关于正项级数的判别法

一、比较判别法

1. 定义: 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$中各项均有$u_n \geq 0$,

这种级数称为正项级数.

2. 正项级数收敛的充要条件: $s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n \leq \cdots$

部分和数列$\{s_n\}$为单调增加数列.

定理

正项级数收敛$\Leftrightarrow$部分和所成的数列s_n有界.

3. 比较判别法 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$均为正项级数

且$u_n \le v_n \ (n=1,2,\cdots)$，若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛；

反之，若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$发散，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$发散.

证明 (1) 设$\sigma = \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ $\because u_n \le v_n$,

且$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \le v_1 + v_2 + \cdots + v_n \le \sigma$,

即部分和数列有界 $\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛.

(2) 设 $s_n \to \infty\ (n \to \infty)$ 且 $u_n \le v_n$，

则 $\sigma_n \ge s_n \to \infty$ 不是有界数列

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散 定理证毕.

推论: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛(发散)

且 $v_n \le ku_n (n \ge N) (ku_n \le v_n)$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛(发散).

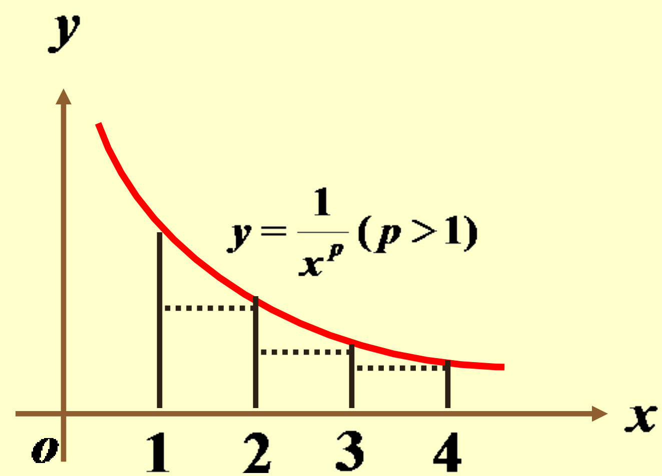
比较审敛法的不便：须有参考级数.

例1 讨论P-级数

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$$ 的收敛性.$(p>0)$

解　设 $p\le 1$，$\because \dfrac{1}{n^p}\ge\dfrac{1}{n}$，则$P-$级数发散

设 $p>1$,由图可知 $\dfrac{1}{n^p}<\displaystyle\int_{n-1}^{n}\frac{dx}{x^p}$



$$s_n=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}$$

$$\le 1+\int_1^2\frac{dx}{x^p}+\cdots+\int_{n-1}^{n}\frac{dx}{x^p}$$

$$=1+\int_1^n \frac{dx}{x^p}=1+\frac{1}{p-1}(1-\frac{1}{n^{p-1}})<1+\frac{1}{p-1}$$

即s_n有界，则$P-$级数收敛

$$P-\text{级数}\begin{cases}\text{当}p>1\text{时，收敛}\\ \text{当}p\le 1\text{时，发散}\end{cases}$$

重要参考级数：几何级数，P-级数，调和级数.

例 2 证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$是发散的.

证明 $\because \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{n+1},$

而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$发散,

$\therefore$ 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$发散.

4. 比较审敛法的极限形式:

设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$都是正项级数,如果$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l$,

则(1) 当$0<l<+\infty$时,二级数有相同的敛散性;

(2) 当$l=0$时, 若$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛;

(3) 当$l=+\infty$时, 若$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散,则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散;

证明 (1) 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=l$ 对于 $\varepsilon=\dfrac{l}{2}>0,$

$\exists N$, 当 $n>N$ 时, $l-\dfrac{l}{2}<\dfrac{u_n}{v_n}<l+\dfrac{l}{2}$

即 $\dfrac{l}{2}v_n<u_n<\dfrac{3l}{2}v_n \quad (n>N)$

由比较审敛法的推论，得证.

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$为正项级数,

如果$\lim\limits_{n\to\infty} nu_n = l > 0$ (或 $\lim\limits_{n\to\infty} nu_n = \infty$), 则级数

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散;

如果有$p > 1$，使得$\lim\limits_{n\to\infty} n^p u_n$存在,

则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛.

例3 判定下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n-n}$;

解 (1) $\because \lim_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1$, 原级数发散.

(2) $\because \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3^n-n}}{\frac{1}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\frac{n}{3^n}}=1$,

$\because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$收敛, 故原级数收敛.

二、比值判别法

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$是正项级数, 如果$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$ (ρ数或$+\infty$)

则$\rho<1$时级数收敛; $\rho>1$时级数发散; $\rho=1$时失效.

证明　当ρ为有限数时, 对$\forall\varepsilon>0$,

$\exists N$, 当$n>N$时, 有$\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}-\rho\right|<\varepsilon$,

即$\rho-\varepsilon<\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<\rho+\varepsilon \quad (n>N)$