# 2021-2022学年辽宁省名校联盟高三（上）联考数学试卷（10月份）

**一、单选题（本大题共8小题，共40.0分）**

1. 已知集合$A=\{x|\frac{x\ \ 2}{x}\leq 0\}$，集合$B=\{x|e^{x\ \ 1}>1\}$，$A\cap(\complement_R B)=(\quad)$

A. $(1,2]$　　B. $(0,2]$　　C. $(0,1]$　　D. $[0,1]$

2. “$lna>lnb$”是“$\frac{a}{b}>1$”的(　)条件

A. 充分不必要　　B. 必要不充分

C. 充分必要　　D. 既不充分也不必要

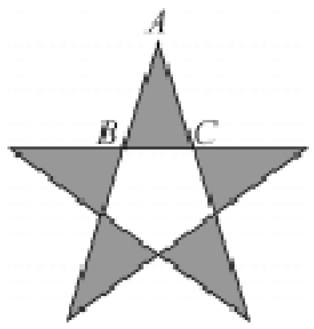
3. 已知复数$z=(\frac{1\ \ i}{1\ \ i})^{2021}\quad(\frac{1\ \ i}{1\ \ i})^{2022}$，则$z$的共轭复数$\bar{z}=(\quad)$

A. $1\quad i$　　B. $1\quad i$　　C. $\quad 1\quad i$　　D. $\quad 1\quad i$

4. 已知平面向量$\vec{a}=(1,2)$，$\vec{b}=(0,2)$，$\vec{c}=(2,1)$，若$(\vec{a}\quad\lambda\vec{b})//\vec{c}$，则$\lambda=(\quad)$

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{5}{4}$　　D. $2$

5. 人们通常把顶角为$36°$的等腰三角形称为黄金三角形，因为它的底边和腰长的比值等于黄金分割比$\frac{\sqrt{5}\ \ 1}{2}$，我们熟悉的五角星就是由5个黄金三角形和1个正五边形组成的，如图，$\triangle ABC$就是一个黄金三角形，根据以上信息，可得$sin54°=(\quad)$




A. $\frac{1\ \ \sqrt{5}}{4}$　　B. $\frac{3\ \ \sqrt{5}}{8}$　　C. $\frac{4\ \ \sqrt{5}}{8}$　　D. $\frac{2\sqrt{5}\ \ 1}{4}$

6. 2021年5月11日，全国第七次人口普查的结果正式公布，截止到2020年，全国人口总数约为14亿，下列各选项的数字与14亿最接近的是(　)(参考数据：$e\approx 2.718$，$ln2\approx 0.7$，$ln5\approx 1.6$，$ln7\approx 1.9$)

A. $e^{19.11}$　　B. $e^{20.03}$　　C. $e^{21.06}$　　D. $e^{22.11}$

7. 已知函数$f(x)=x^2\quad 4x$，$g(x)=\frac{x^2\ \ 5}{\sqrt{x^2\ \ 1}}$，若对于$\forall x_1\in[a,a\quad 1]$，$\exists x_2\in[0,2\sqrt{2}]$，使得$f(x_1)\leq g(x_2)$，则$a$的取值范围是(　)

A. $[\quad 1,4]$　　B. $[\frac{6\ \ 5\sqrt{3}}{3},\frac{3\ \ 5\sqrt{3}}{3}]$

C. $[2\quad 2\sqrt{2},1\quad 2\sqrt{2}]$　　D. $[0,3]$

8. 已知函数$f(x)=a(x\quad cosx)\quad e^x$在$(0,\pi)$上恰有两个极值点，则$a$的取值范围是(　)

A. $(0,1)$　　B. $(\quad\infty,e^{\pi})$　　C. $(0,e^{\quad\pi})$　　D. $(e^{\pi},\quad\infty)$

## 二、多选题（本大题共 4 小题，共 20.0 分）

9. 下列说法正确的有( )

A. 命题$\exists x<0$，$x^2+x+1<0$的否定是$\forall x<0$，$x^2+x+1\geq 0$

B. 若复数$z_1$，$z_2$满足$|z_1|=|z_2|$，则$z_1^2=z_2^2$

C. 若平面向量$\bar{a}$，$\bar{b}$满足$|\bar{a}|=|\bar{b}|$，则$\bar{a}^2=\bar{b}^2$

D. 在$\triangle ABC$中，若$tanAtanB>1$，则$\triangle ABC$为锐角三角形

10. 已知等差数列$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n$，且满足$a_{2022}>0$，$a_{2021}+a_{2022}<0$，则( )

A. 数列$\{a_n\}$是递增数列

B. 数列$\{S_n\}$是递增数列

C. $S_n$的最小值是$S_{2021}$

D. 使得$S_n$取得最小正数的$n=4042$

11. 著名数学家欧拉提出了如下定理：三角形的外心、重心、垂心依次位于同一直线上，且重心到外心的距离是重心到垂心距离的一半，此直线被称为三角形的欧拉线，该定理被称为欧拉线定理．已知$\triangle ABC$的外心为$O$，重心为$G$，垂心为$H$，$M$为$BC$中点，且$AB=4$，$AC=2$，则下列各式正确的有( )

A. $\overline{AG}\cdot\overline{BC}=4$

B. $\overline{AO}\cdot\overline{BC}=-6$

C. $\overline{OH}=\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}$

D. $\overline{AB}+\overline{AC}=4\,\overline{OM}+2\,\overline{HM}$

12. 已知定义在$R$上的函数$f(x)$图像连续，满足$f(x)-f(-x)=6sinx-2x$，且$x>0$时，$f'(x)<3cosx-1$恒成立，则不等式$f(x)\geq f(x-\frac{\pi}{3})-\frac{\pi}{3}+3sin(x+\frac{\pi}{3})$中的$x$可以是( )

A. $-\frac{\pi}{6}$

B. $0$

C. $\frac{\pi}{6}$

D. $\frac{\pi}{3}$

## 三、单空题（本大题共 4 小题，共 20.0 分）

13. 写出一个同时具有下列性质①②③的数列$\{a_n\}$，①无穷数列；②递减数列；③每一项都是正数，则$a_n=$______.

14. 已知函数$f(x)$是定义在$R$上的奇函数，满足$f(x+2)=-f(x)$，当$x\in[-1,0]$，$f(x)=e^x-1$，则$f(2021)=$______.

15. 已知函数$f(x)=4cos\omega xsin(\omega x+\frac{\pi}{6})(\omega>0)$在$x\in(0,\pi)$上恰有2个极大值点，则$\omega$的取值范围是______.

16. 已知正数$x$，$y$满足$xy^2(x+6y)=1$，当$x=$______时，$x+3y$取得最小值，最小值是______.

## 四、解答题（本大题共 6 小题，共 70.0 分）

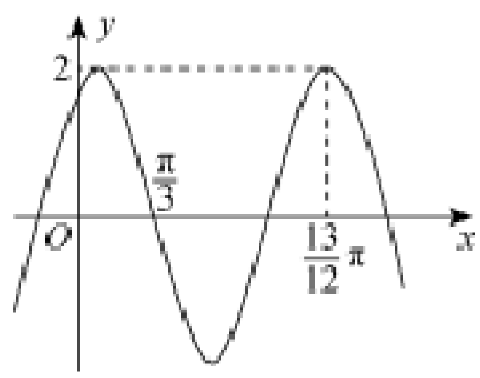
17. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_3=\frac{1}{6}$，$a_{n\quad 1}=\frac{a_n}{2a_n\quad 1}$.

(1)求证：数列$\{\frac{1}{a_n}\}$是等差数列，并求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若_____，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$.

(在①$b_n=a_na_{n\quad 1}$；②$b_n=\frac{(\quad 1)^n}{a_n}$；③$b_n=\frac{1}{a_n}\quad(\frac{1}{3})^{\frac{1}{a_n}}$三个条件中选择一个补充在第(2)问中，并对其求解)

18. 已知函数$f(x)=Asin(\omega x\quad\varphi)(A>0,\omega>0,0\leq\varphi\leq\pi)$的图像如图所示.




(1)求函数$f(x)$的解析式；

(2)将函数$f(x)$的图像上每一点的横坐标缩短为原来的$\frac{1}{2}$，再向右平移$\frac{\pi}{8}$个单位，再向上平移1个单位，得到函数$g(x)$的图像，求函数$g(x)$图像的对称轴方程和对称中心坐标.

19. 已知$\triangle ABC$的内角$A$，$B$，$C$的对边分别为$a$，$b$，$c$，且三条边的长度$a$，$b$，$c$是三个连续的正整数$(a<b<c)$.

(1)若$\triangle ABC$是直角三角形，且$\angle ACB$的平分线交$AB$于点$D$，求$CD$的长；

(2)若$\triangle ABC$是钝角三角形，求$\triangle ABC$的面积.

20. 已知正项等比数列$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n$，满足$a_1 = 1$，$S_{n\ \ 2} - 2S_{n\ \ 1} = S_n - 2S_{n-1}(n \geq 2)$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)求数列$\{\frac{2n\ \ 1}{a_n}\}$前$n$项和$T_n$；

(3)在(2)的条件下，若$\forall n \in N\ $，$T_n \geq 10(1 - \frac{1}{a_n}) - \lambda$，求$\lambda$的最小值.

21. 已知函数$f(x) = (x^2 - 2x)e^x \quad 2ex - e^2 lnx$.

(1)求$f(x)$在点$(1, f(1))$处的切线方程；

(2)求证：$f(x) > 0$.

22. 已知函数$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - (2a \quad 1)x^2 \quad 4ax \quad \frac{16}{3}a^2$.

(1)讨论$f(x)$的单调性；

(2)若$f(x)$只有1个零点$x_0$，且$x_0 < 0$，求$a$的取值范围；

(3)当$a = -\frac{1}{4}$时，是否存在正整数$k$，使得关于$x$的方程$|f(sinx) \quad f(cosx)| = k$有

解？如果存在，求出$k$的值；如果不存在，说明理由．

# 答案和解析

1.【答案】$C$

【解析】解：$\because$集合$A=\{x|\frac{x\ \ 2}{x}\le 0\}=\{x|0<x\le 2\}$，

集合$B=\{x|e^{x\ \ 1}>1\}=\{x|x>1\}$，

$\therefore \complement_R B=\{x|x\le 1\}$，

$A\cap(\complement_R B)=\{x|0<x\le 1\}=(0,1]$.

故选：$C$.

求出集合$A$，集合$B$，从而求出$\complement_R B$，由此能求出$A\cap(\complement_R B)$.

本题考查集合的运算，考查并集、补集定义、不等式性质等基础知识，考查运算求解能力，是基础题.

2.【答案】$A$

【解析】解：由题意可得$lna>lnb$等价于$a>b>0$，即有$\frac{a}{b}>1$成立，

而由$\frac{a}{b}>1$不一定可推得$lna>lnb$，如$a=\ \ 2$，$b=\ \ 1$，$lna$，$lnb$没有意义，

所以“$lna>lnb$”是“$\frac{a}{b}>1$”的充分不必要条件，

故选：$A$.

由题意可得$lna>lnb$等价于$a>b>0$，反之可以举例说明不成立，即可判断出结论.

本题考查了对数函数的单调性、简易逻辑的判定方法，考查了推理能力了与计算能力，属于基础题.

3.【答案】$C$

【解析】解：$\because \frac{1\ \ i}{1\ \ i}=\ \ i$，$\frac{1\ \ i}{1\ \ i}=i$，

$\therefore z=(\frac{1\ \ i}{1\ \ i})^{2021}\ \ (\frac{1\ \ i}{1\ \ i})^{2022}=(\ \ i)^{2021}\ \ i^{2022}=\ \ i^{2021}\ \ (i^2)^{1011}=\ \ i\cdot(i^2)^{1010}$

$(\ \ 1)=\ \ i\ \ (\ \ 1)=\ \ 1\ \ i$，

$\therefore z$的共轭复数$\bar{z}=\ \ 1\ \ i$，

故选：$C$.

利用复数的四则运算先化简$\frac{1\quad i}{1\quad i}$，$\frac{1\quad i}{1\quad i}$，再代入复数$z$中，利用$i^2 = \quad 1$化简复数$z$，从而求出$z$的共轭复数$\bar{z}$.

本题主要考查了复数的四则运算，考查了共轭复数的概念，是基础题.

4.【答案】$B$

【解析】解：根据题意，向量$\bar{a} = (1,2)$，$\bar{b} = (0,2)$，$\bar{c} = (2,1)$，

则$\bar{a} \quad \lambda\bar{b} = (1,2 \quad 2\lambda)$，

若$(\bar{a} \quad \lambda\bar{b})//\bar{c}$，则有$2(2 \quad 2\lambda) = 1$，

解可得：$\lambda = \frac{3}{4}$，

故选：$B$.

根据题意，求出$\bar{a} \quad \lambda\bar{b}$的坐标，进而可得$2(2 \quad 2\lambda) = 1$，解可得答案.

本题考查向量平行的坐标表示，涉及向量的坐标，属于基础题.

5.【答案】$A$

【解析】解：由$\frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{5} \quad 1}{2}$.$\triangle ABC$为等腰三角形且顶角$36°$，

所以$sin18° = \frac{\sqrt{5} \quad 1}{4}$，$sin54° = cos36° = 1 \quad 2sin^2 18° = \frac{\sqrt{5} \quad 1}{4}$，

故选：$A$.

由顶角是$36°$的等腰三角形底边与腰的比值可得$18°$的正弦值，再由诱导公式可得$sin54° = cos36°$，再由二倍角公式，求出$54°$的正弦值.

本题考查黄金三角形的性质的应用及诱导公式和二倍角公式的应用，属于基础题.

6.【答案】$C$

【解析】解：$\because 1400000000 = 2 \times 7 \times 10^8 = 2^9 \times 7 \times 5^8$，

$\therefore \ln(2^9 \times 7 \times 5^8) = ln2^9 \quad ln7 \quad ln5^8 = 9ln2 \quad ln7 \quad 8ln5 \approx 9 \times 0.7 \quad 1.9 \quad 8 \times 1.6 = 21$.

故选：$C$.

根据已知条件，结合对数函数的公式，即可求解.

本题主要考查函数的实际应用，掌握对数函数公式是解本题的关键，属于基础题．

7.【答案】$A$

【解析】解：$g(x)=\frac{x^2\quad 5}{\sqrt{x^2\quad 1}}=\sqrt{x^2\quad 1}\quad \frac{4}{\sqrt{x^2\quad 1}}$，$x\in[0,2\sqrt{2}]$，

令$t=\sqrt{x^2\quad 1}$，则$t\in[1,3]$，

则$h(t)=t\quad \frac{4}{t}$，$t\in[1,3]$，

因为$h(t)$在$[1,2]$上单调递减，在$[2,3]$上单调递增，

所以$h(t)_{min}=h(2)=4$，又$h(1)=5$，$h(3)=\frac{13}{3}$，

所以$h(t)_{max}=5$，

所以$g(x)_{min}=4$，$g(x)_{max}=5$，

因为对于$\forall x_1\in[a,a\quad 1]$，$\exists x_2\in[0,2\sqrt{2}]$，使得$f(x_1)\leq g(x_2)$，

所以$f(x)_{min}\leq g(x)_{min}=4$，$f(x)_{max}\leq g(x)_{max}=5$，

函数$f(x)=x^2-4x$，$x\in[a,a\quad 1]$，图象开口向上，对称轴$x=2$，

当$a\quad 1\leq 2$，即$a\leq 1$时，则$\begin{cases} f(x)_{min}=f(a\quad 1)=(a\quad 1)^2-4(a\quad 1)\leq 4 \\ f(x)_{max}=f(a)=a^2-4a\leq 5 \end{cases}$，解得$-1\leq a\leq 1$；

当$a\geq 2$时，则$\begin{cases} f(x)_{max}=f(a\quad 1)=(a\quad 1)^2-4(a\quad 1)\leq 5 \\ f(x)_{min}=f(a)=a^2-4a\leq 4 \end{cases}$，解得$2\leq a\leq 4$；

当$1<a<1.5$时，则$\begin{cases} f(x)_{min}=f(2)=2^2-4\times 2\leq 4 \\ f(x)_{max}=f(a)=a^2-4a\leq 5 \end{cases}$，解得$1<a<1.5$；

当$1.5\leq a<2$时，则$\begin{cases} f(x)_{max}=f(a\quad 1)=(a\quad 1)^2-4(a\quad 1)\leq 5 \\ f(x)_{min}=f(2)=2^2-4\times 2\leq 4 \end{cases}$，解得$1.5\leq a<2$．

综上可得，$a$的取值范围是$[-1,4]$．

故选：$A$．

求出$g(x)$的最值，由题意可得$f(x)_{min}\leq g(x)_{min}$，$f(x)_{max}\leq g(x)_{max}$，由二次函数的图象与性质，对$a$分类讨论，求出$f(x)$的最值，列不等式组，即可求解$a$的取值范围．

本题主要考查函数恒成立问题，考查分类讨论思想与转化思想的运用，考查运算求解能力，属于中档题．

8.【答案】$D$

【解析】解：因为$f(x)=a(x\quad cosx)-e^x$，

所以$f'(x)=a-asinx-e^x$，

令$f'(x)=0$得$a=\frac{e^{x}}{1\quad sinx}(x\neq 2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z)$，

令$g(x)=\frac{e^{x}}{1\quad sinx}(x\neq 2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z)$，

因为函数$f(x)=a(x+cosx)\quad e^{x}$在$(0,\pi)$上恰有两个极值点，所以$g(x)=a$有两个零点，

又$g'(x)=\frac{e^{x}(1\quad sinx+cosx)}{(1\quad sinx)^{2}}(x\neq 2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z)$，

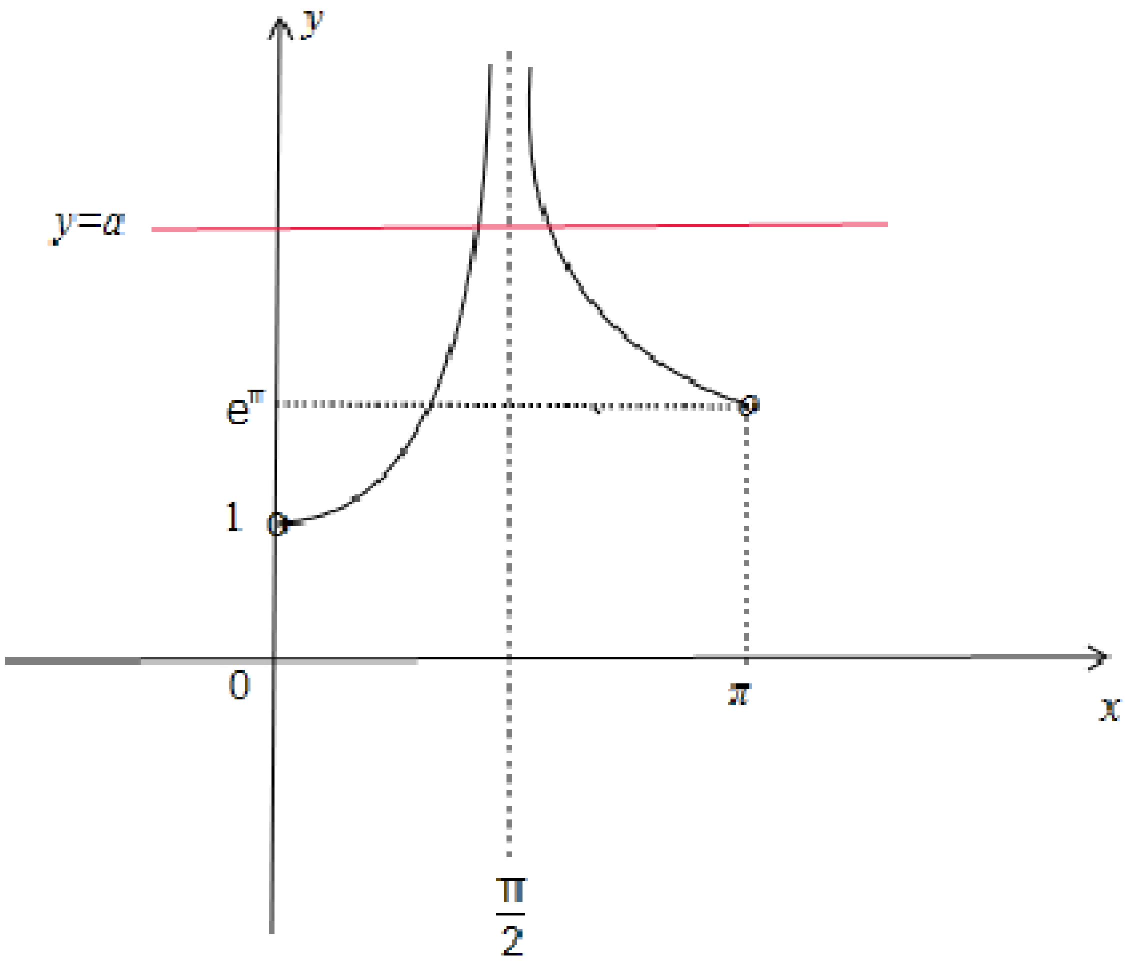
令$g'(x)>0$，得$0<x<\frac{\pi}{2}$，

令$g'(x)<0$，得$\frac{\pi}{2}<x<\pi$，

所以函数$g(x)$在$(0,\frac{\pi}{2})$上单调递增，在$(\frac{\pi}{2},\pi)$上单调递减，

由于$g(0)=1$，$g(\pi)=e^{\pi}$，

画出函数$g(x)$的大致图像，如图所示，




因为$g(x)=a$有两个零点，

所以函数$y=g(x)$与$y=a$的图像有两个交点，

根据函数$g(x)$的图像，由数形结合法可得$a>e^{\pi}$，

即$a\in(e^{\pi},+\infty)$，

故选：$D$.

根据题意，求出函数$f(x)$的导数，令$f'(x)=0$可得$a=\frac{e^{x}}{1\quad sinx}(x\neq 2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z)$，，再令$g(x)=\frac{e^{x}}{1\quad sinx}(x\neq 2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z)$，原问题可以转化为$g(x)=a$有两个零点，求出$g(x)$的导数，分析$g(x)$的单调性，画出函数$g(x)$的大致图像，再利用数形结合法即可求出$a$的取值范围.

本题考查导数与极值问题，考查转化与化归、函数与方程的数学思想以及运算求解能力和推理论证能力，是中档题.

9.【答案】$ACD$

【解析】解：对于$A$：命题$\exists x<0$，$x^2+x+1<0$的否定是$\forall x<0$，$x^2+x+1\geq 0$，故$A$正确；

对于$B$：若复数$z_1$，$=a+bi$，$z_2=c+di(a$、$b$、$c$、$d\in R)$满足$|z_1|=|z_2|$，

则$a^2+b^2=c^2+d^2$，则$z_1^2=a^2+b^2+2abi$，$z_2^2=c^2+d^2+2cdi$，故$z_1^2\neq z_2^2$，故$B$错误；

对于$C$：平面向量$\bar{a}$，$\bar{b}$满足$|\bar{a}|=|\bar{b}|$，则$\bar{a}^2=\bar{b}^2$，故$C$正确；

对于$D$：在$\triangle ABC$中，若$tanAtanB>1$，整理得：$\frac{sinAsinB}{cosAcosB}-1>0$，

化简为$\frac{sinAsinB-cosAcosB}{cosAcosB}>0$，整理得$\frac{\cos(A+B)}{cosAcosB}<0$，

即$\frac{cosC}{cosAcosB}>0$，则$\triangle ABC$为锐角三角形，故$D$正确.

故选：$ACD$.

直接利用命题的否定，复数的运算，向量的模，三角函数的关系式的变换，三角形形状的判定的应用判断$A$、$B$、$C$、$D$的结论.

本题考查的知识要点：命题的否定，复数的运算，向量的模，三角函数的关系式的变换，三角形形状的判定，主要考查学生的运算能力和数学思维能力，属于中档题.

10.【答案】$AC$

【解析】解：等差数列$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n$，且满足$a_{2022}>0$，$a_{2021}+a_{2022}<0$，

对于$A$，由题意$a_{2022}>0$，$a_{2021}<0$，即公差$d>0$，所以数列$\{a_n\}$是递增数列，故$A$正确；

对于$B$，由题意$a_{2022}>0$，$a_{2021}<0$，所以数列$\{S_n\}$是先减后增数列，故$B$错误；

对于$C$，由题意$a_{2022}>0$，$a_{2021}<0$，所以$S_n$的最小值是$S_{2021}$，故$C$正确；

对于$D$，由$S_{4043}=\frac{1}{2}(a_1+a_{4043})\times 4043=4043a_{2022}>0$，$S_{4042}=\frac{1}{2}(a_1+a_{4042})\times 4042=2021(a_{2021}+a_{2022})<0$，

使得$S_n$取得最小正数的$n=4043$，故$D$错误.

故选：$AC$.

由等差数列的定义可判断公差大于0，可判断$A$；结合数列的项的符号，可判断$B$、$C$；由等差数列的求和公式和性质，可判断$D$.

本题考查等差数列的通项公式、求和公式的运用和性质，考查转化思想和运算能力，属