

# 湖南省岳阳市 2024 届高三下学期教学质量监测（三）（三模）数学试 题

副标题

考试时间：\*\*分钟 满分：\*\*分

注意事项：

- 1、填写答题卡的内容用 2B 铅笔填写
- 2、提前 xx 分钟收取答题卡

**一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。（共 8 题）**

1. 已知集合  $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ ， $B = \left\{x \mid \frac{x-3}{x+1} \leq 0\right\}$ ，则  $A \cap B = ( )$

- A.  $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$       B.  $\{0, 1, 2, 3\}$       C.  $\{1, 2, 3\}$       D.  $\{0, 1, 2\}$

2. 若虚数单位  $i$  是关于  $x$  的方程  $ax^3 + bx^2 + 2x + 1 = 0 (a, b \in \mathbb{R})$  的一个根，则  $|a + bi| = ( )$

- A.  $\sqrt{2}$       B. 2      C.  $\sqrt{5}$       D. 5

3. 直线  $2x - 3y + 1 = 0$  的一个方向向量是  $( )$

- A.  $(3, 2)$       B.  $(2, 3)$       C.  $(2, -3)$       D.  $(3, -2)$

4. 下列命题正确的是  $( )$

- A. 若直线  $l$  上有无数个点不在平面  $\alpha$  内，则  $l \parallel \alpha$
- B. 若直线  $a$  不平行于平面  $\alpha$  且  $a \not\subset \alpha$ ，则平面  $\alpha$  内不存在与  $a$  平行的直线
- C. 已知直线  $a, b$ ，平面  $\alpha, \beta$ ，且  $a \subset \alpha, b \subset \beta, \alpha \parallel \beta$ ，则直线  $a, b$  平行
- D. 已知两条相交直线  $a, b$ ，且  $a \parallel$  平面  $\alpha$ ，则  $b$  与  $\alpha$  相交

5. 已知  $y = f(x+1) + 1$  为奇函数，则  $f(-1) + f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = ( )$

- A. -12      B. -10      C. -6      D. -5

6. 把 5 个人安排在周一至周五值班，要求每人值班一天，每天安排一人，甲乙安排在不相邻的两天，乙丙安排在相邻的两天，则不同的安排方法数是  $( )$

- A. 96 种      B. 60 种      C. 48 种      D. 36 种

7. 已知等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ，若  $a_2 \geq a_1 > 0, S_{20} = 100$ ，则  $a_{10}a_{11} ( )$

考号：\_\_\_\_\_

班级：\_\_\_\_\_

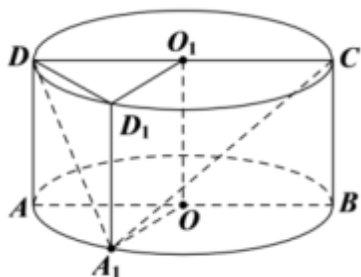
姓名：\_\_\_\_\_

学校：\_\_\_\_\_



保密★启用前

11. 如图, 四边形  $ABCD$  是圆柱  $OO_1$  的轴截面且面积为 2, 四边形  $OO_1DA$  绕  $OO_1$  逆时针旋转  $\theta(0 \leq \theta \leq \pi)$  到四边形  $OO_1D_1A_1$ , 则 ( )



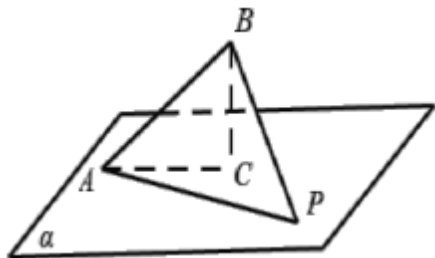
- A. 圆柱  $OO_1$  的侧面积为  $2\pi$
- B. 当  $0 < \theta < \pi$  时,  $DD_1 \perp A_1C$
- C. 当  $0 < \theta < \pi$  时, 四面体  $CDD_1A_1$  的外接球表面积最小值为  $3\pi$
- D. 当  $BD_1 = \sqrt{2}$  时,  $\frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \pi$

三、填空题: 本大题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分. (共 3 题)

12. 已知双曲线  $C$  过点  $(1, \sqrt{6})$ , 且渐近线方程为  $y = \pm 2x$ , 则  $C$  的离心率为\_\_\_\_\_.

13. 已知角  $\alpha, \beta$  的终边关于直线  $y = x$  对称, 且  $\sin(\alpha - \beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 则  $\alpha, \beta$  的一组取值可以是  $\alpha =$ \_\_\_\_\_,  $\beta =$ \_\_\_\_\_.

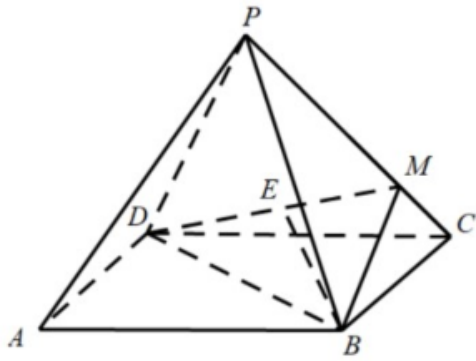
14. 如图所示, 直角三角形  $ABC$  所在平面垂直于平面  $\alpha$ , 一条直角边  $AC$  在平面  $\alpha$  内, 另一条直角边  $BC$  长为  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  且  $\angle BAC = \frac{\pi}{6}$ , 若平面  $\alpha$  上存在点  $P$ , 使得  $\triangle ABP$  的面积为  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ , 则线段  $CP$  长度的最小值为\_\_\_\_\_.



四、解答题: 本大题共 5 小题, 共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. (共 5 题)



保密★启用前



(1) 证明:  $PC \perp$  平面  $BDM$  ;

(2) 点  $E$  在直线  $DM$  上, 求  $BE$  与平面  $ABCD$  所成角的最大值.

18. 已知动圆  $P$  过定点  $F(0,1)$  且与直线  $y=3$  相切, 记圆心  $P$  的轨迹为曲线  $E$ .

(1) 已知  $A$ 、 $B$  两点的坐标分别为  $(-2,1)$ 、 $(2,1)$ , 直线  $AP$ 、 $BP$  的斜率分别为  $k_1$ 、 $k_2$ ,

证明:  $k_1 - k_2 = 1$  ;

(2) 若点  $M(x_1, y_1)$ 、 $N(x_2, y_2)$  是轨迹  $E$  上的两个动点且  $x_1 x_2 = -4$ , 设线段  $MN$  的中点为  $Q$ , 圆  $P$  与动点  $Q$  的轨迹  $\Gamma$  交于不同于  $F$  的三点  $C$ 、 $D$ 、 $G$ , 求证:  $\triangle CDG$  的重心的横坐标为定值.

19. 已知  $\triangle ABC$  的三个角  $A$ ,  $B$ ,  $C$  的对边分别为  $a$ ,  $b$ ,  $c$  且  $c=2b$ , 点  $D$  在边  $BC$  上,  $AD$  是  $\angle BAC$  的角平分线, 设  $AD=kAC$  (其中  $k$  为正实数).

(1) 求实数  $k$  的取值范围;

(2) 设函数  $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}ax^3 - \frac{5}{2}bx^2 + cx - \frac{b}{2}$

① 当  $k = \frac{2\sqrt{3}}{3}$  时, 求函数  $f(x)$  的极小值;

② 设  $x_0$  是  $f(x)$  的最大零点, 试比较  $x_0$  与 1 的大小.



保密★启用前

【答案区】

1. 【答案】B

【解析】【解答】解：原不等式  $\frac{x-3}{x+1} \leq 0$  ， 转化为  $\begin{cases} (x-3)(x+1) \leq 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases}$  ， 解得

$$-1 < x \leq 3 ,$$

则集合  $B = \{x | -1 < x \leq 3\}$  ， 因为集合  $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$  ， 所以  $A \cap B =$

$$\{0, 1, 2, 3\} .$$

故答案为：B.

【分析】先解不等式求得集合  $B$  ， 再根据集合的交集运算求解即可.

2. 【答案】C

【解析】【解答】解：因为  $i$  是方程  $ax^3 + bx^2 + 2x + 1 = 0 (a, b \in \mathbb{R})$  的一个根，所以

$$ai^3 + bi^2 + 2i + 1 = 0 ,$$

即  $(2-a)i + (1-b) = 0$  ， 又因为  $a, b \in \mathbb{R}$  ， 所以  $a = 2, b = 1$  ， 则

$$|a+bi| = |2+i| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5} .$$

故答案为：C.

【分析】由题意，结合复数相等的充要条件列式求得  $a, b$  ， 再求复数的模即可.

3. 【答案】A

【解析】【解答】解：易知直线  $2x - 3y + 1 = 0$  的斜率为  $\frac{2}{3}$  ，

则直线  $2x - 3y + 1 = 0$  的一个方向向量为  $\vec{a} = \left(1, \frac{2}{3}\right)$ ；

A、因为  $3 \times \frac{2}{3} - 1 \times 2 = 0$  ， 所以向量  $(3, 2)$  与  $\left(1, \frac{2}{3}\right)$  共线，故 A 符合；

B、因为  $2 \times \frac{2}{3} - 1 \times 3 \neq 0$  ， 即向量  $(2, 3)$  与  $\left(1, \frac{2}{3}\right)$  不共线，故 B 不符合；

C、因为  $3 \times \frac{2}{3} - 1 \times (-2) \neq 0$  ， 即向量  $(3, -2)$  与  $\left(1, \frac{2}{3}\right)$  不共线，故 C 不符合；

D、因为  $2 \times \frac{2}{3} - 1 \times (-3) \neq 0$  ， 即向量  $(2, -3)$  与  $\left(1, \frac{2}{3}\right)$  不共线，故 D 不符合.





保密★启用前

排好后产生 4 个空位，因甲乙不相邻，则只能从 3 个空中任选 1 个安排甲，有  $A_3^1 = 3$  种安排方法，

由分步乘法计数原理可知：不同的方案共有  $2 \times 6 \times 3 = 36$  种。

故答案为：D.

【分析】根据分步乘法计数原理，结合捆绑法和插空法求解即可。

7. 【答案】B

【解析】【解答】解：由  $S_{20} = 100$ ，可得  $S_{20} = \frac{20(a_1 + a_{20})}{2} = 10(a_{10} + a_{11}) = 100$ ，

解得  $a_{10} + a_{11} = 10$ ，

因为  $a_2 \geq a_1 > 0$ ，所以等差数列  $\{a_n\}$  的公差  $d \geq 0$ ，故  $a_{10} > 0, a_{11} > 0$ ，

则  $a_{10}a_{11} \leq \left(\frac{a_{10} + a_{11}}{2}\right)^2 = 25$ ，当且仅当  $a_{10} = a_{11} = 5$  时等号成立，

即当  $a_{10} = a_{11} = 5$  时， $a_{10}a_{11}$  取得最大值 25。

故答案为：B.

【分析】由  $S_{20} = 100$ ，利用等差数列的求和公式结合等差数列的性质推出

$a_{10} + a_{11} = 10$ ，再利用基本不等式求解即可。

8. 【答案】C

【解析】【解答】解：当  $a < 0$  时，若  $x < a$ ，则  $f(x) = e^x + a$ ，

因为函数  $f(x) = e^x + a$  在  $(-\infty, a)$  上单调递增，所以  $a < f(x) < e^a + a$ ，

若  $x \geq a$ ，则  $f(x) = x^2 + 2ax = (x+a)^2 - a^2 \geq -a^2$ ，当且仅当  $x = -a$  时取等号，

因为  $f(x)$  不存在最小值，所以  $-a^2 > a$ ，所以  $-1 < a < 0$ ；

当  $a \geq 0$  时，若  $x < a$ ，则  $f(x) = e^x + a$ ，

因为函数  $f(x) = e^x + a$  在  $(-\infty, a)$  上单调递增，所以  $a < f(x) < e^a + a$ ，

若  $x \geq a$ ，则  $f(x) = x^2 + 2ax = (x+a)^2 - a^2 \geq f(a) = 3a^2$ ，当且仅当  $x = a$  时取等号，

因为  $f(x)$  不存在最小值，所以  $3a^2 > a$ ，所以  $a > \frac{1}{3}$ ，



保密★启用前

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/136105101010010142>

学校：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_ 班级：\_\_\_\_\_ 考号：\_\_\_\_\_