解三角形“热考”十点

热点题型速览

热点一 三角形中边角计算

题目1 (2023·北京·统考高考真题) 在$\triangle ABC$中，$(a+c)(\sin A-\sin C)=b(\sin A-\sin B)$，则$\angle C=$ ( )

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

【答案】B

【分析】利用正弦定理的边角变换与余弦定理即可得解.

【详解】因为$(a+c)(\sin A-\sin C)=b(\sin A-\sin B)$，

所以由正弦定理得$(a+c)(a-c)=b(a-b)$，即$a^2-c^2=ab-b^2$，

则$a^2+b^2-c^2=ab$，故$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{ab}{2ab}=\frac{1}{2}$，

又$0<C<\pi$，所以$C=\frac{\pi}{3}$.

故选：B.

题目2 (2020·全国·统考高考真题) 在$\triangle ABC$中，$\cos C=\frac{2}{3}$，$AC=4$，$BC=3$，则$\cos B=$ ( )

A. $\frac{1}{9}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

【答案】A

【分析】根据已知条件结合余弦定理求得AB，再根据$\cos B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}$，即可求得答案.

【详解】∵在$\triangle ABC$中，$\cos C=\frac{2}{3}$，$AC=4$，$BC=3$

根据余弦定理：$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos C$

$AB^2=4^2+3^2-2\times4\times3\times\frac{2}{3}$

可得$AB^2=9$，即$AB=3$

由∵$\cos B=\dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\dfrac{9+9-16}{2\times3\times3}=\dfrac{1}{9}$

故 $\cos B=\dfrac{1}{9}$.

故选：A .

题目 3 (2021·全国·高考真题) 在△ABC 中，已知 $B=120°$，$AC=\sqrt{19}$，$AB=2$，则 $BC=$ (　　)

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{5}$　　D. 3

【答案】D

【分析】利用余弦定理得到关于 BC 长度的方程，解方程即可求得边长.

【详解】设 $AB=c$，$AC=b$，$BC=a$，

结合余弦定理：$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$ 可得：$19=a^2+4-2\times a\times c\times\cos120°$，

即：$a^2+2a-15=0$，解得：$a=3$ ($a=-5$ 舍去)，

故 $BC=3$.

故选：D .

题目 4 (2020·山东·统考高考真题) 在△ABC 中，内角 A，B，C 的对边分别是 a，b，c，若 $a^2+b^2=c^2+ab\sin C$，且 $a\sin B\cos C+c\sin B\cos A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}b$，则 $\tan A$ 等于 (　　)

A. 3　　B. $-\dfrac{1}{3}$　　C. 3 或 $-\dfrac{1}{3}$　　D. -3 或 $\dfrac{1}{3}$

【答案】A

【分析】利用余弦定理求出 $\tan C=2$，并进一步判断 $C>\dfrac{\pi}{4}$，由正弦定理可得 $\sin(A+C)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\sin B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，最后利用两角和的正切公式，即可得到答案；

【详解】∵$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{\sin C}{2}\Rightarrow\tan C=2$，∴$C>\dfrac{\pi}{4}$，

∵$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$，

∴$\sin A\sin B\cos C+\sin C\sin B\cos A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin B$，

∴$\sin(A+C)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\sin B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，∴$B=\dfrac{\pi}{4}$，

∴$\tan B=1$，

∴$\tan A=-\tan(B+C)=-\dfrac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\cdot\tan C}=3$，

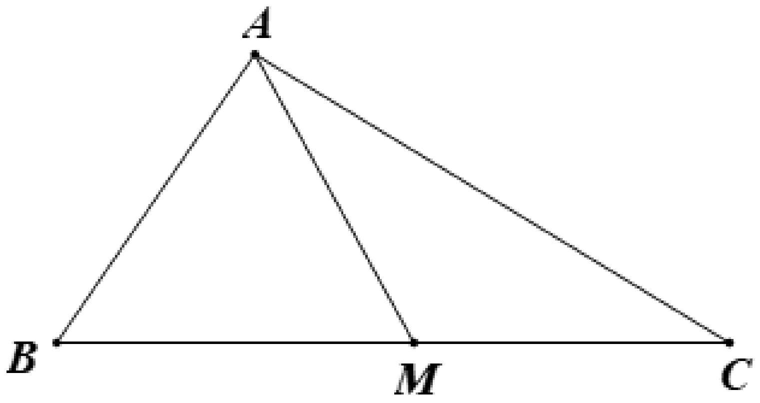
故选：A .

题目 5 (2021·浙江·统考高考真题) 在△ABC 中，$\angle B=60°$，$AB=2$，M 是 BC 的中点，$AM=2\sqrt{3}$，则 $AC=$ ______，$\cos\angle MAC=$ ______.

【答案】　$2\sqrt{13}$　$\dfrac{2\sqrt{39}}{13}$

【分析】由题意结合余弦定理可得 $BC=8$，进而可得 AC，再由余弦定理可得 $\cos\angle MAC$.

【详解】由题意作出图形，如图，



在△ABM中，由余弦定理得 $AM^2=AB^2+BM^2-2BM\cdot BA\cdot\cos B$，

即 $12=4+BM^2-2BM\times2\times\frac{1}{2}$，解得 $BM=4$(负值舍去)，

所以 $BC=2BM=2CM=8$，

在△ABC中，由余弦定理得 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B=4+64-2\times2\times8\times\frac{1}{2}=52$，

所以 $AC=2\sqrt{13}$；

在△AMC中，由余弦定理得 $\cos\angle MAC=\frac{AC^2+AM^2-MC^2}{2AM\cdot AC}=\frac{52+12-16}{2\times2\sqrt{3}\times2\sqrt{13}}=\frac{2\sqrt{39}}{13}$.

故答案为：$2\sqrt{13}$；$\frac{2\sqrt{39}}{13}$.

【规律方法】

1. 已知任意两角和一边，解三角形的步骤：

①求角：根据三角形内角和定理求出第三个角；

②求边：根据正弦定理，求另外的两边.

(1) 已知内角不是特殊角时，往往先求出其正弦值，再根据以上步骤求解.

(2) 已知三边解三角形的方法

⑴ 先利用余弦定理求出一个角的余弦，从而求出第一个角；再利用余弦定理或由求得的第一个角，利用正弦定理求出第二个角；最后利用三角形的内角和定理求出第三个角.

⑵ 利用余弦定理求三角的余弦，进而求得三个角.

热点二 判断三角形的形状

题目 6 在△ABC中，若 $b^2\sin^2C+c^2\sin^2B=2bc\cos B\cos C$，试判断△ABC的形状.

【答案】直角三角形.

【解析】解法一：∵ $b^2\sin^2C+c^2\sin^2B=2bc\cos B\cos C$，

∴利用正弦定理可得

$\sin^2B\sin^2C+\sin^2C\sin^2B=2\sin B\sin C\cos B\cos C$，

∵ $\sin B\sin C\neq0$，∴ $\sin B\sin C=\cos B\cos C$，∴ $\cos(B+C)=0$，∴ $\cos A=0$，

∵ $0<A<\pi$，∴ $A=\frac{\pi}{2}$，∴△ABC为直角三角形.

解法二：已知等式可化为 $b^2-b^2\cos^2C+c^2-c^2\cos^2B=2bc\cos B\cos C$，

由余弦定理可得 $b^2+c^2-b^2\cdot\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2-c^2\cdot\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)^2$

$=2bc\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ ∴ $b^2+c^2=a^2$，∴△ABC为直角三角形.

解法三：已知等式变形为 $b^2(1-\cos^2C)+c^2(1-\cos^2B)=2bc\cos B\cos C$，

∴ $b^2+c^2=b^2\cos^2C+c^2\cos^2B+2bc\cos B\cos C$，

$\because b^2\cos^2C+c^2\cos^2B+2bc\cos B\cos C=(b\cos C+c\cos B)^2=a^2$,

$\therefore b^2+c^2=a^2$, $\therefore\triangle ABC$ 为直角三角形.

题目 7 (2020·全国·统考高考真题) $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,已知 $\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+A\right)+\cos A=\frac{5}{4}$.

(1) 求 A;

(2) 若 $b-c=\frac{\sqrt{3}}{3}a$,证明:$\triangle ABC$ 是直角三角形.

【答案】(1) $A=\frac{\pi}{3}$; (2) 证明见解析

【分析】(1) 根据诱导公式和同角三角函数平方关系,$\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+A\right)+\cos A=\frac{5}{4}$ 可化为 $1-\cos^2A+\cos A=\frac{5}{4}$,即可解出;

(2) 根据余弦定理可得 $b^2+c^2-a^2=bc$,将 $b-c=\frac{\sqrt{3}}{3}a$ 代入可找到 a,b,c 关系,

再根据勾股定理或正弦定理即可证出.

【详解】(1) 因为 $\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+A\right)+\cos A=\frac{5}{4}$,所以 $\sin^2A+\cos A=\frac{5}{4}$,

即 $1-\cos^2A+\cos A=\frac{5}{4}$,

解得 $\cos A=\frac{1}{2}$,又 $0<A<\pi$,

所以 $A=\frac{\pi}{3}$;

(2) 因为 $A=\frac{\pi}{3}$,所以 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$,

即 $b^2+c^2-a^2=bc$ ①,

又 $b-c=\frac{\sqrt{3}}{3}a$ ②,将②代入①得,$b^2+c^2-3(b-c)^2=bc$,

即 $2b^2+2c^2-5bc=0$,而 $b>c$,解得 $b=2c$,

所以 $a=\sqrt{3}c$,

故 $b^2=a^2+c^2$,

即 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

【规律方法】

利用正弦定理判断三角形形状的方法:

(1) 化边为角. 将题目中的所有条件,利用正弦定理化边为角,再根据三角函数的有关知识得到三个内角的关系,进而确定三角形的形状.

(2) 化角为边. 根据题目中的所有条件,利用正弦定理化角为边,再利用代数恒等变换得到边的关系(如 $a=b$, $a^2+b^2=c^2$),进而确定三角形的形状.

2. 判断三角形的形状时,经常用到以下结论

① $\triangle ABC$ 为直角三角形 $\Leftrightarrow$ $a^2=b^2+c^2$ 或 $c^2=a^2+b^2$ 或 $b^2=a^2+c^2$.

② $\triangle ABC$ 为锐角三角形 $\Leftrightarrow$ $a^2+b^2>c^2$ 且 $b^2+c^2>a^2$ 且 $c^2+a^2>b^2$.

③ $\triangle ABC$ 为钝角三角形 $\Leftrightarrow$ $a^2+b^2<c^2$ 或 $b^2+c^2<a^2$ 或 $c^2+a^2<b^2$.

④若 $\sin 2A=\sin 2B$,则 $A=B$ 或 $A+B=\frac{\pi}{2}$.

3. 常见误区:易忽略三角形中的隐含条件.

热点三 三角形解的个数问题

题目 8 (2016 全国卷Ⅰ文,4) $\triangle ABC$ 的内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c. 已知 $a=\sqrt{5}$, $c=2$, $\cos A=\dfrac{2}{3}$, 则 $b=$ ( )

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. 3

【答案】D

【解析】由余弦定理,得 $4+b^2-2\times 2b\cos A=5$. 整理得 $3b^2-8b-3=0$, 解得 $b=3$ 或 $b=-\dfrac{1}{3}$(舍去), 故选 D.

题目 9 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $\sin C=\dfrac{1}{2}$, $a=2\sqrt{3}$, $b=2$, 求边 c.

【解析】$\because \sin C=\dfrac{1}{2}$, 且 $0<C<\pi$,

$\therefore C=\dfrac{\pi}{6}$ 或 $\dfrac{5\pi}{6}$.

当 $C=\dfrac{\pi}{6}$ 时, $\cos C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

此时, $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=4$, 即 $c=2$.

当 $C=\dfrac{5\pi}{6}$ 时, $\cos C=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

此时, $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=28$, 即 $c=2\sqrt{7}$.

题目 10 (2023 春·江西鹰潭·高三贵溪市实验中学校考阶段练习) 在① $\tan A\tan C-\sqrt{3}\tan A=1+\sqrt{3}\tan C$; ② $(2c-\sqrt{3}a)\cos B=\sqrt{3}b\cos A$; ③ $(a-\sqrt{3}c)\sin A+c\sin C=b\sin B$ 这三个条件中任选一个,补充在下面问题中并作答.

问题:在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c, 且______.

(1) 求角 B 的大小;

(2) 已知 $c=b+1$, 且角 A 有两解,求 b 的范围.

【答案】(1) 答案见解析

(2) $b>1$

【分析】(1) 若选①,由两角和的正切公式化简即可求出求角 B 的大小;若选②,利用正弦定理统一为角的三角函数,再由两角和的正弦公式即可求解;若选③,由余弦定理代入化简即可得出答案.

(2) 将 $c=b+1$ 代入正弦定理可得 $\sin C=\dfrac{b+1}{2b}$, 要使角 A 有两解,即 $\dfrac{1}{2}<\sin C<1$, 解不等式即可得出答案.

【详解】(1) 若选①:整理得 $1-\tan A\tan C=-\sqrt{3}(\tan A+\tan C)$, 因为 $A+B+C=\pi$,

所以 $\tan B=-\tan(A+C)=-\dfrac{\tan A+\tan C}{1-\tan A\tan C}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, 因为 $B\in(0,\pi)$, 所以 $B=\dfrac{\pi}{6}$;

若选②:因为 $(2c-\sqrt{3}a)\cos B=\sqrt{3}b\cos A$,

由正弦定理得 $(2\sin C-\sqrt{3}\sin A)\cos B=\sqrt{3}\sin B\cos A$,

所以 $2\sin C\cos B=\sqrt{3}\sin(A+B)=\sqrt{3}\sin C$, $\sin C>0$, 所以 $\cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 因为 $B\in(0,\pi)$, 所以 $B=\dfrac{\pi}{6}$;

若选③:由正弦定理整理得 $a^2+c^2-b^2=\sqrt{3}ac$, 所以 $\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

即 $\cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 因为 $B\in(0,\pi)$, 所以 $B=\dfrac{\pi}{6}$;

(2)将 $c=b+1$ 代入正弦定理 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，得 $\frac{b}{\sin B}=\frac{b+1}{\sin C}$，所以 $\sin C=\frac{b+1}{2b}$，

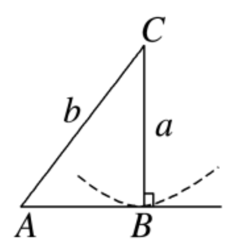
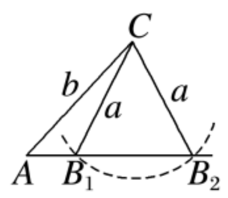
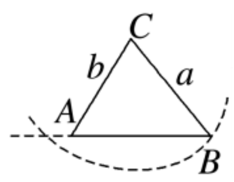
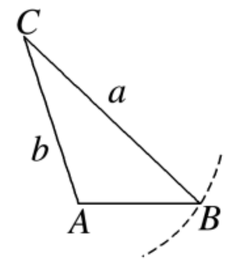
因为 $B=\frac{\pi}{6}$，角 A 的解有两个，所以角 C 的解也有两个，所以 $\frac{1}{2}<\sin C<1$，

即 $\frac{1}{2}<\frac{b+1}{2b}<1$，又 $b>0$，所以 $b<b+1<2b$，解得 $b>1$.

【方法技巧】

三角形解的个数的判断

在 $\triangle ABC$ 中，已知 a，b 和 A，利用正弦定理解三角形时，会出现解不确定的情况，一般可根据三角形中“大边对大角和三角形内角和定理”来取舍. 具体解的情况如下表：

	A 为锐角			A 为钝角或直角
图形				
关系式	$a=b\sin A$	$b\sin A<a<b$	$a\geqslant b$	$a>b$
解的个数	一解	两解	一解	一解

上表中若 A 为锐角，则当 $a<b\sin A$ 时无解；若 A 为钝角或直角，则当 $a\leqslant b$ 时无解.

热点四 解三角形与平面向量的交汇

题目 11 (2023·全国·统考高考真题) 正方形 ABCD 的边长是 2，E 是 AB 的中点，则 $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}=$ ( )

A. $\sqrt{5}$ B. 3 C. $2\sqrt{5}$ D. 5

【答案】B

【分析】方法一：以 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$ 为基底向量表示 $\overrightarrow{EC}$，$\overrightarrow{ED}$，再结合数量积的运算律运算求解；方法二：建系，利用平面向量的坐标运算求解；方法三：利用余弦定理求 $\cos\angle DEC$，进而根据数量积的定义运算求解.

【详解】方法一：以 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$ 为基底向量，可知 $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AD}\right|=2$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$，

则 $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，

所以 $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2=-1+4=3$；

方法二：如图，以 A 为坐标原点建立平面直角坐标系，

则 $E(1,0)$，$C(2,2)$，$D(0,2)$，可得 $\overrightarrow{EC}=(1,2)$，$\overrightarrow{ED}=(-1,2)$，

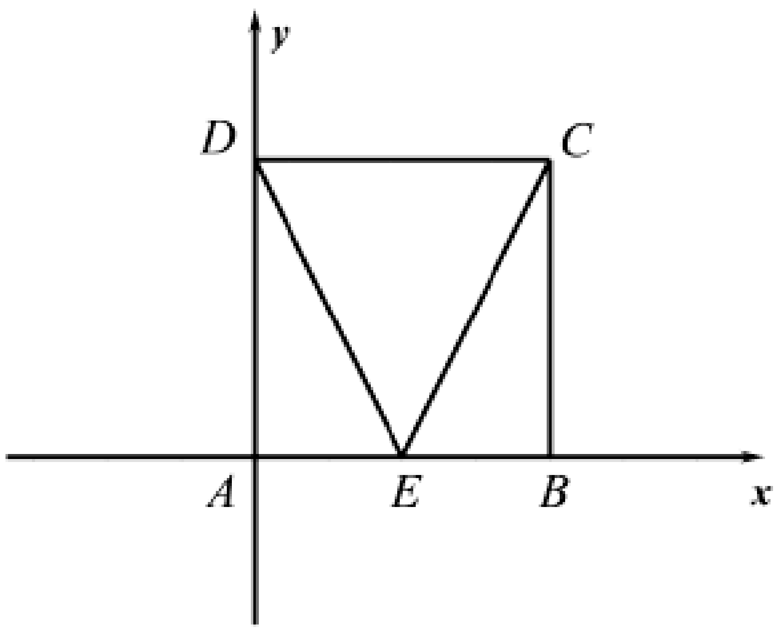
所以 $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}=-1+4=3$；

方法三：由题意可得：$ED=EC=\sqrt{5}$，$CD=2$，

在 $\triangle CDE$ 中，由余弦定理可得 $\cos\angle DEC=\frac{DE^2+CE^2-DC^2}{2DE\cdot CE}=\frac{5+5-4}{2\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{3}{5}$，

所以 $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}=\left|\overrightarrow{EC}\right|\left|\overrightarrow{ED}\right|\cos\angle DEC=\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\frac{3}{5}=3$.

故选：B.



题目 12 (2023·贵州毕节·统考模拟预测)已知点 G 为三角形 ABC 的重心,且 $GA + GB = GA - GB$,当 $\angle C$ 取最大值时,$\cos C =$ ( )

A. $\frac{4}{5}$　　B. $\frac{3}{5}$　　C. $\frac{2}{5}$　　D. $\frac{1}{5}$

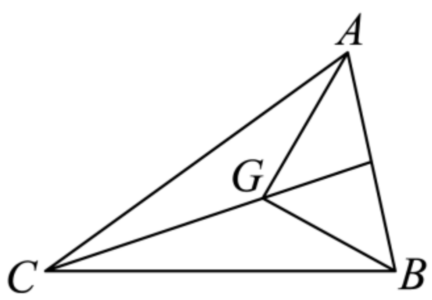
【答案】A

【分析】由题设可得 $AG\ \ BG = 0$,结合 $AG = \frac{1}{3}(AC + AB)$,$BG = \frac{1}{3}(BA + BC)$ 及余弦定理可得 $\cos C = \frac{2}{5}\ \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$,根据基本不等式即可求解.

【详解】由题意 $GA + GB = GA - GB$,所以 $(GA + GB)^2 = (GA - GB)^2$,

即 $GA^2 + GB^2 + 2GA\ \ GB = GA^2 + GB^2 - 2GA\ \ GB$,所以 $GA\ \ GB = 0$,所以 $AG \perp BG$,

又 $AG = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}(AC + AB) = \frac{1}{3}(AC + AB)$,$BG = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}(BA + BC) = \frac{1}{3}(BA + BC)$,



则 $AG\ \ BG = \frac{1}{9}(AC + AB)\ \ (BA + BC) = \frac{1}{9}(AC\ \ BA + AC\ \ BC + AB\ \ BA + AB\ \ BC) = 0$,

所以 $CA\ \ CB = AC\ \ AB + BA\ \ BC + AB^2$,即 $ab\cos C = bc\cos A + ac\cos B + c^2$,

由 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$,$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$,$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$,

所以 $a^2 + b^2 = 5c^2$,

所以 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{2}{5}\ \frac{a}{b} + \frac{b}{a}\ \geqslant \frac{4}{5}\sqrt{\frac{a}{b}\ \frac{b}{a}} = \frac{4}{5}$,当且仅当 $a = b$ 时等号成立,

又 $y = \cos x$ 在 $0, \pi$ 上单调递减,$C \in 0, \pi$,

所以当 $\angle C$ 取最大值时,$\cos C = \frac{4}{5}$.

题目 13 【多选题】(2023·浙江·二模)在 $\triangle ABC$ 中,$AB^2 + AC^2 = 2BC^2$,$CD = BC$,则 ( )

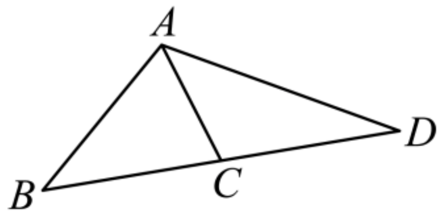
A. $AD > CD$　　B. $AD < \frac{5}{2}CD$　　C. $\angle ADC > \frac{\pi}{6}$　　D. $\angle ADC < \frac{\pi}{4}$

【答案】BD

【分析】根据条件,结合余弦定理求得 $AD = \sqrt{3}b$,再建立不等关系,判断选项.

【详解】设 $AB=c$，$BC=CD=a$，$AC=b$，$AD=x$，

由条件可知，$b^2+c^2=2a^2$，



$\triangle ABC$ 中，$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，

$\triangle ABD$ 中，$x^2=c^2+4a^2-4ac\cos B=c^2+4a^2-2(a^2+c^2-b^2)$

$=2a^2-c^2+2b^2=3b^2$，

所以 $AD=\sqrt{3}b$，

$c^2=2a^2-b^2=2a^2-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}AD\right)^2>0$，得 $AD<\sqrt{6}a$，即 $AD<\sqrt{6}CD<\dfrac{5}{2}CD$，故B正确；

$\cos\angle ADC=\dfrac{a^2+3b^2-b^2}{2\sqrt{3}ab}=\dfrac{a^2+2b^2}{2\sqrt{3}ab}=\dfrac{a}{2\sqrt{3}b}+\dfrac{b}{\sqrt{3}a}\geqslant 2\sqrt{\dfrac{1}{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $\angle ADC<\dfrac{\pi}{4}$.

故选：BD

【点评】

1.交汇考向主要有：(1)向量坐标运算条件下解三角形问题；(2)三角形中向量运算问题；(3)共线向量条件下解三角形问题；(4)向量的模与解三角形问题.

2.解答的总体思路可归结为三个环节：(1)根据向量运算的定义、法则、运算律等，加以计算；(2)应用三角公式，进行变形进而完成化简；(3)应用正弦定理、余弦定理、三角形面积公式等，实施边角转化.就整体而言，正确向量运算、恒等变形是基础，恰当的边角转化是关键，考查的核心是解三角形、三角问题，向量运算是工具.应该注意的是，向量运算条件的给出，也可能是向量平行、垂直，需根据相关条件加以转化.

热点五 解三角形与解析几何交汇问题

题目 14 (2021·全国·统考高考真题) 已知 F_1，F_2 是双曲线 C 的两个焦点，P 为 C 上一点，且 $\angle F_1PF_2=60°$，$|PF_1|=3|PF_2|$，则 C 的离心率为（　　）

A. $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$　　C. $\sqrt{7}$　　D. $\sqrt{13}$

【答案】A

【分析】根据双曲线的定义及条件，表示出 $|PF_1|$，$|PF_2|$，结合余弦定理可得答案.

【详解】因为 $|PF_1|=3|PF_2|$，由双曲线的定义可得 $|PF_1|-|PF_2|=2|PF_2|=2a$，

所以 $|PF_2|=a$，$|PF_1|=3a$；

因为 $\angle F_1PF_2=60°$，由余弦定理可得 $4c^2=9a^2+a^2-2\times 3a\cdot a\cdot\cos60°$，

整理可得 $4c^2=7a^2$，所以 $e^2=\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{7}{4}$，即 $e=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

故选：A

【点睛】关键点睛：双曲线的定义是入手点，利用余弦定理建立 a,c 间的等量关系是求解的关键.

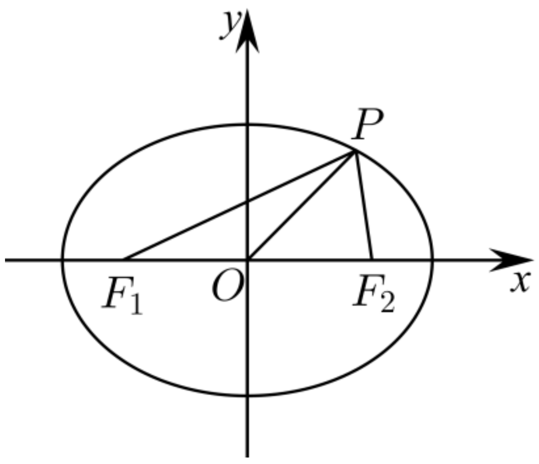
题目 15 (2023·全国·高三专题练习) 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{6}=1$，$F_1$，$F_2$ 为两个焦点，O 为原点，P 为椭圆上一点，$\cos\angle F_1PF_2=\dfrac{3}{5}$，则 $|PO|=$（　　）

A. $\frac{2}{5}$　　　　B. $\frac{\sqrt{30}}{2}$　　　　C. $\frac{3}{5}$　　　　D. $\frac{\sqrt{35}}{2}$

【答案】B

【分析】根据椭圆的定义结合余弦定理求出 $PF_1\ PF_2$，$PF_1{}^2+PF_2{}^2$ 的值，利用 $PO=\frac{1}{2}\ PF_1+PF_2$，根据向量模的计算即可求得答案.

【详解】由题意椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{6}=1$，$F_1$，$F_2$ 为两个焦点，可得 $a=3$，$b=\sqrt{6}$，$c=\sqrt{3}$，



则 $PF_1+PF_2=2a=6$①，即 $PF_1{}^2+PF_2{}^2+2PF_1\ PF_2=36$，

由余弦定理得 $F_1F_2{}^2=PF_1{}^2+PF_2{}^2-2PF_1\ PF_2\cos\angle F_1PF_2=(2\sqrt{3})^2$，

$\cos\angle F_1PF_2=\frac{3}{5}$，故 $PF_1+PF_2\ {}^2-2PF_1\ PF_2\ 1+\frac{3}{5}=12$，②

联立①②，解得：$PF_1\ PF_2=\frac{15}{2}$，$\therefore PF_1{}^2+PF_2{}^2=21$，

而 $PO=\frac{1}{2}\ PF_1+PF_2$，所以 $PO=PO=\frac{1}{2}\ PF_1+PF_2$，

即 $PO=\frac{1}{2}\ PF_1+PF_2=\frac{1}{2}\sqrt{PF_1{}^2+2PF_1\ PF_2+PF_2{}^2}=\frac{1}{2}\sqrt{21+2\times\frac{15}{2}\times\frac{3}{5}}=\frac{\sqrt{30}}{2}$，

故选：B

【点睛】方法点睛：本题综合考查了椭圆和向量知识的结合，解答时要注意到 O 为 F_1F_2 的中点，从而可以利用向量知识求解 $|PO|$.

题目 16 (2023·湖北武汉·统考模拟预测) 已知抛物线 $y^2=8x$ 的焦点为 F，准线与 x 轴的交点为 C，过点 C 的直线 l 与抛物线交于 A，B 两点，若 $\angle AFB=\angle CFB$，则 $|AF|=$ ______.

【答案】8

【分析】先设出直线 l 的方程，联立抛物线方程，得到两根之和，两根之积，表达出 $AB=\sqrt{1+m^2}\ y_1-y_2$，$BC=\sqrt{1+m^2}\ y_2$，再由正弦定理得到 $\frac{CF}{AF}=\frac{BC}{AB}$，得到 $\frac{4}{my_1}=\frac{y_2}{y_1-y_2}$，代入两根之和，两根之积，列出方程，求出 $m=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，进而求出 $y_1=4\sqrt{3}$，$|AF|=8$.

【详解】由题意得，$F\ 2,0$，$C\ -2,0$，当直线 l 的斜率为 0 时，与抛物线只有1个交点，不合要求，

故设直线 l 的方程为 $x=my-2$，不妨设 $m>0$，

联立 $y^2=8x$，可得 $y^2-8my+16=0$，易得 $\Delta>0$，

设 $A\ x_1,y_1$，$B\ x_2,y_2$，则 $y_1>0$，$y_2>0$，

则 $y_1+y_2=8m$，$y_1y_2=16$，

则 $AB=\sqrt{1+m^2}\ y_1-y_2$，

$BC=\sqrt{1+m^2}\ y_2=\sqrt{1+m^2}\ y_2$，

由正弦定理得 $\frac{CF}{\sin\angle CBF}=\frac{BC}{\sin\angle CFB}$，$\frac{AF}{\sin\angle ABF}=\frac{AB}{\sin\angle AFB}$，

因为 $\angle AFB=\angle CFB$,$\angle CBF+\angle ABF=\pi$,

所以 $y_1>y_2$,$\frac{CF}{AF}=\frac{BC}{AB}$,即 $\frac{4}{AF}=\frac{\sqrt{1+m^2}\,y_2}{\sqrt{1+m^2}\,(y_1-y_2)}=\frac{y_2}{y_1-y_2}$,

又由焦半径公式可知 $AF=x_1+2=my_1-2+2=my_1$,

则 $\frac{4}{my_1}=\frac{y_2}{y_1-y_2}$,即 $my_1y_2=4y_1-4y_2=4\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$,

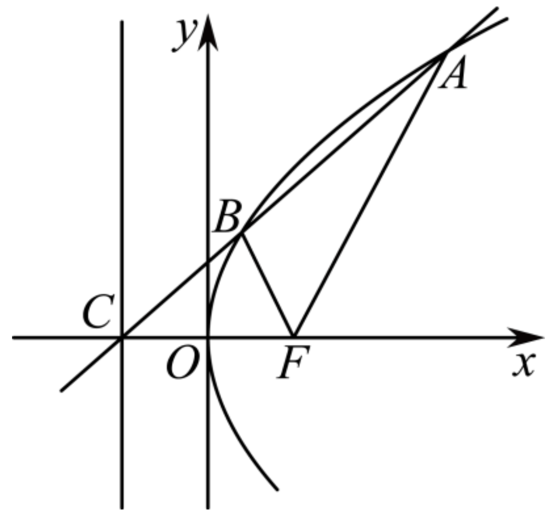
即 $16m=4\sqrt{64m^2-64}$,解得 $m=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,

则 $y_1+y_2=\frac{16\sqrt{3}}{3}$,$y_1y_2=16$,解得 $y_1=4\sqrt{3}$,

故 $|AF|=my_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}\times4\sqrt{3}=8$,

当 $m<0$ 时,同理可得到 $|AF|=8$.

故答案为:8



【点睛】方法点睛:解三角形中,当条件中有角平分线时,可利用正弦定理得到角平分线的性质,将角的关系转化为边的比例关系,再进行求解.

【点评】

1. 与椭圆、双曲线的定义及几何性质相结合,在“焦点三角形”中,综合应用定义、正弦定理或余弦定理,确定几何量或几何量之间的关系,解决离心率(范围)计算问题,这类问题多以客观题出现;

2. 直线与圆锥曲线位置关系问题中,通过交点等构造或产生三角形,计算三角形面积(　　)、线段长度等,这类问题多在主观题出现,解题过程往往通过直线与圆锥曲线方程联立方程组,应用判别式、一元二次方程根与系数的关系、弦长公式、正弦定理、余弦定理等.

热点六 解三角形与立体几何交汇问题

题目 17 (2023·全国·统考高考真题)已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是边长为 4 的正方形,$PC=PD=3$,$\angle PCA=45°$,则 $\triangle PBC$ 的面积为(　　)

A. $2\sqrt{2}$　　B. $3\sqrt{2}$　　C. $4\sqrt{2}$　　D. $6\sqrt{2}$

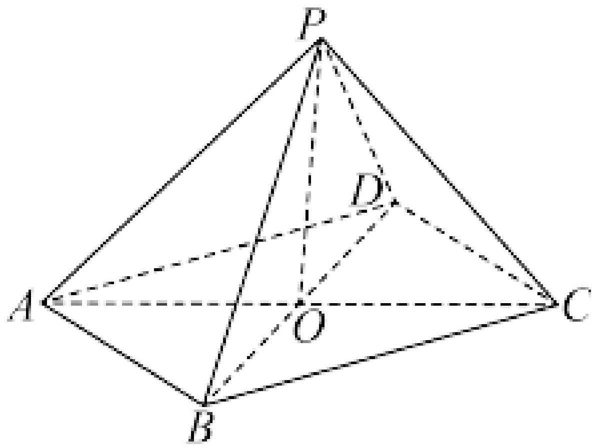
【答案】C

【分析】法一:利用全等三角形的证明方法依次证得 $\triangle PDO$ 　$\triangle PCO$,$\triangle PDB$ 　$\triangle PCA$,从而得到 $PA=PB$,再在 $\triangle PAC$ 中利用余弦定理求得 $PA=\sqrt{17}$,从而求得 $PB=\sqrt{17}$,由此在 $\triangle PBC$ 中利用余弦定理与三角形面积公式即可得解;

法二:先在 $\triangle PAC$ 中利用余弦定理求得 $PA=\sqrt{17}$,$\cos\angle PCB=\frac{1}{3}$,从而求得 $PA\cdot PC=-3$,再利用空间向量的数量积运算与余弦定理得到关于 PB ,$\angle BPD$ 的方程组,从而求得 $PB=\sqrt{17}$,由此在 $\triangle PBC$ 中利用余弦定理与三角形面积公式即可得解.

【详解】法一:

连结 AC ,BD 交于 O ,连结 PO ,则 O 为 AC ,BD 的中点,如图,



因为底面ABCD 为正方形，$AB=4$，所以 $AC=BD=4\sqrt{2}$，则 $DO=CO=2\sqrt{2}$，

又 $PC=PD=3$，$PO=OP$，所以 $\triangle PDO$ $\triangle PCO$，则 $\angle PDO=\angle PCO$，

又 $PC=PD=3$，$AC=BD=4\sqrt{2}$，所以 $\triangle PDB$ $\triangle PCA$，则 $PA=PB$，

在 $\triangle PAC$ 中，$PC=3$，$AC=4\sqrt{2}$，$\angle PCA=45°$，

则由余弦定理可得 $PA^2=AC^2+PC^2-2AC\ PC\cos\angle PCA=32+9-2\times4\sqrt{2}\times3\times\frac{\sqrt{2}}{2}=17$，

故 $PA=\sqrt{17}$，则 $PB=\sqrt{17}$，

故在 $\triangle PBC$ 中，$PC=3$，$PB=\sqrt{17}$，$BC=4$，

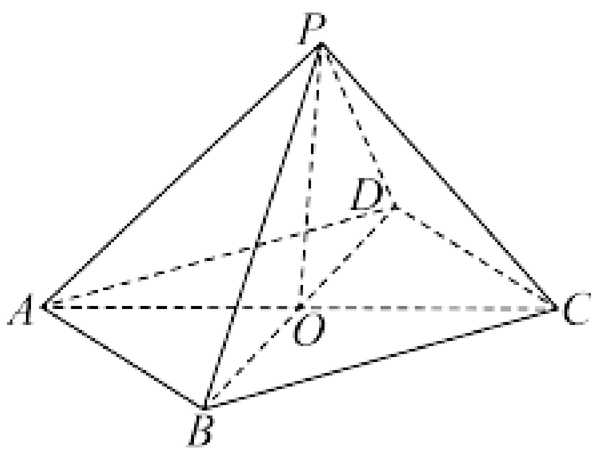
所以 $\cos\angle PCB=\frac{PC^2+BC^2-PB^2}{2PC\ BC}=\frac{9+16-17}{2\times3\times4}=\frac{1}{3}$，

又 $0<\angle PCB<\pi$，所以 $\sin\angle PCB=\sqrt{1-\cos^2\angle PCB}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

所以 $\triangle PBC$ 的面积为 $S=\frac{1}{2}PC\ BC\sin\angle PCB=\frac{1}{2}\times3\times4\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=4\sqrt{2}$.

法二：

连结 AC，BD 交于 O，连结 PO，则 O 为 AC，BD 的中点，如图，



因为底面ABCD 为正方形，$AB=4$，所以 $AC=BD=4\sqrt{2}$，

在 $\triangle PAC$ 中，$PC=3$，$\angle PCA=45°$，

则由余弦定理可得 $PA^2=AC^2+PC^2-2AC\ PC\cos\angle PCA=32+9-2\times4\sqrt{2}\times3\times\frac{\sqrt{2}}{2}=17$，故 $PA=\sqrt{17}$，

所以 $\cos\angle APC=\frac{PA^2+PC^2-AC^2}{2PA\ PC}=\frac{17+9-32}{2\times\sqrt{17}\times3}=-\frac{\sqrt{17}}{17}$，则 $PA\ PC=PA\ PC\cos\angle APC=\sqrt{17}\times3\times\left(-\frac{\sqrt{17}}{17}\right)=-3$，

不妨记 $PB=m$，$\angle BPD=\theta$，

因为 $PO=\frac{1}{2}(PA+PC)=\frac{1}{2}(PB+PD)$，所以 $(PA+PC)^2=(PB+PD)^2$，

即 $PA^2+PC^2+2PA\ PC=PB^2+PD^2+2PB\ PD$，

则 $17+9+2\times(-3)=m^2+9+2\times3\times m\cos\theta$，整理得 $m^2+6m\cos\theta-11=0$①，

又在 $\triangle PBD$ 中，$BD^2=PB^2+PD^2-2PB\ PD\cos\angle BPD$，即 $32=m^2+9-6m\cos\theta$，则 $m^2-6m\cos\theta-23=0$