中余弦定理是这样描述的：在 ABC 中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 所对的边分别为 a、b、c，则三角形中任意一边的平方等于另外两边的平方和减去这两边及这两边的夹角的余弦值的乘积的2倍，用公式可描述为：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$．在 ABC 中，$AB=3$，$AC=4$，$\angle A=60°$，则 BC 的值是（　）

A．5　　B．$\sqrt{14}$　　C．$\sqrt{13}$　　D．2

2．（2022·广东东莞·校考一模）关于三角函数有如下的公式：

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$，由该公式可求得 $\sin 15°$ 的值是（　）

A．$\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$　　B．$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$　　C．$\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}$　　D．$\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

3．（2023春·湖南湘西·八年级统考阶段练习）已知三角形的三边长分别为 a,b,c，求其面积问题，中外数学家曾经进行过深入研究，古希腊的几何学家海伦（Heron，约公元50年）给出求其面积的海伦公式 $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$，其中 $p=\dfrac{a+b+c}{2}$；我国南宋时期数学家秦九韶（约1202-约1261）曾提出利用三角形的三边求其面积的秦九韶公式 $S=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2b^2-\left(\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2}$．若一个三角形的三边长分别为2，3，4，则其面积是（　）

A．$\dfrac{3\sqrt{15}}{8}$　　B．$\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$　　C．$\dfrac{3\sqrt{15}}{2}$　　D．$\dfrac{\sqrt{15}}{2}$

4．（2023秋·山东济南·九年级统考期末）定义一种运算：$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$，$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$．例如：当 $\alpha=60°$，$\beta=45°$ 时，$\sin(60°-45°)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，则 $\sin 75°$ 的值为____．

5．（2022秋·上海青浦·九年级校考期中）若定义等腰三角形顶角的 Blp 值为等腰三角形底边和底边上高的比值，即 $Blp\text{顶角}=\dfrac{\text{底边}}{\text{底边上的高}}$，若等腰 ABC，$AB=AC$，且 $BlpA=\dfrac{3}{2}$，则 $\cos A=$____________．

6．（2023·河北石家庄·九年级统考期中）阅读下面的材料，先完成阅读填空，再按要求答题．

$\sin^2 30°+\cos^2 30°=$_____；

$\sin^2 45°+\cos^2 45°=$_____；

$\sin^2 60°+\cos^2 60°=$_____；……

观察上述等式，猜想：对任意锐角 A，都有 $\sin^2A+\cos^2A=$____．

7．（2023·湖南娄底·统考一模）同学们，在我们进入高中以后，还将学到下面三角函数公式：

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$，$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$，

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$，$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$．例：

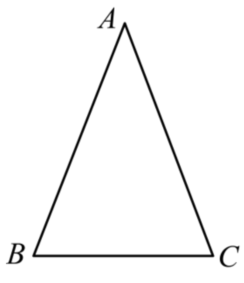
$\sin15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\sin45^\circ\cos30^\circ-\cos45^\circ\sin30^\circ=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$．若已知锐角 α 满足条件

$\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$，则 $\sin2\alpha=$________．

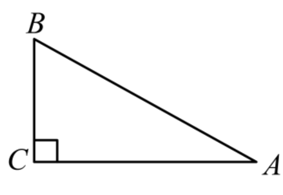
8．（2023 秋·河南南阳·九年级统考阶段练习）【素材引入】若一个三角形的三边长分别为 a，b，c，记 $p=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$，即 p 为 ABC 的周长的一半，则 $S_{ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$（$S_{ABC}$ 表示 ABC 的面积），把这个公式称为海伦公式．

【思考应用】某中学准备开辟一块面积为 5 平方米的空地作为劳动实践用地，现有一块三角形空地，它的三边长分别为 $a=3$ 米，$b=3$ 米，$c=4$ 米，那么这块三角形空地能否满足学校的需求，请通过计算说明理由．

9．（2023 秋·湖北·九年级专题练习）我们定义：等腰三角形中底边与腰的比叫做顶角正对（sad），如图①，在 ABC 中，$AB=AC$，顶角 A 的正对记作 $\mathrm{sad}A$，这时 $\mathrm{sad}A=\dfrac{底边}{腰}=\dfrac{BC}{AB}$．容易知道一个角的大小与这个角的正对值也是相互唯一确定的．根据上述角的正对定义，解下列问题：



图①



图②

(1) $\mathrm{sad}90^\circ=$________．(2)对于 $0^\circ<A<180^\circ$，$\angle A$ 的正对值 $\mathrm{sad}A$ 的取值范围是________．

(3)如图②，已知 $\sin A=\dfrac{3}{5}$，其中 $\angle A$ 为锐角，试求 $\mathrm{sad}A$ 的值．

10．（2023·山东·一模）小明学完了“锐角三角函数”的相关知识后，通过研究发现：如图 1，在 $Rt\triangle ABC$ 中，如果∠C=90°，∠A=30°，BC=a=1，AC=b=$\sqrt{3}$，AB=c=2，那么 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=2$．通过上网查阅资料，他又知“$sin$90°=1”，因此他得到“在含 30°角的直角三角形中，存在着 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ 的关系”．

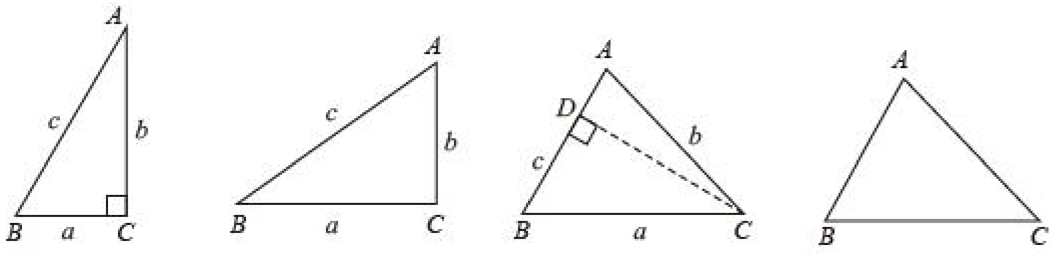


图1　　图2　　图3　　图4

这个关系对于一般三角形还适用吗？为此他做了如下的探究：

（1）如图 2，在 $Rt\triangle ABC$ 中，∠C=90°，BC=a，AC=b，AB=c，请判断此时“$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$”的关系是否成立？ 答：______________．

（2）完成上述探究后，他又想“对于任意的锐角$\triangle ABC$，上述关系还成立吗？”因此他又继续进行了如下的探究：如图 3，在锐角$\triangle ABC$ 中，BC=a，AC=b，AB=c，过点 C 作 $CD\perp AB$ 于 D，设 CD=h，

∵在 $Rt\triangle ADC$ 和 $Rt\triangle BDC$ 中，∠ADC=∠BDC=90°，

∴$sinA$=______________，$sinB$=______________．

∴ $\frac{a}{\sin A}$=______________， $\frac{b}{\sin B}$=______________．

∴ $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$

同理，过点 A 作 $AH\perp BC$ 于 H，可证 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ ∴ $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

请将上面的过程补充完整．（3）运用上面结论解答下列问题：

①如图 4，在$\triangle ABC$ 中，如果∠A=75°，∠B=60°，AB=6，求 AC 的长．

②在$\triangle ABC$ 中，如果∠B=30°，AB=$2\sqrt{3}$，AC=2，那么$\triangle ABC$ 内切圆的半径为______．

11．（2022春·山东东营·九年级自主招生）关于三角函数有如下公式：sin（α+β）=sinαcosβ+cosαsinβ；

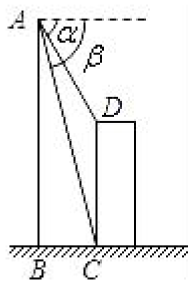
sin（α﹣β）=sinαcosβ﹣cosαsinβ；cos（α+β）=cosαcosβ﹣sinαsinβ；cos（α﹣β）=cosαcosβ+sinαsinβ

tan（α+β）=$\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$（1﹣tanαtanβ≠0）；tan（α﹣β）=$\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$（1+tanαtanβ≠0）

利用这些公式可以将一些不是特殊角的三角函数转化为特殊角的三角函数来求值．

如：tan105°=tan（45°+60°）=$\dfrac{\tan45^\circ+\tan60^\circ}{1-\tan45^\circ\tan60^\circ}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=-2-\sqrt{3}$

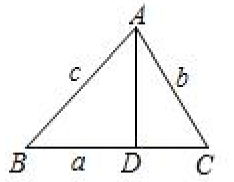
根据上面的知识，你可以选择适当的公式解决下面问题：如图，两座建筑物AB和DC的水平距离BC为24米，从点A测得点D的俯角α=15°，测得点C的俯角β=75°，求建筑物CD的高度．



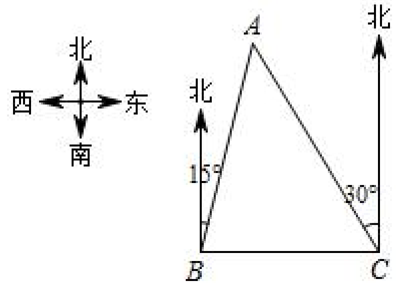
12．（2023·浙江杭州·九年级校考阶段练习）阅读下列材料，并解决问题．

如图（1），在锐角 ABC 中，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的对边分别是 a，b，c，过点 A 作 $AD\perp BC$ 于点 D，则 $\sin B=\dfrac{AD}{c}$，$\sin C=\dfrac{AD}{b}$，即 $AD=c\sin B$，$AD=b\sin C$．于是 $c\sin B=b\sin C$，即 $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$．同理有：$\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{a}{\sin A}$，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，所以 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$．即在一个三角形中，各边和它所对角的正弦的比相等．在锐角三角形中，若已知三个元素（至少有一条边），运用上述结论就可以求出其余三个未知元素．

（1）如图（2），一货轮在 B 处测得灯塔 A 在货轮的北偏东15°的方向上，随后货轮以80海里/时的速度向正东方向航行，半小时后到达 C 处，此时又测得灯塔 A 在货轮的北偏西30°的方向上，求此时货船距灯塔 A 的距离 AC．（2）在（1）的条件下，试求75°的正弦值．（结果保留根号）



(图1)



(图2)

13．（2023·浙江杭州·九年级期中）观察与思考：阅读下列材料，并解决后面的问题．

在锐角△ABC 中，∠A、∠B、∠C 的对边分别是 a、b、c，过 A 作 AD⊥BC 于 D(如图 1)，则 $\sin B=\frac{AD}{c}$，$\sin C=\frac{AD}{b}$，即 AD＝csinB，AD＝bsinC，于是 csinB＝bsinC，即 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$．同理有：$\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}$，$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，所以 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，即：在一个三角形中，各边和它所对角的正弦的比相等．在锐角三角形中，若已知三个元素(至少有一条边)，运用上述结论和有关定理就可以求出其余三个未知元素．根据上述材料，完成下列各题．(1)如图 2，△ABC 中，∠B＝45°，∠C＝75°，BC＝60，则∠A＝_____；AC＝_____；

(2)如图 3，一货轮在 C 处测得灯塔 A 在货轮的北偏西 30°的方向上，随后货轮以 60 海里/时的速度按北偏东 30°的方向航行，半小时后到达 B 处，此时又测得灯塔 A 在货轮的北偏西 75°的方向上(如图 3)，求此时货轮距灯塔 A 的距离 AB．

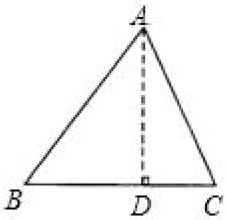


图 1

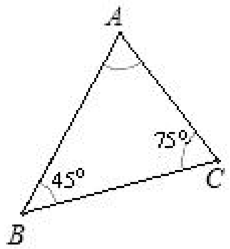


图 2

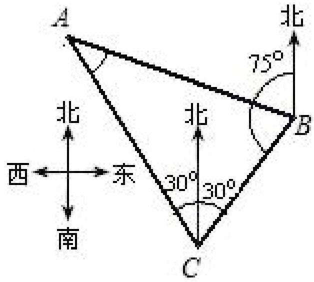


图 3

14．（2023·浙江·九年级专题练习）亲爱的同学们，在我们进入高中以后，将还会学到三角函数公式：$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$， $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$．

例：$\sin 75\ =\sin\left(30\ +45\ \right)=\sin 30\ \cos 45\ +\cos 30\ \sin 45\ =\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$．

（1）试仿照例题，求出$\cos 75$ 的准确值；（2）我们知道：$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，试求出$\mathbf{tan\,75}$ 的准确值；

15．（2023.广东九年级期中）阅读：△ABC 中，a，b，c 分别是∠A，∠B，∠C 的对边，△ABC 的边角有如下性质：①正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

②余弦定理：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

③$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ac\sin B$

请你根据上述结论求解下列问题：在锐角△ABC 中，a，b，c 分别是∠A，∠B，∠C 的对边，且 $2a\sin B=\sqrt{3}b$.

（1）求角 A 的大小；（2）若 $a=6$，$b+c=8$，求△ABC 的面积.

16．（2022 春·浙江·九年级专题练习）阅读材料：

一般地，当α、β为任意角时，tan（α+β）与 tan（α﹣β）的值可以用下面的公式求得：tan（α±β）=$\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\quad\tan\alpha\cdot\tan\beta}$．

例如：tan15°=tan（45°﹣30°）=$\dfrac{\tan 45\ -\tan 30}{1+\tan 45\ \cdot\tan 30}=\dfrac{1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{1+1\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\dfrac{(3-\sqrt{3})^2}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}$

=$2-\sqrt{3}$．

根据以上材料，解决下列问题：（1）求 tan75°的值；

（2）都匀文峰塔，原名文笔塔，始建于明代万历年间，系五层木塔，文峰塔的木塔年久倾毁，仅存塔基，1983 年，人民政府拨款维修文峰塔，成为今天的七层六面实心石塔（图 1），

小华想用所学知识来测量该铁塔的高度，如图 2，已知小华站在离塔底中心 A 处 5.7 米的 C 处，测得塔顶的仰角为 75°，小华的眼睛离地面的距离 DC 为 1.72 米，请帮助小华求出文峰塔 AB 的高度.（精确到 1 米，参考数据 $\sqrt{3}$≈1.732，$\sqrt{2}$≈1.414）

图1

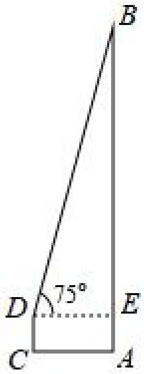


图2

2024 中考数学新定义及探究题专题 《三角函数及新定义（一）》 （解析版）

【类型 1　二次函数问题中的新定义问题】

1．（2023 春·山东济南·九年级统考期末）新定义：若一个点的纵坐标是横坐标的 2 倍，则称这个点为二倍点．若二次函数 $y=x^2-2x+c$（c 为常数）在 $-1<x<4$ 的图象上存在两个二倍点，则 c 的取值范围是（　）

A．$-5<c<4$　B．$0<c<1$　C．$-5<c<1$　D．$0<c<4$

【答案】D

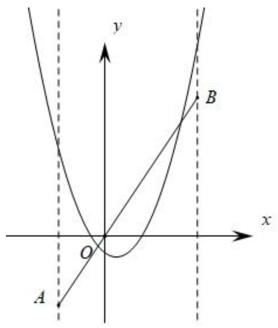
【分析】由点的纵坐标是横坐标的 2 倍可得二倍点在直线 $y=2x$ 上，由 $-1<x<4$ 可得二倍点所在线段 AB 的端点坐标，结合图象，通过求抛物线与线段的交点求解．

【详解】解：由题意可得二倍点所在直线为 $y=2x$，

将 $x=-1$ 代入 $y=2x$ 得 $y=-2$，

将 $x=4$ 代入 $y=2x$ 得 $y=8$，

设 $A(-1,-2)$，$B(4,8)$，如图，



联立 $y=2x$ 与 $y=x^2-2x+c$，得方程 $x^2-2x+c=2x$，

即 $x^2-4x+c=0$

∵抛物线与直线 $y=2x$ 有两个交点，

∴ $\Delta=4^2-4c>0$，

解得 $c<4$，

当直线 $x=-1$ 和直线 $x=4$ 与抛物线交点在点 A，B 上方时，抛物线与线段 AB 有两个交点，

把$x=-1$代入$y=x^2-2x+c$，得$y=3+c$，

把$x=4$代入$y=x^2-2x+c$得$y=8+c$，

∴$\begin{cases}3+c>-2\\8+c>8\end{cases}$，

解得$c>0$，

∴$0<c<4$.

故选 D.

【点睛】本题考查二次函数图象与正比例函数图象的交点问题，解题关键掌握函数与方程及不等式的关系，将代数问题转化为图形问题求解.

2.（2023 春·湖北咸宁·九年级统考期中）定义：我们将顶点的横坐标和纵坐标互为相反数的二次函数称为“互异二次函数”．若互异二次函数的对称轴为直线 $x=1$ 且图象经过点（﹣1，0)，则这个互异二次函数的二次项系数是（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{4}$　　C．1　　D．﹣1

【答案】B

【分析】根据函数的对称轴和互异二次函数的特点计算即可；

【详解】由题可知：此函数的横坐标与纵坐标互为相反数，且对称轴为直线 $x=1$ 且图象经过点（﹣1，0)，设此函数为$y=ax^2+bx+c$，

∴$\begin{cases}-\frac{b}{2a}=1\\0=a-b+c\\-1=a+b+c\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a=\frac{1}{4}\\b=-\frac{1}{2}\\c=-\frac{3}{4}\end{cases}$，

∴此函数的二次项系数为$\frac{1}{4}$；

故选 B.

【点睛】本题主要考查了二次函数的性质，准确计算是解题的关键.

3.（2023 春·广西南宁·九年级统考期中）新定义：在平面直角坐标系中，对于点 P（m，n）和点 P'（m，n')，若满足 $m\geq0$ 时，$n'=n-4$；$m<0$ 时，$n'=-n$，则称点 P'（m，n'）是点 P（m，n）的限变点．例如：点 P_1（2，5）的限变点是 P_1'（2，1)，点 P_2（-2，3）的限变点是 P_2'

(-2，-3)．若点 P（m，n）在二次函数 $y=-x^2+4x+2$ 的图象上，则当 $-1\le m\le 3$ 时，其限变点 P' 的纵坐标 n' 的取值范围是（　　）

A．$-2\le n'\le 2$　B．$1\le n'\le 3$　C．$1\le n'\le 2$　D．$-2\le n'\le 3$

【答案】D

【分析】根据新定义得到当 $m\ge 0$ 时，$n'=-m^2+4m+2-4=-(m-2)^2+2$，在 $0\le m\le 3$ 时，得到 $-2\le n'\le 2$；当 $m<0$ 时，$n'=m^2-4m-2=(m-2)^2-6$，在 $-1\le m<0$ 时，得到 $-2\le n'\le 3$，即可得到限变点 P' 的纵坐标 n' 的取值范围是 $-2\le n'\le 3$．

【详解】解：由题意可知，

当 $m\ge 0$ 时，$n'=-m^2+4m+2-4=-(m-2)^2+2$，

∴当 $0\le m\le 3$ 时，$-2\le n'\le 2$，

当 $m<0$ 时，$n'=m^2-4m-2=(m-2)^2-6$，

∴当 $-1\le m<0$ 时，$-2<n'\le 3$，

综上，当 $-1\le m\le 3$ 时，其限变点 P' 的纵坐标 n' 的取值范围是 $-2\le n'\le 3$，

故选：D．

【点睛】本题主要考查了二次函数图象上点的坐标特征，解题的关键是根据限变点的定义得到 n' 关于 m 的函数．

4．(2023 春·湖南长沙·九年级长沙市开福区青竹湖湘一外国语学校校考期末）定义：我们不妨把纵坐标是横坐标 2 倍的点称为“青竹点”．例如：点 $(1,2)$、$(-2.5,-5)$……都是“青竹点”．显然，函数 $y=x^2$ 的图象上有两个“青竹点”：$(0,0)$ 和 $(2,4)$．

(1)下列函数中，函数图象上存在“青竹点”的，请在横线上打“√”，不存在“青竹点”的，请打“×”．

①$y=2x-1$ ________；②$y=-x^2+1$ ________；③$y=x^2+2$ ________．

(2)若抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2-m+1$（m 为常数）上存在两个不同的“青竹点”，求 m 的取值范围；

(3)若函数 $y=\frac{1}{4}x^2+(b-c+2)x+a+c-3$ 的图象上存在唯一的一个“青竹点”，且当 $-1\le b\le 2$ 时，a 的最小值为 c，求 c 的值．

【答案】(1)×；√；×

(2) $m<3$

(3) $c=\frac{3}{2}$

【分析】（1）根据“青一函数”的定义直接判断即可；

（2）根据题意得出关于x的一元二次方程，再根据根的判别式得出关于 m 的不等式，即可求解；

（3）根据题意得出关于x的一元二次方程，再根据根的判别式得出关于 a 的二次函数，利用二次函数最值求解即可．

【详解】（1）解：①令$2x-1=2x$，方程无解，

∴函数$y=2x-1$图像上不存在“青竹点”，故答案为：×；

②令$-x^2+1=2x$，

解得：$x_1=-1+\sqrt{2}$，$x_2=-1-\sqrt{2}$，

∴函数$y=-x^2+1$图像上存在“青竹点”$(-1+\sqrt{2},-2+2\sqrt{2})$和$(-1-\sqrt{2},-2-2\sqrt{2})$，故答案为：√；

③令$x^2+2=2x$，方程无解，

∴函数$y=x^2+2$图像上不存在“青竹点”，故答案为：×；

（2）解：由题意得$-\frac{1}{2}x^2-m+1=2x$，

整理，得$x^2+4x+2m-2=0$，

∵抛物线$y=-\frac{1}{2}x^2-m+1$（m 为常数）上存在两个不同的“青竹点”，

∴$\Delta=4^2-4(2m-2)>0$，

解得$m<3$；

（3）解：由题意得$\frac{1}{4}x^2+(b-c+2)x+a+c-3=2x$

整理，得$x^2+4(b-c)x+4(a+c-3)=0$

∵函数$y=\frac{1}{4}x^2+(b-c+2)x+a+c-3$的图像上存在唯一的一个“青竹点”，

∴$\Delta=[4(b-c)]^2-4\times1\times4(a+c-3)=0$

整理，得$a=(b-c)^2-c+3$

∴当$b=c$时，a 的最小值为$3-c$，

∵当$-1\le b\le2$时，a 的最小值为 c，

∴$3-c=c$

∴$c=\frac{3}{2}$，

【点睛】本题属于函数背景下新定义问题，主要考查二次函数的性质，二次函数与一元二次方程的关系，解题关键是掌握二次函数图象与系数的关系，掌握二次函数与方程的关系，一元二次方程根的判别式.

5.（2023 春·江苏泰州·九年级统考期中）定义：两个二次项系数之和为1，对称轴相同，且图像与y轴交点也相同的二次函数互为友好同轴二次函数.例如：$y=2x^2+4x-5$的友好同轴二次函数为$y=-x^2-2x-5$.

(1)函数$y=\frac{1}{4}x^2-2x+3$的友好同轴二次函数为_.

(2)当$-1\le x\le4$时，函数$y=(1-a)x^2-2(1-a)x+3\ (a\ne0$ 且$a\ne1)$的友好同轴二次函数有最大值为5，求a的值.

(3)已知点$(m,p),(m,q)$分别在二次函数$y_1=ax^2+4ax+c(a>\frac{1}{2}$且$a\ne1)$及其友好同轴二次函数$y_2$的图像上，比较$p,q$的大小，并说明理由.

【答案】(1) $y=\frac{3}{4}x^2-6x+3$；

(2) $a=\frac{1}{4}$或-2；

(3)当$m=-4$或$m=0$时，$p=q$；当$m<-4$或$m>0$时，$p>q$；当$-4<m<0$时，$p<q$

【分析】(1) 根据友好同轴二次函数的定义，找出$y=\frac{1}{4}x^2-2x+3$的友好同轴二次函数即可；

（2）根据友好同轴二次函数的定义，找出$y=(1-a)x^2-2(1-a)x+3$的友好同轴二次函数，判断函数图像开口方向，利用函数的对称轴和自变量范围进行最大值讨论；

（3）先根据友好同轴二次函数的定义，找出$y_1=ax^2+4ax+c$的友好同轴二次函数，再把两点代入p,q，作差后比较大小，为含参数a的二次不等式，求解m的范围即可.

【详解】（1）设友好同轴二次函数为$y=ax^2+bx+c(a\neq0)$，

由函数$y=\frac{1}{4}x^2-2x+3$可知，

对称轴为直线$x=-\frac{-2}{2\times\frac{1}{4}}=4$，与$y$轴交点为$(0,3)$，

$\therefore a=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$，$c=3$，对称轴为直线$x=-\frac{b}{2\times\frac{3}{4}}=4$，

$\therefore b=-6$，

$\therefore$友好同轴二次函数为$y=\frac{3}{4}x^2-6x+3$；

（2）由函数$y=(1-a)x^2-2(1-a)x+3\ (a\neq0$ 且$a\neq1)$可求得，

该函数的友好同轴二次函数为$y=ax^2-2ax+3=a(x-1)^2+3-a$；

①当$a>0$时，$x=4$时，$y_{\max}=a(4-1)^2+3-a=8a+3=5$，

解得：$a=\frac{1}{4}$；

②当$a<0$时，$x=1$时，$y_{\max}=a(1-1)^2+3-a=3-a=5$，

解得：$a=-2$；

综上所述，$a=\frac{1}{4}或-2$；

（3）由函数$y_1=ax^2+4ax+c(a>\frac{1}{2}且a\neq1)$可求得，

该函数的友好同轴二次函数为$y_2=(1-a)x^2+4(1-a)x+c$，

把$(m,p),(m,q)$分别代入y_1,y_2可得，

$p=am^2+4am+c$，$q=(1-a)m^2+4(1-a)m+c$，

则$p-q=am^2+4am+c-[(1-a)m^2+4(1-a)m+c]=(2a-1)m^2+4(2a-1)m$，

$\because a>\frac{1}{2}$，

$\therefore(2a-1)>0$，

①当$p-q>0$时，$p>q$，即$(2a-1)m^2+4(2a-1)m>0$，

$m^2+4m>0$，

解得：$m<-4或m>0$；

②当$p-q<0$时，$p<q$，即$(2a-1)m^2+4(2a-1)m<0$，

$m^2+4m<0$，

解得：$-4<m<0$；

③当$p-q=0$时，$p=q$，即$(2a-1)m^2+4(2a-1)m=0$，

$m^2+4m=0$，

解得：$m=-4或m=0$；

综上所述，当$m=-4或m=0$时，$p=q$；

当 $m<-4$ 或 $m>0$ 时，$p>q$；

当 $-4<m<0$ 时，$p<q$.

【点睛】本题考查二次函数的性质以及新定义问题，掌握二次函数的基本性质以及研究手段，准确根据题意求出符合要求的友好同轴二次函数是解题关键.

6．（2023春·浙江金华·九年级校考期中）定义：若抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴两交点间的距离为4，称此抛物线为定弦抛物线.

(1)判断抛物线 $y=x^2+2x-3$ 是否是定弦抛物线，请说明理由；

(2)当一定弦抛物线的对称轴为直线 $x=1$，且它的图像与坐标轴的交点间的连线所围成的图形是直角三角形，求该抛物线的表达式；

(3)若定弦抛物线 $y=x^2+bx+c$（$b<0$）与 x 轴交于 A、B 两点（A 在 B 左边），当 $2\le x\le 4$ 时，该抛物线的最大值与最小值之差等于 OB 之间的距离，求 b 的值.

【答案】(1)是定弦抛物线，理由见解析

(2) $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)(x-3)$ 或 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)(x-3)$

(3) $b=-4$ 或 $-\frac{28}{3}$

【分析】（1）令 $y=0$，求出与 x 轴的交点坐标，可判断；

（2）分开口向上向下讨论，利用定弦抛物线的定义和对称轴可求出与 x 轴交点坐标，用相似求出与 y 轴交点坐标，代入可得答案；

（3）根据对称轴和所给范围分情况讨论即可.

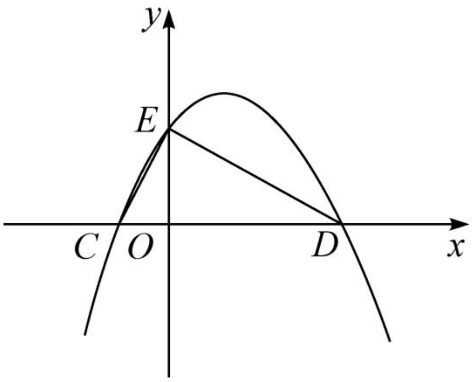
【详解】（1）解：当 $y=0$ 时，$x^2+2x-3=0$，

解得：$x_1=1$，$x_2=-3$，

则 $|x_1-x_2|=4$，

即该抛物线是定弦抛物线；

(2)：当该抛物线开口向下时，如图所示.



∵该定弦抛物线的对称轴为直线 $x=1$，

设 $C(m,0),D(n,0)$

则 $\begin{cases}n-m=4\\n+m=2\end{cases}$

解得：$\begin{cases}m=-1\\n=3\end{cases}$

∴ C（－1，0），D（3，0），

∵△CED 为直角三角形

∴由题意可得∠CED＝90°，

∵$EO\perp CD$，

∴△CEO∽△EDO，

∴$OE^2=OC\cdot OD=3$，

∴E（0，$\sqrt{3}$）

设该定弦抛物线表达式为 $y=a(x+1)(x-3)$，

把 E（0，$\sqrt{3}$）代入求得 $a=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

∴该定弦抛物线表达式为 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)(x-3)$，

当该抛物线开口向上时，

同理可得该定弦抛物线表达式为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)(x-3)$，

∴综上所述，该定弦抛物线表达式为$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)(x-3)$或$y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)(x-3)$；

（3）解：若$-\frac{b}{2}\leq 2$，则在 $2\leq x\leq 4$ 中，

当 $x=4$ 时该定弦抛物线取最大值，当 $x=2$ 时该定弦抛物线取最小值．

∴$16+4b+c-(4+2b+c)=-\frac{b}{2}+2$，

解得：$b=-4$，

∵$-\frac{b}{2}\leq 2$，

∴$b\geq-4$，即 $b=-4$，

若$2\leq-\frac{b}{2}\leq 3$，则在 $2\leq x\leq 4$ 中，

当 $x=4$ 时该定弦抛物线取最大值，当 $x=-\frac{b}{2}$时该定弦抛物线取最小值．

∴$16+4b+c-\frac{4c-b^2}{4}=-\frac{b}{2}+2$，

解得：$b_1=-4$，$b_2=-14$，

∵$2\leq-\frac{b}{2}\leq 3$，

∴$-6\leq b\leq-4$，

∴$b_1=-4$，$b_2=-14$（舍去），

若$3<-\frac{b}{2}\leq 4$，则在 $2\leq x\leq 4$ 中，

当 $x=2$ 时该定弦抛物线取最大值，当 $x=-\frac{b}{2}$时该定弦抛物线取最小值．

∴$4+2b+c-\frac{4c-b^2}{4}=-\frac{b}{2}+2$，

解得：$b=-5\pm\sqrt{17}$，

$\because 3<-\frac{b}{2}\le 4$，

∴﹣8≤*b*<﹣6，

∴$b=-5\pm\sqrt{17}$不合题意，舍去，

若$-\frac{b}{2}>4$，则在 2≤*x*≤4 中，

当 *x*＝2 时该定弦抛物线取最大值，当 *x*＝4 时该定弦抛物线取最小值．

$\therefore 4+2b+c-(16+4b+c)=-\frac{b}{2}+2$，

解得：$b=-\frac{28}{3}$，

$\because -\frac{b}{2}>4$，

∴*b*<﹣8，

$\therefore b=-\frac{28}{3}$，

∴综上所述 *b*＝﹣4 或$-\frac{28}{3}$.

【点睛】本题考查了二次函数的综合性质，包括与 *x* 轴交点问题，最值问题，以及和相似的结合，准确地理解定弦抛物线的定义以及分类讨论是解决本题的关键．

7．（2023 春·浙江·九年级期末）定义：若抛物线$y_1=a_1(x+h)^2+k_1$与抛物线$y_2=a_2(x+h)^2+k_2$．同时满足$a_2=-4a_1$且$k_2=-\frac{1}{4}k_1$，则称这两条抛物线是一对“共轭抛物线”．

(1)已知抛物线$y_1=-\frac{1}{4}x^2+bx+c$与$y_2=x^2-2x-3$是一对共轭抛物线，求y_1的解析式；

(2)如图 1，将一副边长为$4\sqrt{2}$的正方形七巧板拼成图 2 的形式，若以 *BC* 中点为原点，直线 *BC* 为 *x* 轴建立平面直角坐标系，设经过点 *A*，*E*，*D* 的抛物线为y_1，经过 *A*、*B*、*C* 的抛物

线为y_2，请立接写出y_1、y_2的解析式并判断它们是否为一对共轭抛物线．

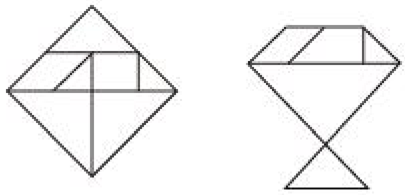


图1

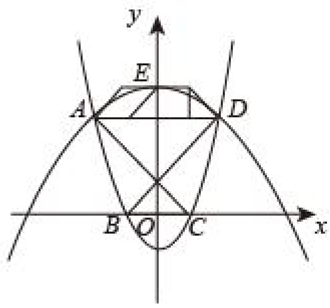


图2

【答案】(1) $y_1=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{63}{4}$

(2) $y_1=-\frac{1}{8}x^2+8$，$y_2=\frac{1}{2}x^2-2$，y_1、y_2是一对共轭抛物线

【分析】（1）将$y_2=x^2-2x-3$化作顶点式，可求出a_2，h和k_2的值，根据“共轭抛物线”的定义可求出a_1，h和k_1的值，进而求出y_1的解析式；

（2）根据七巧板各个图形之间的关系可求出各个图形的边长，进而可表示点A，B，C，D，E的坐标，分别求出y_1和y_2的解析式，再根据“共轭抛物线”的定义可求解．

【详解】（1）解：$y_2=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$，

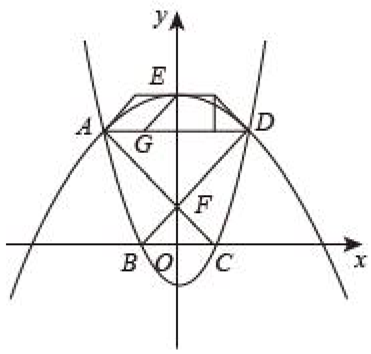
$\therefore a_2=1$，$h=-1$，$k_2=-4$，

$\because$抛物线$y_1=-\frac{1}{4}x^2+bx+c$与$y_2=x^2-2x-3$是一对共轭抛物线，

$\therefore a_1=\frac{a_2}{-4}=-\frac{1}{4}$，$h=-1$且$k_1=-4k_1=16$，

$y_1=-\frac{1}{4}(x-1)^2+16=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{63}{4}$．

（2）解：如图，



由题意得，$DF=AF=4\sqrt{2}$，则$AG=GF=DG=GF=4$，$EG=2$，$HG=2$，$BC=4$，$OF=2$，

∵点O为BC的中点，∴$BO=OC=2$，

∴$B(-2,0)$，$C(2,0)$，$A(-4,6)$，$D(4,6)$，$E(0,8)$，

∴可设抛物线$y_1=a_1(x+4)(x-4)+6$，与抛物线$y_2=a_2(x+2)(x-2)$，

∴$-16a_1+6=8$，$(-4+2)(-4-2)a_2=6$，解得：$a_1=-\frac{1}{8}$，$a_2=\frac{1}{2}$，

∴抛物线$y_1=\frac{1}{8}(x+4)(x-4)+6=-\frac{1}{8}x^2+8$，

抛物线$y_2=\frac{1}{2}(x+2)(x-2)=\frac{1}{2}x^2-2$，

∴$a_1=-\frac{1}{8}$，$h=0$，$k_1=8$，$a_2=\frac{1}{2}$，$h=0$，$k_2=-2$，

∵$-\frac{1}{8}\times(-4)=\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{4}\times 8=-2$，

∴满足$a_2=-4a_1$且$k_2=-\frac{1}{4}k_1$，

∴y_1、y_2是一对共轭抛物线．

【点睛】本题属于二次函数的新定义类问题，主要考查利用待定系数法求函数表达式，二次函数的顶点式，一般式及交点式三种方式的变换，熟知相关运算是解题关键．

8．（2023春·湖南长沙·九年级校联考期末）定义：如果抛物线$y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$与x轴交于点$A(x_1,0)$，$B(x_2,0)$，那么我们把线段AB叫做雅礼弦，AB两点之间的距离l称为抛物线

的雅礼弦长．

(1)求抛物线$y=x^2-2x-3$的雅礼弦长；

(2)求抛物线$y=x^2+(n+1)x-1(1\le n<3)$的雅礼弦长的取值范围；

(3)设m，n为正整数，且$m\ne 1$，抛物线$y=x^2+(4-mt)x-4mt$的雅礼弦长为l_1，抛物线$y=-x^2+(t-n)x+nt$的雅礼弦长为l_2，$s=l_1^2-l_2^2$，试求出s与t之间的函数关系式，若不论t为何值，$s\ge 0$恒成立，求m，n的值．

【答案】(1)4

(2)$2\sqrt{2}\le AB<2\sqrt{5}$

(3)$m=2$，$n=2$或$m=4$，$n=1$

【分析】（1）根据定义求得抛物线与x轴的交点坐标即可求解；

（2）根据（1）的方法求得$AB=\sqrt{(n+1)^2+4}$，根据n的范围，即可求解．

（3）根据题意，分别求得l_1,l_2，根据$s=l_1^2-l_2^2$，求得出s与t之间的函数关系式，根据$s\ge 0$恒成立，可得$mn=4$，根据m，n为正整数，且$m\ne 1$，即可求解．

【详解】（1）解：$x^2-2x-3=0$，

$(x-3)(x+1)=0$，

$\therefore x_1=3$，$x_2=-1$，

$\therefore$雅礼弦长$AB=4$；

（2）$x^2+(n+1)x-1=0$，$A(x_1,0)B(x_1,0)$，

$\therefore AB=|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$，

$\because \Delta=(n+1)^2+4>0$，$\begin{cases}x_1+x_2=-(n+1)\\ x_1x_2=-1\end{cases}$，

$\therefore AB=\sqrt{(n+1)^2+4}$，

$\because 1 \le n < 3$，

$\therefore$当$n=1$时，AB最小值为$2\sqrt{2}$，

当$n=3$时，AB最大值小于$2\sqrt{5}$，

$\therefore 2\sqrt{2} \le AB < 2\sqrt{5}$；

（3）由题意，令$y=x^2+(4-mt)x-4mt=0$，

$\therefore x_1+x_2=mt-4$，$x_1x_2=-4mt$，

则$l_1^2=(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=(mt+4)^2$，

同理$l_2^2=(n+t)^2$，

$s=(mt+4)^2-(n+t)^2=(m^2-1)t^2+(8m-2n)t+(16-n^2)$，

$\because m^2-1 \ne 0$，

$\therefore$要不论t为何值，$S \ge 0$恒成立，

即：$(m^2-1)t^2+(8m-2n)t+(16-n^2) \ge 0$恒成立，

由题意得：$m^2-1>0$，$\Delta=(8m-2n)^2-4(m^2-1)(16-n^2) \le 0$，

解得：$(mn-4)^2 \le 0$，$mn=4$

$\because m$，n为正整数，且$m \ne 1$，

则$m=2$，$n=2$或$m=4$，$n=1$．

【点睛】本题考查了抛物线与坐标轴交点问题，一元二次方程根与系数的关系，综合运用以上知识是解题的关键．

9．（2023春·河南濮阳·九年级统考期中）小明在课外学习时遇到这样一个问题：定义：如果二次函数$y=a_1x^2+b_1x+c_1$（$a_1 \ne 0$）与$y=a_2x^2+b_2x+c_2$（$a_2 \ne 0$）满足$a_1+a_2=0$，$b_1=b_2$，$c_1+c_2=0$，则称这两个函数互为“旋转函数”．求函数$y=x^2-3x-2$的“旋转函数”．

小明是这样思考的：由函数$y=x^2-3x-2$可知，$a_1=1$，$b_1=-3$，$c_1=-2$，根据$a_1+a_2=0$，$b_1=b_2$，$c_1+c_2=0$，求出a_2，b_2，c_2，就能确定这个函数的“旋转函数”．

请参考小明的方法解决下面问题：

(1)直接写出函数 $y=x^2-3x-2$ 的“旋转函数”__；

(2)若函数 $y=-x^2+\frac{4}{3}mx-2$ 与 $y=x^2-2nx+n$ 互为“旋转函数”，求 $(m+n)^{2020}$ 的值；

(3)已知函数 $y=\frac{1}{2}(x-1)(x+4)$ 的图象与 x 轴交于点 A、B 两点（A 在 B 的左边），与 y 轴交于点 C，点 A、B、C 关于原点的对称点分别是 A_1，B_1，C_1，试证明经过点 A_1，B_1，C_1 的二次函数与函数 $y=\frac{1}{2}(x-1)(x+4)$ 互为“旋转函数”

【答案】(1)$y=-x^2-3x+2$；

(2)1

(3)见解析

【分析】（1）根据 $y=a_1x^2+b_1x+c_1$（$a_1\neq0$，a_1，b_1，c_1 是常数）与 $y=a_2x^2+b_2x+c_2$（$a_2\neq0$，a_2，b_2，c_2 是常数）满足 $a_1+a_2=0$，$b_1=b_2$，$c_1+c_2=0$，则称这两个函数互为“旋转函数”，可得 a_2，b_2，c_2，可得旋转函数；

（2）根据 $y=a_1x^2+b_1x+c_1$（$a_1\neq0$，a_1，b_1，c_1 是常数）与 $y=a_2x^2+b_2x+c_2$（$a_2\neq0$，a_2，b_2，c_2 是常数）满足 $a_1+a_2=0$，$b_1=b_2$，$c_1+c_2=0$，则称这两个函数互为“旋转函数”，可得 a_2，b_2，c_2，根据负数奇数次幂是负数，可得答案；

（3）根据自变量与函数值的对应关系，可得 A、B、C 的坐标，根据关于原点对称的点横坐标互为相反数，纵坐标互为相反数，可得 A_1，B_1，C_1，根据待定系数法，可得函数解析式；根据 $y=a_1x^2+b_1x+c_1$（$a_1\neq0$，a_1，b_1，c_1 是常数）与 $y=a_2x^2+b_2x+c_2$（$a_2\neq0$，a_2，b_2，c_2 是常数）满足 $a_1+a_2=0$，$b_1=b_2$，$c_1+c_2=0$，则称这两个函数互为“旋转函数”，可得 a_2，b_2，c_2，可得旋转函数．

【详解】（1）解：由 $y=x^2-3x-2$ 函数可知 $a_1=1$，$b_1=-3$，$c_1=-2$．

由 $a_1+a_2=0$，$b_1=b_2$，$c_1+c_2=0$，得

$a_2=-1$，$b_2=-3$，$c_2=2$．

函数 $y=x^2+3x-2$ 的“旋转函数”为 $y=-x^2-3x+2$；

（2）由 $y=-x^2+\frac{4}{3}mx-2$ 与 $y=x^2-2nx+n$ 互为“旋转函数“，

得$-2n=\frac{4}{3}m$，$-2+n=0$.

解得 $n=2$，$m=-3$.

当 $m=2$，$n=-3$ 时，$(m+n)^{2020}=(2-3)^{2020}=(-1)^{2020}=1$；

（3）∵当 $y=0$ 时，$\frac{1}{2}(x-1)(x+4)=0$，解得 $x=-1$，$x=4$，

∴A（-1，0），B（4，0）.

当 $x=0$ 时，$y=\frac{1}{2}\times(-4)=-2$，即 C（0，-2）.

由点 A，B，C 关于原点的对称点分别是 A_1，B_1，C_1，

得 A_1（1，0），B_1（-4，0），C_1（0，2）.

设过点 A_1，B_1，C_1 的二次函数 $y=a(x+1)(x-4)$，将 C_1（0，2）代入，

解得 $a=-\frac{1}{2}$，

∴过点 A_1，B_1，C_1 的二次函数 $y=-\frac{1}{2}(x+1)(x-4)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2$

而 $y=\frac{1}{2}(x-1)(x+4)=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x-2$

∴$a_1+a_2=0$，$b_1=b_2$，$c_1+c_2=0$，

∴经过点 A_1、B_1、C_1 的二次函数与函数 $y=\frac{1}{2}(x-1)(x+4)$ 互为“旋转函数”.

【点睛】本题考查了二次函数的综合题：熟练掌握关于原点对称的两点的坐标特征；会求二次函数图象与坐标轴的交点和待定系数法求二次函数解析式；对新定义的理解能力.

10．（2023春·山西大同·九年级统考期中）请阅读下列材料，并完成相应的任务：

定义：我们把自变量为 x 的二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 与 $y=ax^2-bx+c$（$a\neq0$，$b\neq0$）称为一对“亲密函数”，如 $y=5x^2-3x+2$ 的“亲密函数”是 $y=5x^2+3x+2$.

任务：

（1）写出二次函数 $y=x^2+3x-4$ 的“亲密函数”：______；

（2）二次函数$y=x^2+3x-4$的图像与x轴交点的横坐标为 1 和-4，它的“亲密函数”的图像与x轴交点的横坐标为______，猜想二次函数$y=ax^2+bx+c$（$b^2-4ac>0$）的图像与x轴交点的横坐标与其“亲密函数”的图像与x轴交点的横坐标之间的关系是______；

（3）二次函数$y=x^2+bx-2021$的图像与x轴交点的横坐标为 1 和-2021，请利用（2）中的结论直接写出二次函数$y=4x^2-2bx-2021$的图像与x轴交点的横坐标．

【答案】(1) $y=x^2-3x-4$；（2）4 和-1；互为相反数；（3）二次函数$y=4x^2-2bx-2021$的图像与x轴交点的横坐标为$-\frac{1}{2}$和$\frac{2021}{2}$

【分析】(1）根据二次函数$y=x^2+3x-4$的“亲密函数”定义把一次项系数变为相反数即可；

（2）利用“亲密函数”建立 y=0 时方程，解方程，得出“亲密函数”与 x 轴交点横坐标，与原函数与 x 轴交点横坐标比较，得出规律即可；

（3）先将函数变形，发现与“亲密函数”类似，根据原函数与 x 轴交点横坐标得出“亲密函数”与 x 轴交点横坐标，利用 $2x$ 等于交点横坐标，求出 x 得出所求函数与 x 轴的交点横坐标即可．

【详解】解：（1）二次函数$y=x^2+3x-4$的“亲密函数”为$y=x^2-3x-4$，

故答案为：$y=x^2-3x-4$；

（2）$x^2-3x-4=0$，解得$x=4, x=-1$，

它的“亲密函数”的图像与x轴交点的横坐标为 4 和-1，

∴二次函数$y=ax^2+bx+c$（$b^2-4ac>0$）的图像与x轴交点的横坐标与其“亲密函数”的图像与x轴交点的横坐标之间的关系是互为相反数；

故答案为 4 和-1；互为相反数；

（3）$y=4x^2-2bx-2021=(2x)^2-b(2x)-2021$，

∵二次函数$y=x^2+bx-2021$的图像与x轴交点的横坐标为 1 和-2021，

∴二次函数$y=x^2-bx-2021$的图像与x轴交点的横坐标为-1 和2021，

∴$y=4x^2-2bx-2021=(2x)^2-b(2x)-2021$图像与$x$轴交点的横坐标为-1 和$2021$，

∴2x=-1,2x=2021，

∴$x=-\frac{1}{2}$，$x=\frac{2021}{2}$，

∴二次函数$y=4x^2-2bx-2021$的图像与x轴交点的横坐标为$-\frac{1}{2}$和$\frac{2021}{2}$．

【点睛】本题考查新定义函数，仔细阅读题目，抓住实质，抛物线与 x 轴交点横坐标和一元二次方程的根，利用“亲密函数”变形得出新函数图像与 x 轴的交点横坐标是解题关键．

【类型 2 二次函数与一次函数综合问题中的新定义问题】

1．（2023 春·九年级课时练习）定义：由 a，b 构造的二次函数$y=ax^2+(a+b)x+b$叫做一次函数 $y=ax+b$ 的“滋生函数”，一次函数 $y=ax+b$ 叫做二次函数$y=ax^2+(a+b)x+b$的“本源函数”（a，b 为常数，且$a\neq 0$）．若一次函数 $y=ax+b$ 的“滋生函数”是$y=ax^2-3x+a+1$，那么二次函数$y=ax^2-3x+a+1$的“本源函数”是______．

【答案】$y=-2x-1$

【分析】由“滋生函数”和“本源函数”的定义，运用待定系数法求出函数$y=ax^2-3x+a+1$的本源函数．

【详解】解：由题意得$\begin{cases}-3=a+b\\ a+1=b\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=-2\\ b=-1\end{cases}$

∴函数$y=ax^2-3x+a+1$的本源函数是$y=-2x-1$．

故答案为：$y=-2x-1$．

【点睛】本题考查新定义运算下的一次函数和二次函数的应用，解题关键是充分理解新定义“本源函数”．

2．（2023 春·浙江湖州·九年级统考期中）定义：如果函数图象上存在横、纵坐标相等的点，

则称该点为函数的不动点．例如，点$(1,1)$是函数$y=-2x+3$的不动点．已知二次函数$y=x^2+2(b+2)x+b^2$（b是实数）．

(1)若点$(-1,-1)$是该二次函数的一个不动点，求b的值；

(2)若该二次函数始终存在不动点，求b的取值范围．

【答案】(1)$1+\sqrt{3}$或$1-\sqrt{3}$

(2)$b\geq -\frac{3}{4}$

【分析】（1）根据“不动点”定义，建立方程求解即可；

（2）根据不动点的定义求出函数，再根据判别式计算即可．

【详解】（1）解：依题意把点$(-1,-1)$代入解析式$y=x^2+2(b+2)x+b^2$，

得$-1=1-2(b+2)+b^2$，化简得：$b^2-2b-2=0$，解得：$b_1=1+\sqrt{3},b_2=1-\sqrt{3}$；

（2）解：设点(t,t)是函数$y=x^2+2(b+2)x+b^2$的一个不动点，

则有$t=t^2+2(b+2)t+b^2$，化简得，$t^2+(2b+3)t+b^2=0$，

∵关于t的方程有实数解，

∴$\Delta=(2b+3)^2-4b^2\geq 0$，解得：$b\geq -\frac{3}{4}$．

【点睛】本题考查了二次函数与新定义“不动点”应用，涉及解一元二次方程、一元二次方程根的情况与判别式等知识，解题的关键是理解并利用新定义解决问题．

3．（2023·安徽·模拟预测）已知函数$y_1=2kx+k$与函数$y_2=x^2-2x+3$，定义“和函数”$y=y_1+y_2$．

(1)若$k=2$，则“和函数”$y=$____；

(2)若“和函数”y为$y=x^2+bx-2$，则$k=$____，$b=$____；

(3)若该“和函数”y的顶点在直线$y=-x$上，求k．

【答案】(1) x^2+2x+5.

(2) -5，-12.

(3) $k=3$ 或 -1.

【分析】(1) 将 $k=2$ 代入函数 $y_1=2kx+k$ 中得出函数 $y_1=4x+2$，再利用 $y=y_1+y_2$ 即可得出结论；

(2) y 的解析式为 $y=y_1+y_2=x^2+(2k-2)x+k+3$，又 $y=x^2+bx-2$，利用两者相等即可得出结论；

(3) 先得出和函数 $y=y_1+y_2=x^2+(2k-2)x+k+3=(x+k-1)^2-k^2+3k+2$，进而根据顶点在直线 $y=-x$ 上得出 $-k^2+3k+2=-(k-1)$，即可得出结论.

【详解】(1) 解：当 $k=2$ 时，$y_1=2kx+k=4x+2$，

∵函数 $y_2=x^2-2x+3$，此时和函数 $y=y_1+y_2$，

∴ $y=4x+2+x^2-2x+3=x^2+2x+5$，

故答案为：x^2+2x+5.

(2) 解：∵函数 $y_1=2kx+k$ 与函数 $y_2=x^2-2x+3$，和函数 $y=y_1+y_2$，

∴和函数 y 的解析式为 $y=y_1+y_2=x^2+(2k-2)x+k+3$，

∵和函数 y 的解析式为 $y=x^2+bx-2$，

∴ $b=2k-2$，$k+3=-2$，

∴ $k=-5$，$b=-12$，

故答案为：-5，-12.

(3) 解：由题意得和函数为

$y=y_1+y_2=x^2+(2k-2)x+k+3$，

$=(x+k-1)^2-k^2+3k+2$,

∴和函数的顶点为$(1-k,\ -k^2+3k+2)$,

∵和函数的顶点在$y=-x$上，

∴$-k^2+3k+2=-(1-k)$,

整理得$k^2-2k-3=0$,

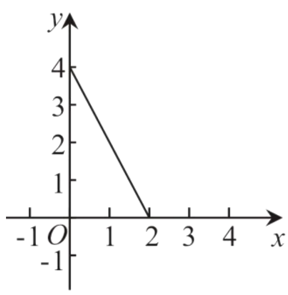
解得$k_1=3$, $k_2=-1$.

故答案为：$k=3$或-1.

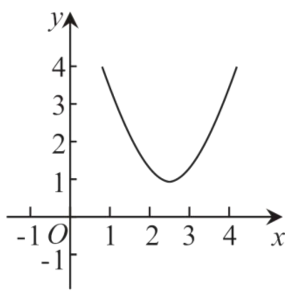
【点睛】此题主要考查了待定系数法求二次函数解析式、二次函数的顶点坐标、二次函数的性质，熟练掌握二次函数的性质是解本题的关键.

4.（2023·北京·模拟预测）城市的许多街道是相互垂直或平行的，因此，往往不能沿直线行走到达目的地，只能按直角拐弯的方式行走．可以按照街道的垂直和平行方向建立平面直角坐标系xOy，对两点$A(x_1,y_1)$和$B(x_2,y_2)$，用以下方式定义两点间距离：

$d(A,B)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$.



图①



图②

(1)①已知点$A(-2,1)$，则$d(O,A)=$______.

②函数$y=-2x+4(0\le x\le 2)$的图象如图①所示，B是图象上一点，$d(O,B)=3$，求点B的坐标.

(2)函数$y=x^2-5x+7(x\ge 0)$的图象如图②所示，D是图象上一点，求$d(O,D)$的最小值及对应的点D的坐标.

【答案】(1)①$3$，②$(1,2)$

(2)3，$(2,1)$

【分析】（1）①根据公式$d(A,B)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$直接计算即可；②根据函数$y=-2x+4(0\le x\le 2)$的图象上的点的横纵坐标均非负，可得$x_B\ge 0$，$y_B\ge 0$，$y_B=-2x_B+4$，再根据$d(O,B)=3$，可得$|0-x_B|+|0-y_B|=3$，即有$x_B+y_B=3$，进而可得$\begin{cases}y_B=-2x_B+4\\ x_B+y_B=3\end{cases}$，解方程即可求解；

（2）函数$y=x^2-5x+7$化为顶点式为：$y=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$，即可得$y\ge\frac{3}{4}$，$x\ge 0$，根据点$D$是图象上一点，可得$y_D\ge\frac{3}{4}$，$x_D\ge 0$，$y_D=x_D^2-5x_D+7$，则有$d(O,D)=|0-x_D|+|0-y_D|=x_D+y_D$，即可得$d(O,D)=(x_D-2)^2+3$，问题随之得解．

【详解】（1）①∵$A(-2,1)$，$O(0,0)$，

∴$d(O,A)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|=|0-(-2)|+|0-1|=3$，

故答案为：3；

②∵点 B 是函数$y=-2x+4(0\le x\le 2)$的图象点，

∵函数$y=-2x+4(0\le x\le 2)$的图象上的点的横纵坐标均非负，

∴$x_B\ge 0$，$y_B\ge 0$，$y_B=-2x_B+4$，

∴$d(O,B)=3$，

∴$|0-x_B|+|0-y_B|=3$，

∴$x_B+y_B=3$，

∴$y_B=-2x_B+4$，

∴$\begin{cases} y_B = -2x_B + 4 \\ x_B + y_B = 3 \end{cases}$，

解得：$\begin{cases} x_B = 1 \\ y_B = 2 \end{cases}$，

∴*B* 点坐标为：$(1,2)$，

（2）函数$y = x^2 - 5x + 7$化为顶点式为：$y = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$，

∴$y = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$，

∵$x \geq 0$，点D是图象上一点，

∴$y_D \geq \frac{3}{4}$，$x_D \geq 0$，$y_D = x_D^2 - 5x_D + 7$，

∴$d(O, D) = |0 - x_D| + |0 - y_D| = x_D + y_D$，

∴$d(O, D) = x_D + x_D^2 - 5x_D + 7 = x_D^2 - 4x_D + 7$，

∴$d(O, D) = (x_D - 2)^2 + 3$，

∴当$x_D = 2$时，$d(O, D)$有最小值，最小值为$d(O, D) = 3$，

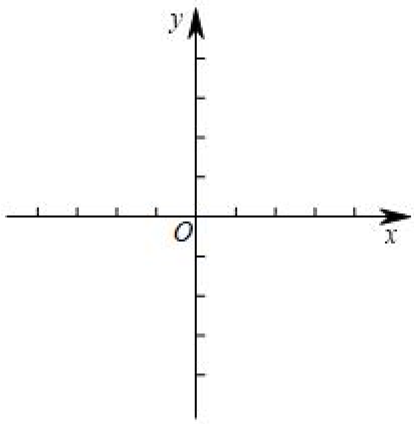
∴$y_D = x_D^2 - 5x_D + 7 = 2^2 - 5 \times 2 + 7 = 1$，

∴*D* 点坐标为：$(2,1)$，

即最小值为 3，*D* 点坐标为$(2,1)$.

【点睛】本题主要考查了二次函数的图象与性质，充分理解定义的两点间距离：$d(A, B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$，是解答本题的关键.

5．（2023 春·上海·九年级上海市民办新复兴初级中学校考期中）我们定义【a，b，c】为函数$y = ax^2 + bx + c$的“特征数”，如：函数$y = 2x^2 - 3x + 5$的“特征数”是【2，-3，5】，函数$y = x + 2$的“特征数”是【0，1，2】



(1)若一个函数的“特征数”是【1，-4，1】，将此函数图像先向左平移 2 个单位，再向上平移 1 个单位，得到一个图像对应的函数“特征数”是______；

(2)将“特征数”是【0，$-\frac{\sqrt{3}}{3}$，-1】的图像向上平移 2 个单位，得到一个新函数，这个函数的解析式是______；

(3)在（2）中，平移前后的两个函数图像分别与y轴交于 A、B两点，与直线$x=-\sqrt{3}$分别交于D、C两点，在给出的平面直角坐标系中画出图形，并求出以 A、B、C、D四点为顶点的四边形的面积；

(4)若（3）中的四边形与“特征数”是【1，$-2b$，$b^2+\frac{1}{2}$】的函数图像有交点，求满足条件的实数b的取值范围．

【答案】(1)【1，0，-2】

(2)$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$

(3)图见解析；面积为$2\sqrt{3}$

(4)$-\sqrt{3}-\frac{\sqrt{6}}{2}\le b\le\frac{\sqrt{2}}{2}$

【分析】(1）由已知可知$y=x^2-4x+1$，平移后的函数为$y=x^2-2$，则可求“特征数”；