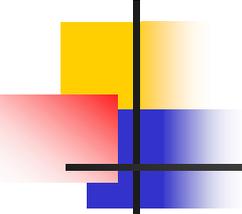


# 线性代数概念的几何意义

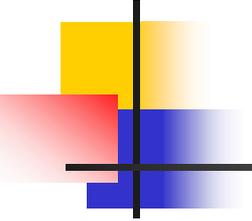
西安电子科技大学  
线性代数上机课程  
教师：朱娟娟



## 主要内容

---

- 二元、三元线性方程组的几何意义
- 二阶、三阶行列式的几何意义
- 平面上线性变换的几何意义
- 二阶矩阵特征值的几何意义
- $R^2$  中向量组的线性相关性的几何意义



## 二元、三元线性方程组的几何意义

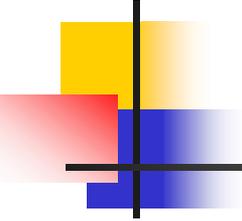
---

二元一次方程 在几何上表示的是 **一条直线** ，  
则含两个二元一次方程的方程组在几何上则  
表示两条直线的位置关系：

相交====> 有唯一解

平行====> 无解

重合====> 无穷多解



## 例1 求解下列四个线性方程组

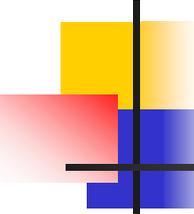
---

$$(1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 2x_1 - 3x_2 = -4 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 2 \\ 3x_1 + 9x_2 = 6 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x_1 - 3x_2 = 5 \\ 2x_1 - 6x_2 = -6 \end{cases}$$

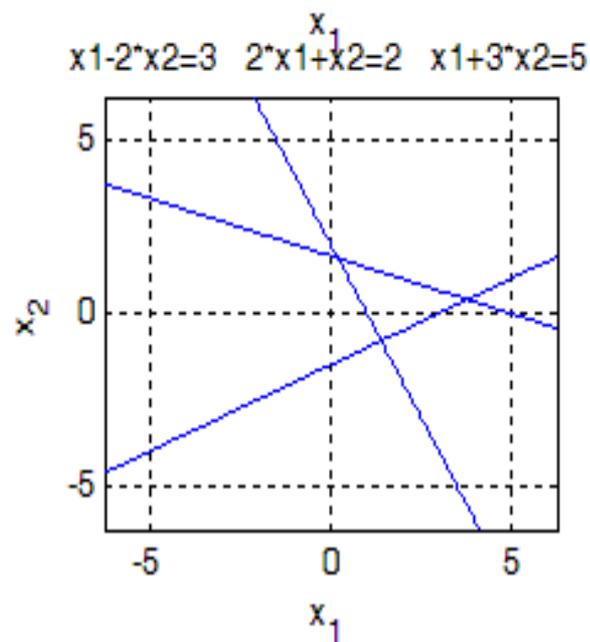
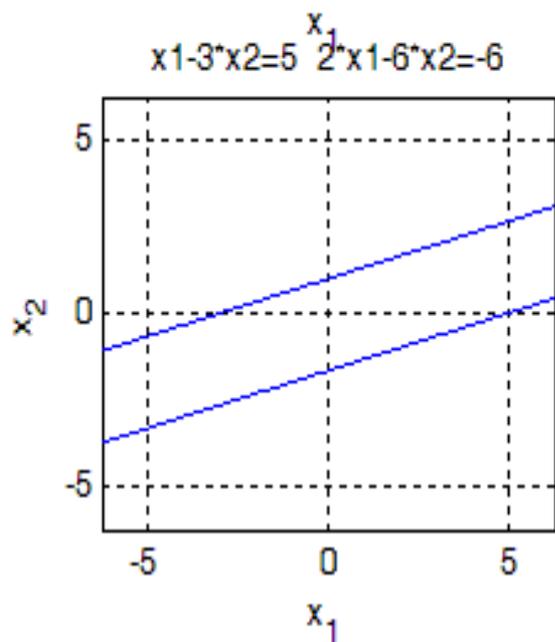
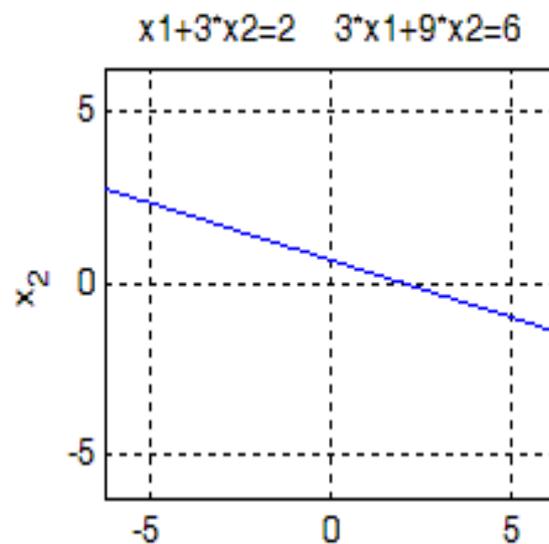
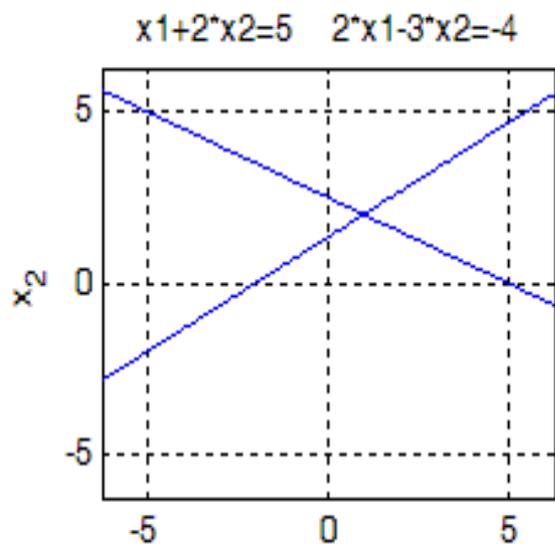
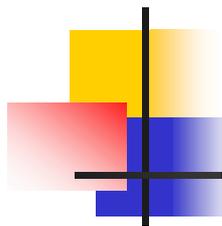
$$(4) \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 3 \\ 2x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + 3x_2 = 5 \end{cases}$$

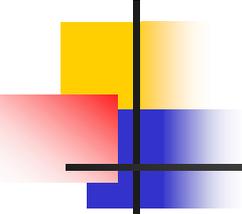


以方程组 (1) 为例：在MATLAB的M文件编辑器中，输入

```
syms x1 x2 % 定义x1、x2为符号变量
U1=rref([1,2,5;2,-3,-4]) % 把增广矩阵通过初等行变换
% 变为最简阶梯矩阵
subplot(2,2,1) % 准备画2×2个图形中的第一个
ezplot('x1+2*x2=5') % 绘制直线x1+2*x2=5
hold on % 保留原来图形
ezplot('2*x1-3*x2=-4') % 再绘制直线2*x1-3*x2=-4
title('x1+2*x2=5 2*x1-3*x2=-4') % 在图上标注x1+2*x2=5 2*x1-3*x2=-4
grid on % 显示网格
```

绘制图形如图1所示:





从运行结果可以看出：

---

方程组（1）的解为  $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$  ；

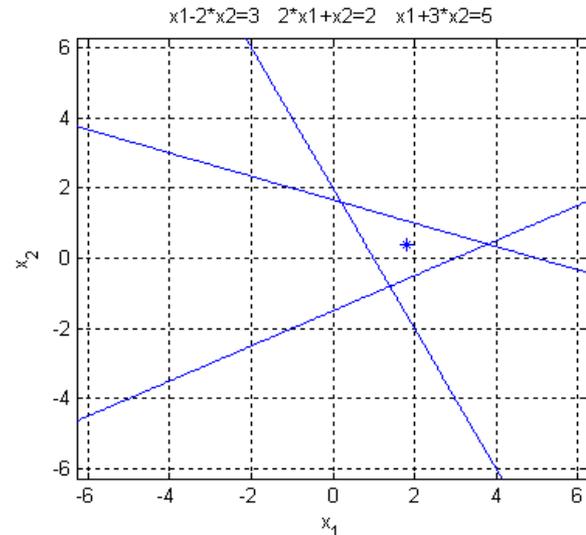
方程组（2）的通解为： $k \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  ；

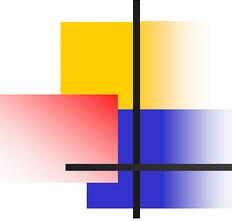
方程组（3）和方程组（4）这两个方程组无解。

## 从图1中可以形象地看出：

- 方程组（1）的两条直线有一个交点，故有唯一解（**适定**）；
- 方程组（2）的两条直线重合，则有无穷组解（**欠定**）；
- 方程组（3）的两条直线相平行，永远没有交点，即**无解**；
- 方程组（4）的三条直线不共点，则也无解（**超定**），可求**最小二乘解**。

- $AX=b$
- 最小二乘解
- 命令： $x=\text{pinv}(A)*b$   
 $x=A\backslash b$



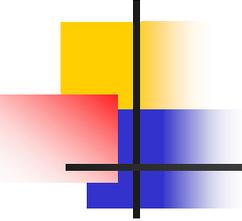


## 三元一次方程组的几何表示

---

三个三元一次方程构成的方程组：

- 若三个平面只有一个交点，即方程组有唯一解；
- 若三个平面相交于一直线，即方程组有无穷多解；
- 若三个平面没有交点或交线，即方程组无解。



**例2** 求解下列线性方程组，并画出三维图形来表示解的情况。

$$(1) \begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 = 2 \\ -2x_1 - 0.5x_2 - x_3 = -3 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 8x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 5x_1 - 7x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = -12 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 25 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} 5x_2 - x_3 = 8 \\ -7x_2 - x_3 = 10 \\ x_3 = 15 \end{cases}$$

利用MATLAB的M文件编辑器绘图可得：

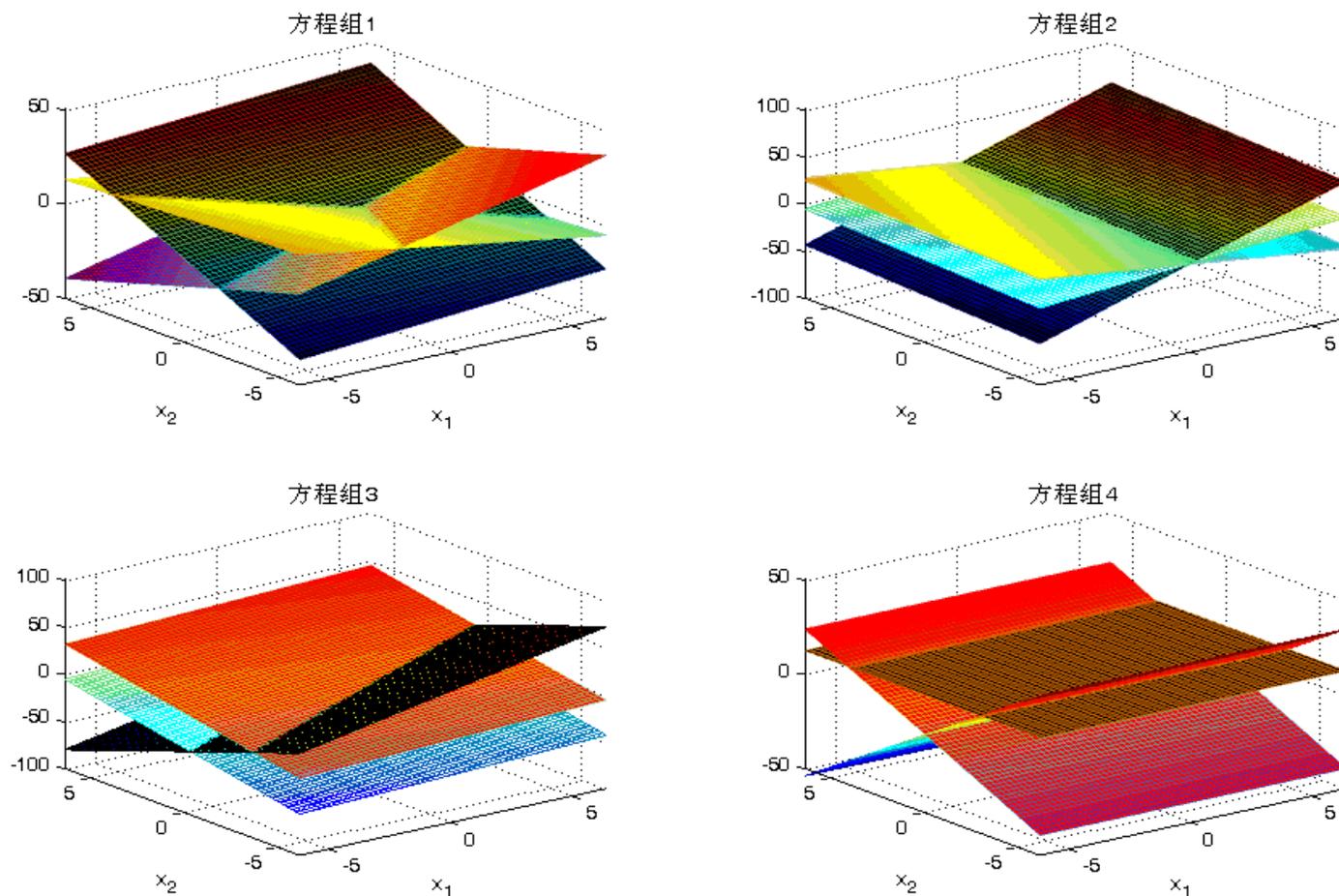
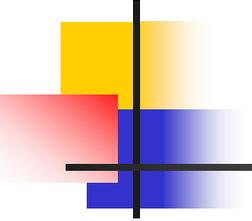


图2 三元线性方程组解的几何意义



从图2中可以看出：

---

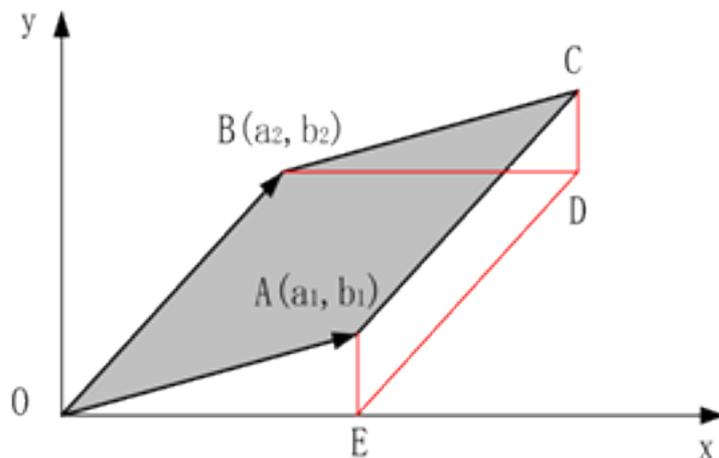
- 方程组（1）的解为三个平面的交点，故该方程组有唯一解；
- 方程组（2）的三个平面刚好相交于同一条直线，该齐次线性方程组有无穷多解，且其对应的解空间是一维的；
- 方程组（3）的三个平面没有共同的交点，即方程组无解；
- 方程组（4）也无解。

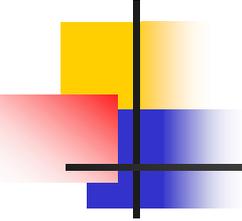
## 二阶、三阶行列式的几何意义

**二维情形：** 在平面上有一个平行四边形OACB，A、B两点的坐标分别为： $(a_1, b_1)$ 、 $(a_2, b_2)$ ，如下图所示，求平行四边形OACB的面积。

**分析：** 过点A做x轴垂线，交x轴于点E；过点B做平行x轴直线与过点C做平行y轴直线相交于点D。显然可以得到三角形CDB和三角形AEO全等，则有：

$$\begin{aligned} S_{OACB} &= S_{OEDB} + S_{CDB} - S_{AEO} - S_{AEDC} \\ &= S_{OEDB} - S_{AEDC} \\ &= a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{aligned}$$





## 二阶行列式的几何意义

根据二阶行列式的定义，该平行四边形的面积刚好是以 A、B 两点坐标所构成的二阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

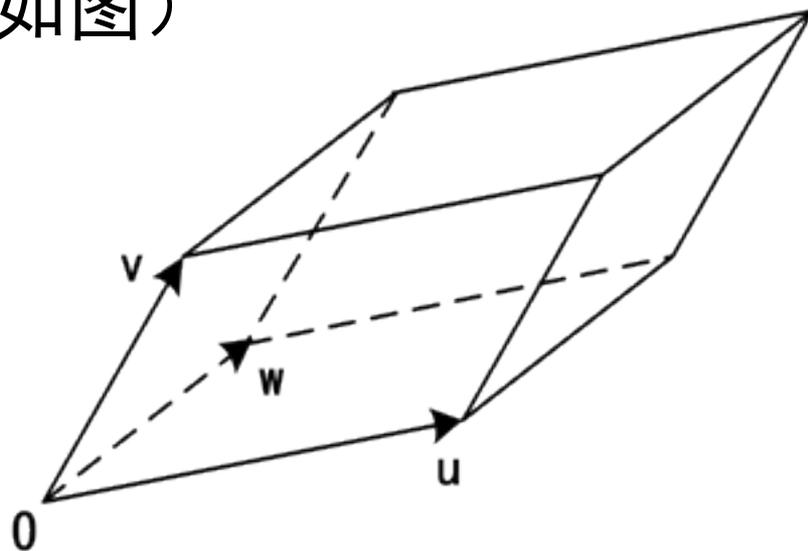
一般情况下也可以证明：过原点的两条直线（向量），如  $OA$  构成的一个平行四边形的面积为 A、B 两点坐标所构成的二阶行列式的绝对值。

## 三维情形 已知三个向量

$$u = (a_1, a_2, a_3), v = (b_1, b_2, b_3), w = (c_1, c_2, c_3)$$

由这三个向量所构成的平行六面体的体积即为  
三阶行列式的绝对值（如图）

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$



以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/127032022051006142>