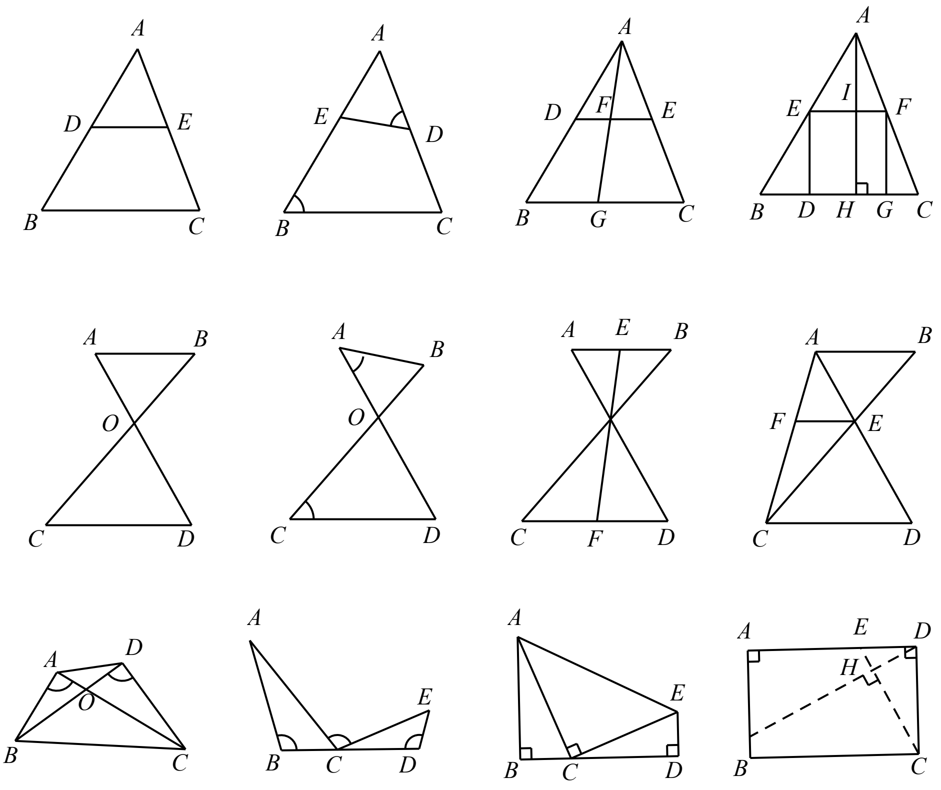
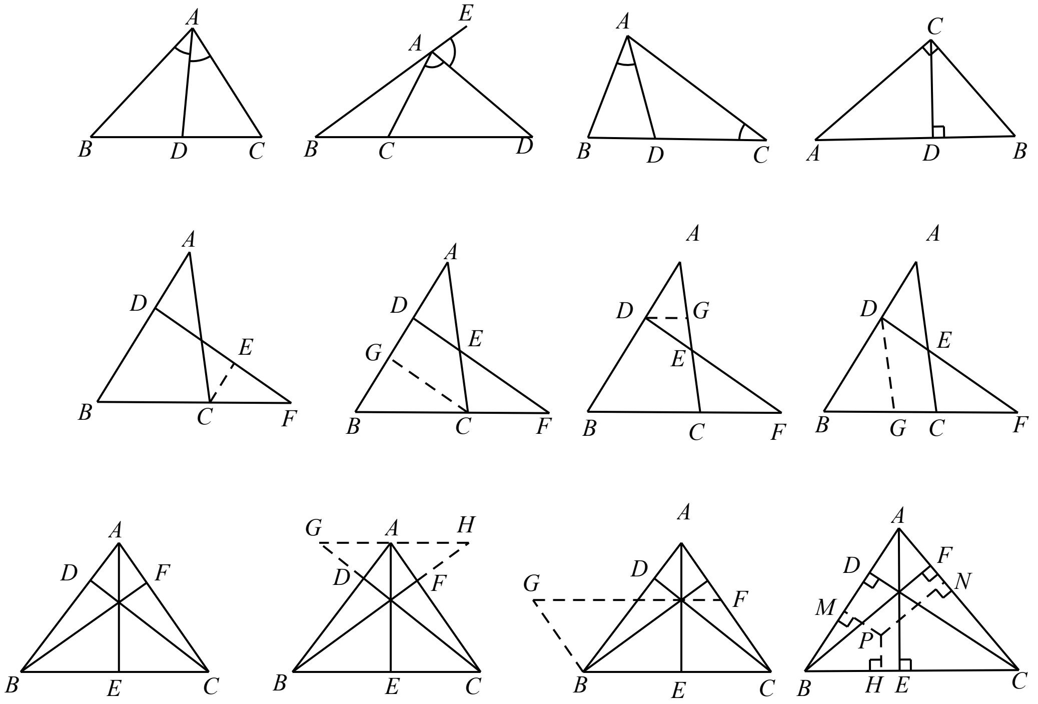
精锐教育学科教师辅导讲义

<table>
<tr><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>授课类型</td><td>T (相似三角形的基本类型。)</td><td>C （专题方法主题）</td><td>T （学法与能力主题）</td></tr>
<tr><td>授课日期时段</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="4">教学内容</td></tr>
</table>

一、同步知识梳理

知识点 1：相似证明中的基本模型

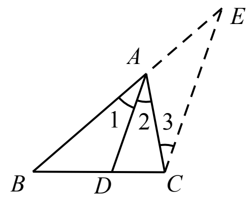




知识点 2：**相似证明中常见辅助线的作法**

在相似的证明中，常见的辅助线的作法是做平行线构造成比例线段或相似三角形，同时再结合等量代换得到要证明的结论．常见的等量代换包括等线代换、等比代换、等积代换等．

如图：AD 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于 D，求证：$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AC}$．



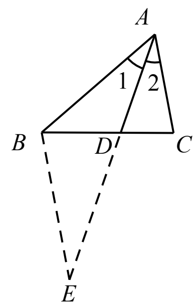
证法一：过 C 作 $CE \parallel AD$，交 BA 的延长线于 E．

$\therefore \angle 1=\angle E$，$\angle 2=\angle 3$．

$\because \angle 1=\angle 2$，$\therefore \angle 3=\angle E$．$\therefore AC=AE$．

$\because AD \parallel CE$，$\therefore \dfrac{BD}{DC}=\dfrac{BA}{BE}=\dfrac{BA}{AC}$．

点评：做平行线构造成比例线段，利用了“A”型图的基本模型．



证法二；过 B 作 AC 的平行线，交 AD 的延长线于 E .

$\therefore \angle 1=\angle 2=\angle E$ ，$\therefore AB=BE$.

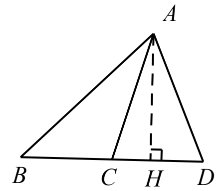
$\because BE \parallel AC$ ，$\therefore \dfrac{BD}{DC}=\dfrac{BE}{AC}=\dfrac{AB}{AC}$.

点评：做平行线构造成比例线段，利用了“X”型图的基本模型.

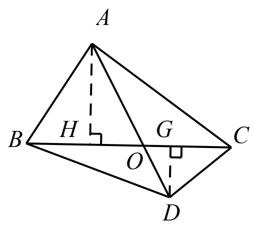
知识点 3：**相似证明中的面积法**

面积法主要是将面积的比，和线段的比进行相互转化来解决问题.

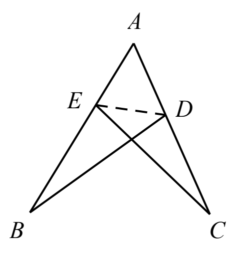
常用的面积法基本模型如下：



如图：$\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ACD}}=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AH}{\frac{1}{2}\cdot CD\cdot AH}=\dfrac{BC}{CD}$.



如图：$\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle BCD}}=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AH}{\frac{1}{2}\cdot BC\cdot DG}=\dfrac{AH}{DG}=\dfrac{AO}{OD}$.



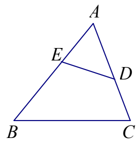
如图：$\dfrac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACE}}=\dfrac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle AED}}\cdot\dfrac{S_{\triangle AED}}{S_{\triangle ACE}}=\dfrac{AB}{AE}\cdot\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{AB\cdot AD}{AE\cdot AC}$.

。。。。。

二、同步题型分析

题型 1：与三角形有关的相似问题

例 1：如图，D、E 是 ΔABC 的边 AC、AB 上的点，且 $AD\cdot AC = AE\cdot AB$，求证：$\angle ADE = \angle B$．



解析：

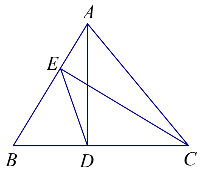
$\because AD\cdot AC = AE\cdot AB \quad \therefore \dfrac{AD}{AE}=\dfrac{AB}{AC}$

$\because \angle DAE = \angle BAC$

$\therefore \Delta DAE \backsim \Delta BAC$

$\therefore \angle ADE = \angle B$

例 2：如图，在 ΔABC 中，$AD\perp BC$ 于 D，$CE\perp AB$ 于 E，ΔABC 的面积是 ΔBDE 面积的 4 倍，$AC=6$，求 DE 的长.



解析：

$\because AD\perp BC$，$CE\perp AB$，$\angle ABD=\angle CBE$

$\therefore \Delta ABD \backsim \Delta CBE$

$\therefore \dfrac{BE}{BD}=\dfrac{BC}{AB}$

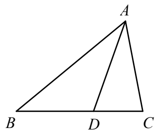
$\because \angle EBD=\angle CBA$

$\therefore \Delta BED \backsim \Delta BCA$

$\therefore \dfrac{DE}{AC}=\sqrt{\dfrac{S_{\Delta BED}}{S_{\Delta BCA}}}=\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow DE=\dfrac{1}{2}AC=3$

题型 2：相似中的角平分线问题

例 1：如图，AD 是 ΔABC 的角平分线，求证：$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{CD}$



解析：

过 C 作 $CE // AD$ 交直线 AB 于 E.

$\because CE // AD$，

$\therefore \angle 1=\angle E$，$\angle 2=\angle 3$

又 $\because AD$ 平分 $\angle BAC$，

$\therefore \angle 1=\angle 2$，

$\therefore \angle E=\angle 3$，

$\therefore AE=AC$，

由 $CE // AD$ 可得：$\dfrac{AB}{AE}=\dfrac{BD}{CD}$，

例 2：已知 ΔABC 中，$\angle BAC$ 的外角平分线交对边 BC 的延长线于 D，求证：$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{CD}$

解析：连接 AM，由已知条件可知 $\angle DAE=90°$，

$\angle ACM=\angle CAD+\angle ADC=\angle BAD+\angle DAC+\angle CAM=\angle BAM$，

又∵ $\angle AMC=\angle AMB$

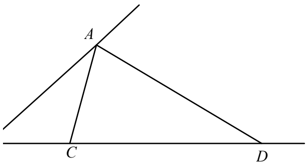
∴ $\Delta AMC \backsim \Delta BMA$，

∴ $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BM}{AM}$，$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AM}{CM}$

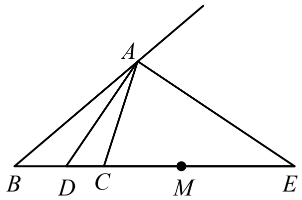
∴ $\dfrac{AB^2}{AC^2}=\dfrac{BM}{CM}$.

由 $CE\,//\,AD$ 可得：$\dfrac{}{AE}=\dfrac{}{CD}$，

∴ $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{CD}$



例 3：已知：AD、AE 分别为 ΔABC 的内、外角平分线，M 为 DE 的中点，求证：$\dfrac{AB^2}{AC^2}=\dfrac{BM}{CM}$



解析：

题型 3：$a^2=bc$ **型结论的证明**

例 1：如图，直角 ΔABC 中，$AB\perp AC$，$AD\perp BC$，证明：$AB^2=BD\cdot BC$，$AC^2=CD\cdot BC$，$AD^2=BD\cdot CD$.

解析：

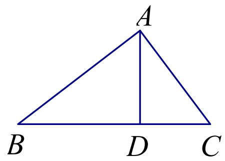
∵ $AB \perp AC$，$AD \perp BC$

∴ $\Delta ABD \backsim \Delta CAD \backsim \Delta CBA$

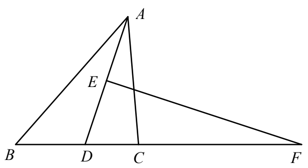
∵ $\Delta ABD \backsim \Delta CAD$

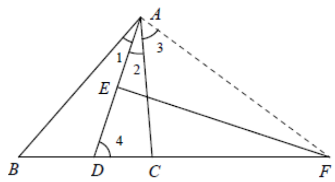
∴ $\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{CD} \Rightarrow AD^2 = BD \cdot CD$

同理可得，$\frac{BD}{AB} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AB^2 = BD \cdot BC$，$\frac{CD}{AC} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow AC^2 = CD \cdot BC$



例 2：如图，在 ΔABC 中，AD 平分 $\angle BAC$，AD 的垂直平分线交 AD 于 E，交 BC 的延长线于 F，求证：$FD^2 = FB \cdot FC$．





解析：

连接 AF

∵ EF 垂直平分 AD，∴ $AF = DF$，

∴ $\angle 4 = \angle DAF$，即 $\angle 4 = \angle 2 + \angle 3$，

又∵ $\angle 4 = \angle 1 + \angle B$，∴ $\angle 2 + \angle 3 = \angle 1 + \angle B$，

∵ AD 平分 $\angle BAC$，∴ $\angle 1 = \angle 2$，∴ $\angle 3 = \angle B$，

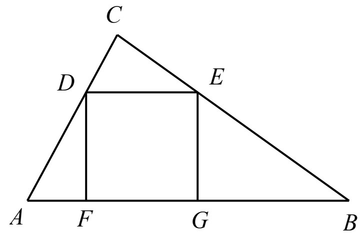
又∵ $\angle CFA = \angle AFB$，

∴ $\Delta CFA \backsim \Delta AFB$，∴ $FA^2 = FC \cdot FB$．

又∵ $AF = DF$，∴ $FD^2 = FB \cdot FC$

题型 4、三角形内接矩形问题

例1、 已知，如图，ΔABC 中，$AC = 3$，$BC = 4$，$\angle C = 90°$，四边形 $DEGF$ 为正方形，其中 D，E 在边 AC，BC 上，F，G 在 AB 上，求正方形的边长.



解析：

由勾股定理可求得 $AB=5$，由 $AB\cdot CH=AC\cdot BC$ 可得 $CH=2.4$．

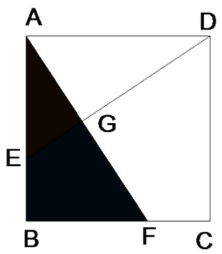
由 $\Delta CDE\backsim\Delta CAB$ 可得 $\frac{DE}{AB}=\frac{CI}{CH}$，

设正方形的边长为 x，则 $\frac{x}{5}=\frac{2.4-x}{2.4}$，解得 $x=\frac{60}{37}$．

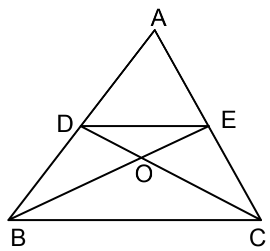
三、课堂达标检测

检测题 1：如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 E 在 AB 边上，且 AE∶EB＝2∶1，$AF\perp DE$ 于 G 交 BC 于 F，则△AEG 的面积与四边形 $BEGF$ 的面积之比为（　　）

A、1∶2　　*B*、1∶4　　*C*、4∶9　　*D*、2∶3



第 1 题图



第 2 题图

检测题 2、如图，已知 $DE/\!/BC$，CD 和 BE 相交于点 O，$S_{\Delta DOE}$∶$S_{\Delta COB}$＝4∶9，则 AE∶EC 为（

A、2∶1　　*B*、2∶3　　*C*、4∶9　　*D*、5∶4

检测题 3、在△ABC 中，D 为 AC 边上一点，$\angle DBC=\angle A$，$BC=\sqrt{6}$，AC＝3，则 CD 的长为（　）

A、1　　*B*、$\frac{3}{2}$　　*C*、2　　*D*、$\frac{5}{2}$

答案：1、*C*

2、*A*

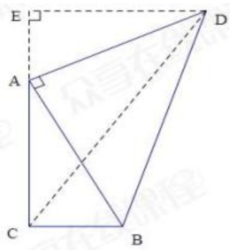
3、*C*

一、专题精讲

构造相似辅助线——双垂直模型

例 1：在△*ABC* 中，*AB*=$2\sqrt{5}$，*AC*=4，*BC*=2，以 *AB* 为边在 *C* 点的异侧作△*ABD*，使△*ABD* 为等腰直角三角形，求线段 *CD* 的长．

答案：解：情形一：



如图，当∠*DAB*= 90° 时：

连接 *CD*，过点 *D* 作 *AC* 边上的高线 *DE*，交 *CA* 的延长线于点 *E*

∵ $AB=2\sqrt{5}$，*AC*=4，*BC*=2

∴ $AC^2+BC^2=AB^2$，∠*ACB*= 90°

又∵ *DE*⊥*CE*，△*ABD* 为等腰直角三角形

∴ *AD*=*AB*，∠*ACB*=∠*E*= 90°，∠*EDA*+∠*EAD*= 90°，∠*BAC*+∠*EAD*= 90°

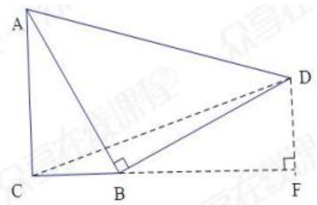
∴ ∠*BAC*=∠*EDA*

∴ △*EAD*≌△*CBA*

∴ *AE*=*BC*=2，*DE*=*AC*=4

∴ 在 Rt△*DEC* 中，$CD=\sqrt{ED^2+CE^2}=2\sqrt{13}$

情形二：



如图，当$\angle ABD=90°$时：

连接CD，过点D作BC边上的高线DF，交CB的延长线于点F

∵ $AB=2\sqrt{5}$，$AC=4$，$BC=2$

∴ $AC^2+BC^2=AB^2$，$\angle ACB=90°$

又∵ $DF\perp CF$，$\triangle ABD$为等腰直角三角形

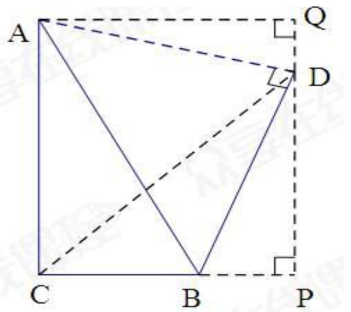
∴ $BD=AB$，$\angle ACB=\angle F=90°$，$\angle ABC+\angle FBD=90°$，$\angle BAC+\angle ABC=90°$

∴ $\angle BAC=\angle FBD$

∴ $\triangle FDB\cong\triangle CBA$

∴ $DF=BC=2$，$BF=AC=4$

∴ 在$Rt\triangle DFC$中，$CD=\sqrt{FD^2+CF^2}=2\sqrt{10}$



情形三：

如图，当$\angle ADB=90°$时：

连接CD，过点D作BC边上的高线DP，交CB的延长线于点P，过点A作直线PD边上的高线AQ，交PD于点Q

∵ $AB=2\sqrt{5}$，$AC=4$，$BC=2$

∴ $AC^2+BC^2=AB^2$，$\angle ACB=90°$

又∵ $DE\perp CE$，$\triangle ABD$为等腰直角三角形

∴ $AD=BD$，$\angle P=\angle Q=90°$，

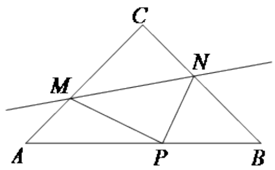
$\angle QDA+\angle QAD=90°$，$\angle QDA+\angle BDP=90°$

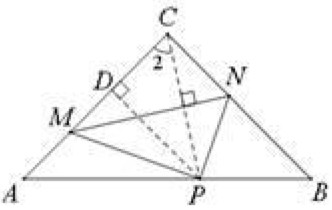
∴ $\angle QAD=\angle BDP$

∴ $\triangle QAD\cong\triangle PDB$

∴ $AQ=DP$，$DQ=BP$

例 2：在ΔABC中，$AC=BC$，$\angle ACB=90°$，点M是AC上的一点，点N是BC上的一点，沿着直线MN折叠，使得点C恰好落在边AB上的P点．求证：$MC:NC=AP:PB$．





答案：证明：方法一：

连接 PC，过点 P 作 $PD\perp AC$ 于 D，则 $PD//BC$

根据折叠可知 $MN\perp CP$

$\because\angle 2+\angle PCN=90^\circ$，$\angle PCN+\angle CNM=90^\circ$

$\therefore\angle 2=\angle CNM$

$\because\angle CDP=\angle NCM=90^\circ$

$\therefore\triangle PDC\backsim MCN$

$\therefore MC:CN=PD:DC$

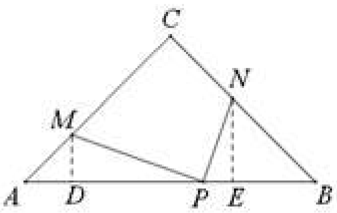
$\because PD=DA$

$\therefore MC:CN=DA:DC$

$\because PD//BC$

$\therefore DA:DC=PA:PB$

$\therefore MC:CN=PA:PB$



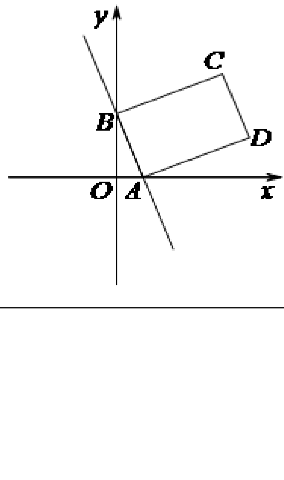
方法二：如图，

过 M 作 $MD\perp AB$ 于 D，过 N 作 $NE\perp AB$ 于 E

由双垂直模型，可以推知$\triangle PMD\backsim NPE$，则 $\frac{MD}{PE}=\frac{PD}{NE}=\frac{PM}{PN}$，

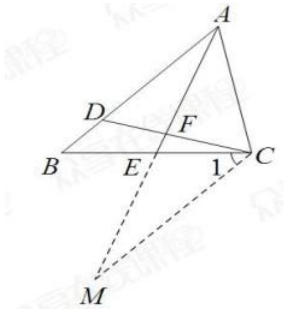
根据等比性质可知 $\frac{MD+PD}{PE+NE}=\frac{PM}{PN}$，而 $MD=DA$，$NE=EB$，$PM=CM$，$PN=CN$， $\therefore MC:CN=PA:PB$

例 3：已知，如图，直线 $y=-2x+2$ 与坐标轴交于 A、B 两点．以 AB 为短边在第一象限做一个矩形 $ABCD$，使得矩形的两边之比为 1∶2。 求 C、D 两点的坐标。

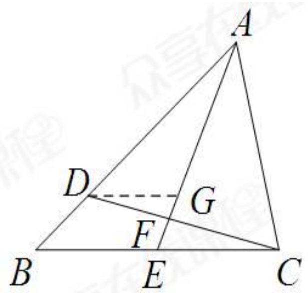


构造相似辅助线——A、X字型

例 4：如图：$\triangle ABC$ 中，D 是 AB 上一点，$AD=AC$，BC 边上的中线 AE 交 CD 于 F。求证：

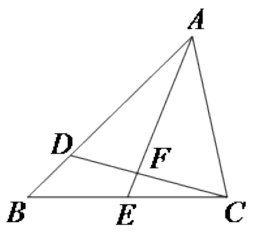


$\frac{AB}{AC}=\frac{CF}{DF}$ **答案：**证明：（方法一）如图延长 AE 到 M 使得 $EM=AE$，连接 CM $\because BE=CE$，$\angle AEB=\angle MEC$ $\therefore$ $\triangle BEA\cong\triangle CEM$ $\therefore CM=AB$，$\angle 1=\angle B$ $\therefore AB\parallel CM$ $\therefore\angle M=\angle MAD$，$\angle MCF=\angle ADF$ $\therefore\triangle MCF\backsim\triangle ADF$ $\therefore\frac{CF}{DF}=\frac{CM}{AD}$ $\because CM=AB$，$AD=AC$ $\therefore\frac{CF}{DF}=\frac{CM}{AD}=\frac{AB}{AC}$（方法二）

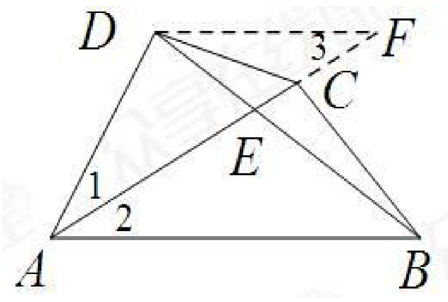


过 D 作 $DG\parallel BC$ 交 AE 于 G 则$\triangle ABE\backsim\triangle ADG$，$\triangle CEF\backsim\triangle DGF$ $\therefore$ $\frac{AB}{AD}=\frac{BE}{DG}$，$\frac{CF}{DF}=\frac{CE}{DG}$ $\because AD=AC$，$BE=CE$

$\therefore \frac{CF}{DF}=\frac{BE}{DG}=\frac{AB}{AC}$



例 5：四边形 *ABCD* 中，*AC* 为 *AB*、*AD* 的比例中项，且 *AC* 平分∠*DAB*。 求证：$\frac{BE}{DE}=\frac{BC^2}{CD^2}$ **答案**：证明：



过点 *D* 作 *DF*∥*AB* 交 *AC* 的延长线于点 *F*，则∠2=∠3 ∵*AC* 平分∠*DAB* ∴∠1=∠2 ∴∠1=∠3 ∴*AD*=*DF* ∵∠*DEF*=∠*BEA*，∠2=∠3 ∴△*BEA*∽△*DEF* ∴ $\frac{BE}{DE}=\frac{AB}{DF}$ ∵*AD*=*DF* ∴ $\frac{BE}{DE}=\frac{AB}{AD}$ ∵*AC* 为 *AB*、*AD* 的比例中项 ∴ $AC^2=AB\cdot AD$

即 $\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{AC}{AB}$

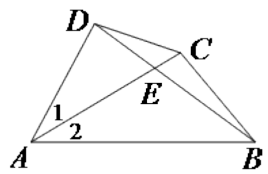
又∵∠1=∠2

∴△*ACD*∽△*ABC*

∴ $\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{CD}{BC}$

∴ $\dfrac{BC^2}{CD^2}=\dfrac{AB\cdot AC}{AC\cdot AD}=\dfrac{AB}{AD}$

∴ $\dfrac{BC^2}{CD^2}=\dfrac{BE}{DE}$

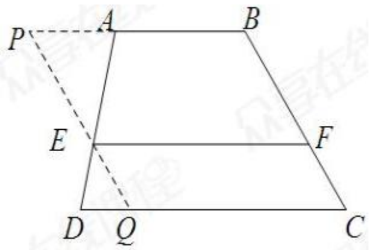


例 6：在梯形 *ABCD* 中，*AB*∥*CD*，*AB*＝*b*，*CD*＝*a*，*E* 为 *AD* 边上的任意一点，*EF*∥*AB*，且 *EF* 交 *BC* 于点 *F*，某同学在研究这一问题时，发现如下事实：

(1)当 $\dfrac{DE}{AE}=1$ 时，*EF*= $\dfrac{a+b}{2}$ ；(2)当 $\dfrac{DE}{AE}=2$ 时，*EF*= $\dfrac{a+2b}{3}$ ；

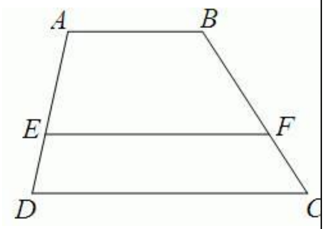
(3)当 $\dfrac{DE}{AE}=3$ 时，*EF*= $\dfrac{a+3b}{4}$ ．当 $\dfrac{DE}{AE}=k$ 时，参照上述研究结论，请你猜想用 *a*、*b* 和 *k* 表示 *EF* 的一般结论，并给出证明．

答案：

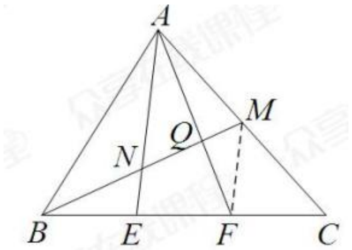


证明： 过点 *E* 作 *PQ*∥*BC* 分别交 *BA* 延长线和 *DC* 于点 *P* 和点 *Q* ∵*AB*∥*CD*，*PQ*∥*BC* ∴四边形 *PQCB* 和四边形 *EQCF* 是平行四边形 ∴*PB* ＝*EF* ＝*CQ*， $\dfrac{DQ}{AP}=\dfrac{DE}{AE}=k$ 又∵*AB*＝*b*，*CD*＝*a* ∴*AP*＝*PB*-*AB*＝*EF*-*b*，*DQ*＝*DC*-*QC*＝*a*-*EF* ∴ $\dfrac{a-EF}{EF-b}=k$

$\therefore EF=\dfrac{a+bk}{k+1}$



例 7：已知：如图，在△*ABC* 中，*M* 是 *AC* 的中点，*E*、*F* 是 *BC* 上的两点，且 *BE*＝*EF*＝*FC*。求 *BN*：*NQ*：*QM*.

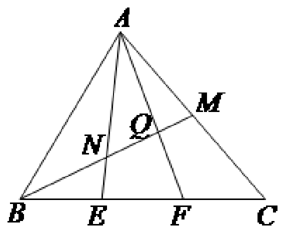


答案：解：

连接 *MF*

∵*M* 是 *AC* 的中点，*EF*＝*FC*

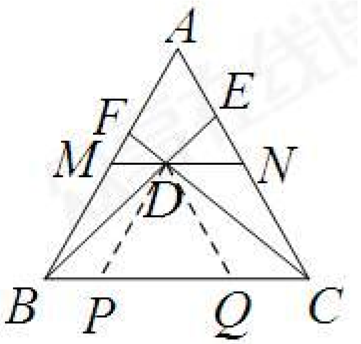
∴*MF*∥*AE* 且 *MF*＝$\frac{1}{2}$*AE*∴△*BEN*∽△*BFM*∴*BN*：*BM*＝*BE*：*BF*＝*NE*：*MF*∵*BE*＝*EF*∴*BN*：*BM*＝*NE*：*MF*＝1:2　∴*BN*：*NM*＝1:1　设 *NE*＝*x*，则 *MF*＝2*x*，*AE*＝4*x*∴*AN*＝3*x*∵*MF*∥*AE*∴△*NAQ*∽△*MFQ*∴*NQ*：*QM*＝*AN*：*MF*＝3:2　∵*BN*：*NM*＝1:1，*NQ*：*QM*＝3:2　∴*BN*：*NQ*：*QM*＝5:3:2



相似类定值问题

例 8：如图，在等边△ABC 中，M、N 分别是边 AB，AC 的中点，D 为 MN 上任意一点，BD、CD 的延长线分别交 AC、AB 于点 E、F.

求证：$\frac{1}{CE}+\frac{1}{BF}=\frac{3}{AB}$.



答案：证明：

如图，作 $DP\parallel AB$，$DQ\parallel AC$

则四边形 $MDPB$ 和四边形 $NDQC$ 均为平行四边形且△DPQ 是等边三角形

∴$BP+CQ=MN$，$DP=DQ=PQ$

∵M、N 分别是边 AB，AC 的中点

∴$MN=\frac{1}{2}BC=PQ$

∵$DP\parallel AB$，$DQ\parallel AC$

∴△CDP∽△CFB，△BDQ∽△BEC

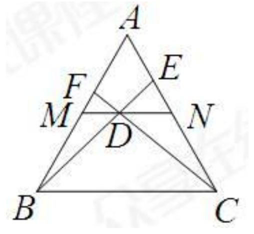
∴$\frac{DP}{BF}=\frac{CP}{BC}$，$\frac{DQ}{CE}=\frac{BQ}{BC}$

∴$\frac{DP}{BF}+\frac{DQ}{CE}=\frac{CP}{BC}+\frac{BQ}{BC}=\frac{BC+PQ}{BC}=\frac{3}{2}$

∵$DP=DQ=PQ=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AB$

∴$\frac{1}{2}AB$（$\frac{1}{CE}+\frac{1}{BF}$）$=\frac{3}{2}$

∴$\frac{1}{CE}+\frac{1}{BF}=\frac{3}{AB}$



例 9：已知：如图，梯形 $ABCD$ 中，$AB//DC$，对角线 AC、BD 交于 O，过 O 作 $EF//AB$ 分别交 AD、BC 于 E、F。

求证：$\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}=\frac{1}{EO}$.

答案：证明：$\because EF//AB$，$AB//DC$

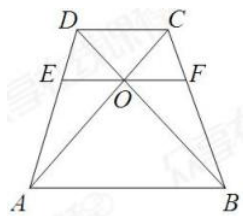
$\therefore EF//DC$

$\therefore \triangle AOE \backsim \triangle ACD$，$\triangle DOE \backsim \triangle DBA$

$\therefore \frac{EO}{CD}=\frac{AE}{AD}$，$\frac{EO}{AB}=\frac{DE}{AD}$

$\therefore \frac{EO}{CD}+\frac{EO}{AB}=\frac{AE}{AD}+\frac{DE}{AD}=1$

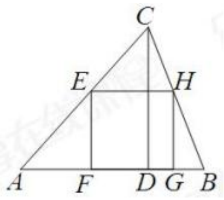
$\therefore \frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}=\frac{1}{EO}$



例:10：如图，在$\triangle ABC$ 中，已知 CD 为边 AB 上的高，正方形 $EFGH$ 的四个顶点分别在$\triangle ABC$ 上。

求证：$\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}=\frac{1}{EF}$.

答案：证明：$\because EF \parallel CD$，$EH \parallel AB$ $\therefore \angle AFE=\angle ADC$，$\angle CEH=\angle A$ $\because \angle A=\angle A$，$\angle ECH=\angle BCA$ $\therefore \triangle AFE \backsim \triangle ADC$，$\triangle CEH \backsim \triangle CAB$ $\therefore \frac{AE}{AC}=\frac{EF}{CD}$，$\frac{CE}{AC}=\frac{EH}{AB}$ $\because EF=EH$ $\therefore$ $\frac{EH}{AB}+\frac{EF}{CD}=\frac{EF}{AB}+\frac{EF}{CD}=\frac{CE}{AC}+\frac{AE}{AC}=1$ $\therefore \frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}=\frac{1}{EF}$



例 11：已知，在△*ABC* 中作内接菱形 *CDEF*，设菱形的边长为 *a*．求证：$\frac{1}{AC}+\frac{1}{BC}=\frac{1}{a}$．

.**答案**：证明：∵*EF*∥*AC*，*DE*∥*BC*

∴$\angle BFE=\angle BCA$，$\angle AED=\angle ABC$

∵$\angle A=\angle A$，$\angle B=\angle B$

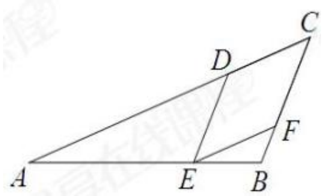
∴△*BFE*∽△*BCA*，△*AED*∽△*ABC*

∴$\frac{BE}{AB}=\frac{EF}{AC}$，$\frac{DE}{BC}=\frac{AE}{AB}$

∴$\frac{EF}{AC}+\frac{DE}{BC}=\frac{BE}{AB}+\frac{AE}{AB}=\frac{AE+BE}{AB}=1$

∵*EF*＝*DE*＝*a*

∴$\frac{1}{AC}+\frac{1}{BC}=\frac{1}{a}$

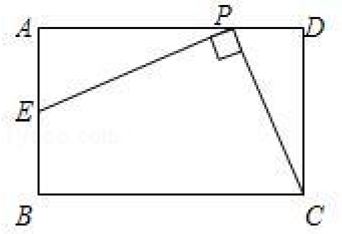


一线三角等题型：

例 12（2010 年绍兴中考）如图，已知在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$BC=3$，P 是线段 AD 边上的任意一点（不含端点 A、D），连接 PC，过点 P 作 $PE\perp PC$ 交 AB 于 E．

（1）在线段 AD 上是否存在不同于 P 的点 Q，使得 $QC\perp QE$？若存在，求线段 AP 与 AQ 之间的数量关系；若不存在，请说明理由；

（2）当点 P 在 AD 上运动时，对应的点 E 也随之在 AB 上运动，求 BE 的取值范围．



解：（1）假设存在这样的点 Q；

∵$PE\perp PC$，

∴$\angle APE+\angle DPC=90°$，

∵$\angle D=90°$，

∴$\angle DPC+\angle DCP=90°$，

∴$\angle APE=\angle DCP$，

又∵$\angle A=\angle D=90°$，

∴$\triangle APE\backsim\triangle DCP$，

∴$\frac{AP}{DC}=\frac{AE}{DP}$，

∴$AP\bullet DP=AE\bullet DC$；

同理可得 $AQ\bullet DQ=AE\bullet DC$；

∴$AQ\bullet DQ=AP\bullet DP$，即 $AQ\bullet$（$3-AQ$）$=AP\bullet$（$3-AP$），

∴$3AQ-AQ^2=3AP-AP^2$，

∴$AP^2-AQ^2=3AP-3AQ$，

∴（$AP+AQ$）（$AP-AQ$）$=3$（$AP-AQ$）；

∵$AP\neq AQ$，

∴$AP+AQ=3$（2 分）

∵$AP\neq AQ$，

∴$AP\neq\frac{3}{2}$，即 P 不能是 AD 的中点，

∴当 P 是 AD 的中点时，满足条件的 Q 点不存在．

当 P 不是 AD 的中点时，总存在这样的点 Q 满足条件，此时 $AP+AQ=3$．（1 分）

（2）设 $AP=x$，$AE=y$，由 $AP\bullet DP=AE\bullet DC$ 可得 x（$3-x$）$=2y$，

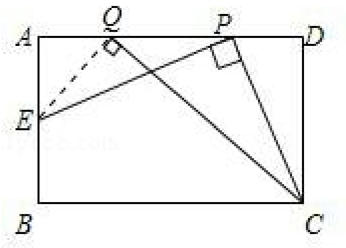
$\therefore y=\frac{1}{2}x(3-x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x=-\frac{1}{2}(x-\frac{3}{2})^2+\frac{9}{8}$,

∴当 $x=\frac{3}{2}$（在 $0<x<3$ 范围内）时，$y_{最大值}=\frac{9}{8}$;

而此时 BE 最小为$\frac{7}{8}$,

又∵E 在 AB 上运动，且 $AB=2$，

∴BE 的取值范围是$\frac{7}{8}\le BE<2$.（2 分）

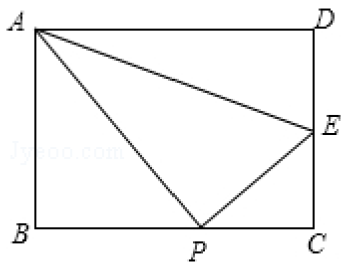


例 13（2012 年宁夏中考）在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$AD=3$，P 是 BC 上的任意一点（P 与 B、C 不重合），过点 P 作 $AP\perp PE$，垂足为 P，PE 交 CD 于点 E.

（1） 连接 AE，当 ΔAPE 与 ΔADE 全等时，求 BP 的长;

（2） 若设 BP 为 x，CE 为 y，试确定 y 与 x 的函数关系式．当 x 取何值时，y 的值最大？最大值是多少？

（3） 若 $PE\parallel BD$，试求出此时 BP 的长.



解:（1）∵$\Delta APE\cong\Delta ADE$（已知），$AD=3$（已知），

∴$AP=AD=3$（全等三角形的对应边相等）;

在 $Rt\Delta ABP$ 中，$BP=\sqrt{AP^2-AB^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$（勾股定理）;

（2）∵$AP\perp PE$（已知），

∴$\angle APB+\angle CPE=\angle CPE+\angle PEC=90°$,

∴$\angle APB=\angle PEC$,

又∵$\angle B=\angle C=90°$,

∴$Rt\Delta ABP\backsim Rt\Delta PCE$,