怒江市重点中学 2024 年高考模拟考试卷数学试题试卷

考生须知：

1．全卷分选择题和非选择题两部分，全部在答题纸上作答。选择题必须用 2B 铅笔填涂；非选择题的答案必须用黑色字迹的钢笔或答字笔写在“答题纸”相应位置上。

2．请用黑色字迹的钢笔或答字笔在“答题纸”上先填写姓名和准考证号。

3．保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，在草稿纸、试题卷上答题无效。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知集合 $M=\{x\mid -1\le x<5\},N=\left\{x\mid |x|<2\right\}$，则 $M\cap N=$（　　）

A．$\{x\mid -1\le x<2\}$　　B．$\{x\mid -2<x<5\}$　　C．$\{x\mid -1\le x<5\}$　　D．$\{x\mid 0<x<2\}$

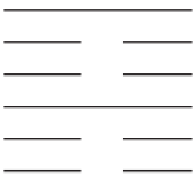
2．一个正四棱锥形骨架的底边边长为 2，高为 $\sqrt{2}$，有一个球的表面与这个正四棱锥的每个边都相切，则该球的表面积为（　　）

A．$4\sqrt{3}\pi$　　B．4π　　C．$4\sqrt{2}\pi$　　D．3π

3．函数 $y=\sin x(3\sin x+4\cos x)$ $(x\in R)$ 的最大值为 M，最小正周期为 T，则有序数对 (M,T) 为（　　）

A．$(5,\pi)$　　B．$(4,\pi)$　　C．$(-1,2\pi)$　　D．$(4,2\pi)$

4．我国古代典籍《周易》用“卦”描述万物的变化．每一“重卦”由从下到上排列的 **6** 个爻组成，爻分为阳爻“——”和阴爻“—　—”．如图就是一重卦．在所有重卦中随机取一重卦，则该重卦至少有 **2** 个阳爻的概率是（　　）



A．$\dfrac{7}{64}$　　B．$\dfrac{11}{32}$　　C．$\dfrac{57}{64}$　　D．$\dfrac{11}{16}$

5．已知 $|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=2$，若 $\vec{a}\perp\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$，则向量 $\vec{a}+\vec{b}$ 在向量 $\vec{b}$ 方向的投影为（　　）

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．$\dfrac{7}{2}$　　C．$-\dfrac{1}{2}$　　D．$-\dfrac{7}{2}$

6．若复数 $z=(3-i)(1+i)$，则 $|z|=$（　　）

A．$2\sqrt{2}$　　B．$2\sqrt{5}$　　C．$\sqrt{10}$　　D．**20**

7．如图是甲、乙两位同学在六次数学小测试（满分 **100** 分）中得分情况的茎叶图，则下列说法错误的是（　　）

甲				乙	
		9	7	2	4
2	2	8	8	1	9
	1	3	9	6	9

A．甲得分的平均数比乙大　　　　B．甲得分的极差比乙大

C．甲得分的方差比乙小　　　　D．甲得分的中位数和乙相等

8．已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ 内有一条以点 $P\left(1,\dfrac{1}{3}\right)$ 为中点的弦 AB，则直线 AB 的方程为(　　)

A．$3x-3y-2=0$　　　　B．$3x-3y+2=0$

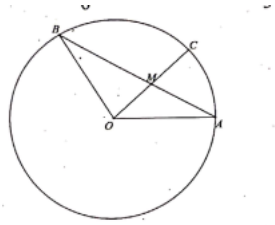
C．$3x+3y-4=0$　　　　D．$3x+3y+4=0$

9．已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则（　　）

A．$f(-3)<f\left(-\log_3 13\right)<f\left(2^{0.6}\right)$　　　　B．$f(-3)<f\left(2^{0.6}\right)<f\left(-\log_3 13\right)$

C．$f\left(2^{0.6}\right)<f\left(-\log_3 13\right)<f(-3)$　　　　D．$f\left(2^{0.6}\right)<f(-3)<f\left(-\log_3 13\right)$

10．点 A,B,C 是单位圆 O 上不同的三点，线段 OC 与线段 AB 交于圆内一点 M，若 $\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB},(m>0,n>0),m+n=2$，则 $\angle AOB$ 的最小值为（　　）



A．$\dfrac{\pi}{6}$　　　　B．$\dfrac{\pi}{3}$　　　　C．$\dfrac{\pi}{2}$　　　　D．$\dfrac{2\pi}{3}$

11．在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，已知 $C=\dfrac{2\pi}{3}$，$c=1$．当 a,b 变化时，若 $z=b+\lambda a$ 存在最大值，则正数 λ 的取值范围为

A．$(0,1)$　　　　B．$(0,2)$　　　　C．$(\dfrac{1}{2},2)$　　　　D．$(1,3)$

12．甲乙丙丁四人中，甲说：我年纪最大，乙说：我年纪最大，丙说：乙年纪最大，丁说：我不是年纪最大的，若这四人中只有一个人说的是真话，则年纪最大的是（　　）

A．甲　　　　B．乙　　　　C．丙　　　　D．丁

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．已知椭圆 **Γ**：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$F_1$、$F_2$ 是椭圆 **Γ** 的左、右焦点，**A** 为椭圆 **Γ** 的上顶点，延长 AF_2 交椭圆 **Γ** 于点 **B**，若 $\vee ABF_1$ 为等腰三角形，则椭圆 **Γ** 的离心率为__________.

14．已知函数 $f(x)=\begin{cases}|x+1|,x\le 0\\4x^2,x>0\end{cases}$，若函数 $y=f(x)-a$ 有 3 个不同的零点 $x_1,x_2,x_3(x_1<x_2<x_3)$，则 $x_1+x_2+\frac{a}{x_3}$ 的取值范围是__________.

15．已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)(\omega\in N)$ 在 $\left[0,\pi\right]$ 上仅有 **2** 个零点，设 $g(x)=\sqrt{2}f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$，则 $g\left(x\right)$ 在区间 $\left[0,\pi\right]$ 上的取值范围为______.

16．已知函数 $f(x)=-x^3+\sin x$，若 $f(a)=M$，则 $f\left(-a\right)=$__________.

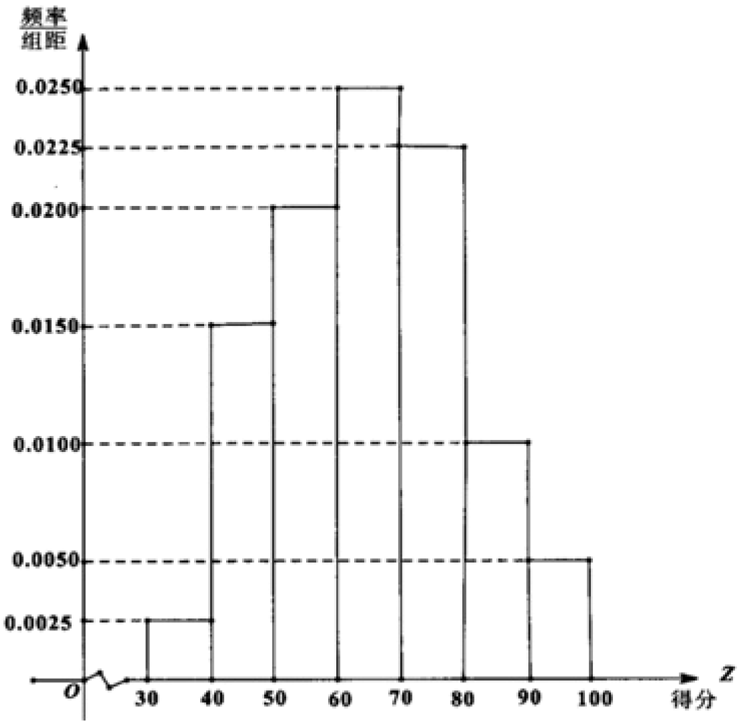
三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）在极坐标系 Ox 中，曲线 C 的极坐标方程为 $\frac{\rho^2}{\sqrt{2}-\rho\sin\theta}=\sqrt{2}+\rho\sin\theta$，直线 l 的极坐标方程为 $\rho\left(\cos\theta-\sin\theta\right)=1$，设 l 与 C 交于 A、B 两点，AB 中点为 M，AB 的垂直平分线交 C 于 E、F.以 O 为坐标原点，极轴为 x 轴的正半轴建立直角坐标系 xOy.

（**1**）求 C 的直角坐标方程与点 M 的直角坐标；

（**2**）求证：$\left|MA\right|\cdot\left|MB\right|=\left|ME\right|\cdot\left|MF\right|$.

18．（12 分）**2019** 年安庆市在大力推进城市环境、人文精神建设的过程中，居民生活垃圾分类逐渐形成意识.有关部门为宣传垃圾分类知识，面向该市市民进行了一次“垃圾分类知识"的网络问卷调查，每位市民仅有一次参与机会，通过抽样，得到参与问卷调查中的 **1000** 人的得分数据，其频率分布直方图如图：



（1）由频率分布直方图可以认为，此次问卷调查的得分 **Z** 服从正态分布 $N\left(\mu,210\right)$，μ 近似为这 **1000** 人得分的平均值（同一组数据用该区间的中点值作代表），利用该正态分布，求 **P**（$50.5<Z<94$）；

（2）在（1）的条件下，有关部门为此次参加问卷调查的市民制定如下奖励方案：

（*i*）得分不低于 μ 可获赠 **2** 次随机话费，得分低于 μ 则只有 **1** 次：

（*ii*）每次赠送的随机话费和对应概率如下：

赠送话费（单位：元）	10	20
概率	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

现有一位市民要参加此次问卷调查，记 **X**（单位：元）为该市民参加问卷调查获赠的话费，求 **X** 的分布列.附：

$\sqrt{210}=14.5$，若 $Z:\ N\left(\mu,\delta^2\right)$，则 $P\left(\mu-\delta<Z<\mu+\delta\right)=0.6826$，$P\left(\mu-2\delta<Z<\mu+2\delta\right)=0.9544$.

19.（12 分）已知函数 $f(x)=x^2-a\ln x, a\in R$.

（1）若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值，求 a 的值；

（2）求 $f(x)$ 在区间 $\left[1,+\infty\right)$ 上的最小值；

（3）在（1）的条件下，若 $h(x)=x^2-f(x)$，求证：当 $1<x<e^2$ 时，恒有 $x<\dfrac{4+h(x)}{4-h(x)}$ 成立.

20.（12 分）在 ΔABC 中，内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，已知 $a^1\ \ b$，且

$\cos^2 A-\cos^2 B=\sqrt{3}\sin A\cos A-\sqrt{3}\sin B\cos B$.

（Ⅰ）求角C的大小；

（Ⅱ）若$c=\sqrt{3}$，求ΔABC面积的取值范围.

21．（12 分）已知函数$f(x)=ae^{x}-x^{2}$．

（1）若曲线$f(x)$存在与y轴垂直的切线，求a的取值范围.

（2）当$a\geq 1$时，证明：$f(x)\ldots 1+x-\dfrac{3}{2}x^{2}$．

22．（10 分）在ΔABC中，角A,B,C所对的边分别是a,b,c，且$2\sin^{2}(B+C)-3\cos A=0$．

（1）求角A的大小；

（2）若$B=\dfrac{\pi}{4},\quad a=2\sqrt{3}$，求边长$c$．

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、**A**

【解析】

考虑既属于M又属于N的集合，即得.

【详解】

Q $N=\left\{x\,|-2<x<2\right\},\therefore M\cap N=\{x\,|-1\leq x<2\}$．

故选：A

【点睛】

本题考查集合的交运算，属于基础题.

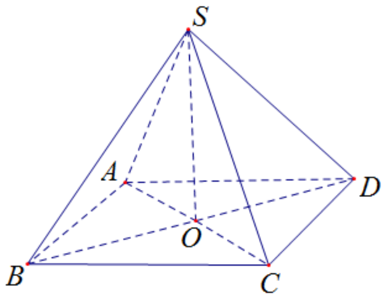
2、**B**

【解析】

根据正四棱锥底边边长为2，高为$\sqrt{2}$，得到底面的中心到各棱的距离都是 1，从而底面的中心即为球心.

【详解】

如图所示：



因为正四棱锥底边边长为2，高为$\sqrt{2}$，

所以$OB=\sqrt{2}, SB=2$，

O 到SB 的距离为$d=\dfrac{SO\times OB}{SB}=1$，

同理O到SC, SD, SA 的距离为**1**，

所以O为球的球心，

所以球的半径为：**1**，

所以球的表面积为4π.

故选：**B**

【点睛】

本题主要考查组合体的表面积，还考查了空间想象的能力，属于中档题.

3、**B**

【解析】

函数$y=\sin x(3\sin x+4\cos x)=3\sin^2 x+4\sin x\cos x=2\sin 2x-\dfrac{3}{2}\cos 2x+\dfrac{3}{2}=\dfrac{5}{2}\sin(2x-\theta)+\dfrac{3}{2}$（$\theta$为辅助角）

∴函数的最大值为$M=4$，最小正周期为$T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$

故选 **B**

4、**C**

【解析】

利用组合的方法求所求的事件的对立事件,即该重卦没有阳爻或只有 **1** 个阳爻的概率,再根据两对立事件的概率和为 **1** 求解即可.

【详解】

设“该重卦至少有 **2** 个阳爻”为事件A.所有“重卦”共有2^6种；“该重卦至少有 **2** 个阳爻”的对立事件$\overline{A}$是“该重卦没有阳爻或只有 **1** 个阳爻”,其中,没有阳爻（即 **6** 个全部是阴爻）的情况有 **1** 种,只有 **1** 个阳爻的情况有$C_6^1=6$种,故

$P(\overline{A})=\frac{1+6}{2^6}=\frac{7}{64}$,所以该重卦至少有 **2** 个阳爻的概率是 $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{7}{64}=\frac{57}{64}$.

故选：C

【点睛】

本题主要考查了对立事件概率和为 1 的方法求解事件概率的方法.属于基础题.

5、B

【解析】

由 $\vec{a}\perp(\vec{a}-\vec{b})$，$|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=2\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=3$，再由向量 $\vec{a}+\vec{b}$ 在向量 $\vec{b}$ 方向的投影为 $\frac{(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$ 化简运算即可

【详解】

$\because\vec{a}\perp(\vec{a}-\vec{b})\therefore\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=3-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，$\therefore\vec{a}\cdot\vec{b}=3$，

$\therefore$向量 $\vec{a}+\vec{b}$ 在向量 $\vec{b}$ 方向的投影为 $|\vec{a}+\vec{b}|\cos\langle\vec{a}+\vec{b},\vec{b}\rangle=\frac{(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2}{|\vec{b}|}=\frac{3+4}{2}=\frac{7}{2}$.

故选：B.

【点睛】

本题考查向量投影的几何意义，属于基础题

6、B

【解析】

化简得到 $z=(3-i)(1+i)=4+2i$，再计算模长得到答案.

【详解】

$z=(3-i)(1+i)=4+2i$，故 $|z|=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$.

故选：B.

【点睛】

本题考查了复数的运算，复数的模，意在考查学生的计算能力.

7、B

【解析】

由平均数、方差公式和极差、中位数概念，可得所求结论.

【详解】

对于甲，$\overline{x_1}=\frac{79+88+82+82+93+91}{6}\approx 85.8$；

对于乙，$\overline{x_2}=\frac{72+74+81+89+96+99}{6}\approx 85.2$，

故 A 正确；

甲的极差为 $93-79=14$，乙的极差为 $99-72=27$，故 B 错误；

对于甲，方差 $S_1^2\approx 26.5$，

对于乙，方差 $S_2^2\approx 106.5$，故 C 正确；

甲得分的中位数为 $\frac{82+88}{2}=85$，乙得分的中位数为 $\frac{81+89}{2}=85$，故 D 正确.

故选：B.

【点睛】

本题考查茎叶图的应用，考查平均数和方差等概念，培养计算能力，意在考查学生对这些知识的理解掌握水平，属于基础题.

8、C

【解析】

设 $A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，则 $\frac{{x_1}^2}{3}+{y_1}^2=1$，$\frac{{x_2}^2}{3}+{y_2}^2=1$，相减得到 $\frac{2}{3}+\frac{2}{3}k=0$，解得答案.

【详解】

设 $A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，设直线斜率为 k，则 $\frac{{x_1}^2}{3}+{y_1}^2=1$，$\frac{{x_2}^2}{3}+{y_2}^2=1$，

相减得到：$\frac{\left(x_1-x_2\right)\left(x_1+x_2\right)}{3}+\left(y_1+y_2\right)\left(y_1-y_2\right)=0$，$AB$ 的中点为 $P\left(1,\frac{1}{3}\right)$，

即 $\frac{2}{3}+\frac{2}{3}k=0$，故 $k=-1$，直线 AB 的方程为：$y=-x+\frac{4}{3}$.

故选：C.

【点睛】

本题考查了椭圆内点差法求直线方程，意在考查学生的计算能力和应用能力.

9、C

【解析】

根据题意，由函数的奇偶性可得 $f\left(-3\right)=f\left(3\right)$，$f\left(-\log_3 13\right)=f\left(\log_3 13\right)$，又由 $2^{0.6}<2<\log_3 13<\log_3 27=3$，结合函数的单调性分析可得答案.

【详解】

根据题意，函数 $f\left(x\right)$ 是定义在 R 上的偶函数，则 $f\left(-3\right)=f\left(3\right)$，$f\left(-\log_3 13\right)=f\left(\log_3 13\right)$，

有$2^{0.6} < 2 < \log_3 13 < \log_3 27 = 3$，

又由$f\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递增，则有$f\left(2^{0.6}\right) < f\left(-\log_3 13\right) < f\left(-3\right)$，故选 **C**.

【点睛】

本题主要考查函数的奇偶性与单调性的综合应用，注意函数奇偶性的应用，属于基础题.

10、**D**

【解析】

由题意得$1 = m^2 + n^2 + 2mn\cos\angle AOB$，再利用基本不等式即可求解.

【详解】

将$\overrightarrow{OC} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$平方得$1 = m^2 + n^2 + 2mn\cos\angle AOB$，

$$\cos\angle AOB = \frac{1-m^2-n^2}{2mn} = \frac{1-(m+n)^2+2mn}{2mn} = -\frac{3}{2mn}+1 \le -\frac{3}{2\times(\frac{m+n}{2})^2}+1 = -\frac{1}{2}$$

（当且仅当$m = n = 1$时等号成立），

$\because 0 < \angle AOB < \pi$，

$\therefore \angle AOB$ 的最小值为$\frac{2\pi}{3}$，

故选：**D**.

【点睛】

本题主要考查平面向量数量积的应用，考查基本不等式的应用，属于中档题.

11、**C**

【解析】

因为$C = \frac{2\pi}{3}$，$c = 1$，所以根据正弦定理可得$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{2}{\sqrt{3}}$，所以$a = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin A$，$b = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin B$，所以

$z = b + \lambda a = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin B + \frac{2\lambda}{\sqrt{3}}\sin A = \frac{2}{\sqrt{3}}[\sin B + \lambda\sin(\frac{\pi}{3} - B)] = \frac{2}{\sqrt{3}}[(1-\frac{\lambda}{2})\sin B +$

$\frac{\sqrt{3}\lambda}{2}\cos B] = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{(1-\frac{\lambda}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}\lambda}{2})^2}\sin(B+\phi)$，其中$\tan\phi = \frac{\sqrt{3}\lambda}{2-\lambda}$，$0 < B < \frac{\pi}{3}$，

因为$z = b + \lambda a$存在最大值，所以由$B + \phi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$，可得$2k\pi + \frac{\pi}{6} < \phi < 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$，

所以$\tan\phi > \frac{\sqrt{3}}{3}$，所以$\frac{\sqrt{3}\lambda}{2-\lambda} > \frac{\sqrt{3}}{3}$，解得$\frac{1}{2} < \lambda < 2$，所以正数$\lambda$的取值范围为$(\frac{1}{2}, 2)$，故选 **C**.

12、**C**

【解析】

分别假设甲乙丙丁说的是真话，结合其他人的说法，看是否只有一个说的是真话，即可求得年纪最大者，即可求得答案.

【详解】

①假设甲说的是真话，则年纪最大的是甲，那么乙说谎，丙也说谎，而丁说的是真话，而已知只有一个人说的是真话，故甲说的不是真话，年纪最大的不是甲；

②假设乙说的是真话，则年纪最大的是乙，那么甲说谎，丙说真话，丁也说真话，而已知只有一个人说的是真话，故乙说谎，年纪最大的也不是乙；

③假设丙说的是真话，则年纪最大的是乙，所以乙说真话，甲说谎，丁说的是真话，而已知只有一个人说的是真话，故丙在说谎，年纪最大的也不是乙；

④假设丁说的是真话，则年纪最大的不是丁，而已知只有一个人说的是真话，那么甲也说谎，说明甲也不是年纪最大的，同时乙也说谎，说明乙也不是年纪最大的，年纪最大的只有一人，所以只有丙才是年纪最大的，故假设成立，年纪最大的是丙.

综上所述，年纪最大的是丙

故选：C.

【点睛】

本题考查合情推理，解题时可从一种情形出发，推理出矛盾的结论，说明这种情形不会发生，考查了分析能力和推理能力，属于中档题.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13、$\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】

由题意可得等腰三角形的两条相等的边，设$\left|BF_2\right|=t$，由题可得$\left|BF_1\right|$的长，在三角形ABF_1中，三角形BF_1F_2中由余弦定理可得$\angle ABF_1$的值相等，可得a,c的关系，从而求出椭圆的离心率

【详解】

如图，若ΔABF_1为等腰三角形，则$|BF_1|=|AB|$.设$|BF_2|=t$，则$|BF_1|=2a-t$，所以$|AB|=a+t=|BF_1|=2a-t$，解得 $a=2t$，即$|AB|=|BF_1|=3t$, $|AF_1|=2t$, 设$\angle BAO=\theta$, 则$\angle BAF_1=2\theta$, 所以 Γ 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{|OF_2|}{|AF_2|}=\sin\theta$，结合余弦定理，易得在$\Delta ABF_1$中，$\cos 2\theta=\frac{1}{3}=1-2\sin^2\theta$，所以$\sin^2\theta=\frac{1}{3}$，即 $e=\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$，