目　录

第一章 线性规划基础

习 题

一、应用问题的建模

1、某养鸡场饲养肉鸡出售，设每只鸡每天至少需100克蛋白质、12克矿物质、60毫克维生素。现有五种饲料可供选用，各种饲料每千克营养成分含量及单价如表1-10所示：

表 1-10饲料成分和成本表

饲料	蛋白质（克）	矿物质（克）	维生素（毫克）	价格（元/千克）
1	3	1	6	0.5
2	2	0.3	10	0.8
3	2	0.4	8	0.6
4	5	2	7	1
5	16	0.8	3	1.5

问：如何在满足肉鸡营养需求的前提下，最经济地搭配饲料？建立本问题的建立线性规划模型。

答案：

解：定义第 种饲料的购买量为 (= 1, •••,5)，则本问题的线性规划模型为：

$$\min \quad = 0.5\ _1 + 0.8\ _2 + 0.6\ _3 + \ _4 + 1.5\ _5$$

$$\text{s.t.}\ 3\ _1 + 2\ _2 + 2\ _3 + 5\ _4 + 16\ _5 \quad 100$$

$$_1 + 0.3\ _2 + 0.4\ _3 + 2\ _4 + 0.8\ _5 \quad 12$$

$$6\ _1 + 10\ _2 + 8\ _3 + 7\ _4 + 3\ _5 \quad 60$$

$$0 (= 1, \cdots, 5)$$

必须为 ，下同。

必须有变量的非负约束

2、某工厂利用两条生产线 $_1$和 $_2$生产两种产品 $_1$和 $_2$。这两种产品分别由其核心部件和普通易耗品部件组装而成，其销售价格为部件价格之和的110%（单位：元）。表1-11给出了各生产线生产各部件所需单位工时，以及各生产线的每月可使用的总工时（单位：小时）。

表 1-11单位产品生产的工时和售价表

单位产品工时	产品 $_1$		产品 $_2$		可用工时
	核心部件A	普通部件B	核心部件C	普通部件D	
生产线1	0.03	0.02	0.05	0.01	40
生产线2	0.04	0.02	0.05	0.02	45
单位售价	250	150	400	100	

配合产品的售后服务政策，每生产1件产品 $_1$和 $_2$需额外生产2件普通部件作为备件单独销售。

问：该工厂应如何安排生产可实现月销售额最大？建立本问题的线性规划模型。

答案：

解：根据下表定义由各生产线所生产各种部件的数量：

答案表 1-1变量定义

产量	产品 $_1$		产品 $_2$	
	核心部件A	普通部件B	核心部件C	普通部件D
生产线1	$_1$	$_1$	$_1$	$_1$
生产线2	$_2$	$_2$	$_2$	$_2$

本问题完整模型为：

$$\max \quad = 740(\ _1 + \ _2) + 750(\ _1 + \ _2)$$

$$\text{s.t.}\ 3(\ _1 + \ _2) \quad (\ _1 + \ _2) = 0$$

$$3(\ _1 + \ _2) \quad (\ _1 + \ _2) = 0$$

$$0.03\ _1 + 0.02\ _1 + 0.05\ _1 + 0.01\ _1 \quad 40$$

$$0.04\ _2 + 0.02\ _2 + 0.05\ _2 + 0.02\ _2 \quad 45$$

$$0, \quad = 1,2; \quad = \quad , \quad , \quad ,$$

必须有变量的非负约束

3、某公司在两个工厂生产产品满足顾客需求。现已知下个月三个地区的需求情况，问如何安排供货，从而使得公司的总运输成本最低？表1-12给出了这两个工厂的生产能力，以及工厂到三个地区送货的单位物流成本（单位：元/件）。

表 1-12运费表

单位运费 销地 产地	地区1	地区2	地区3	生产能力
工厂1	700	750	650	400
工厂2	850	550	450	600
需求量	350	250	400	

试建立本问题的线性规划模型。

答案：

解：定义 为工厂 向地区 送货的数量。则本问题的模型为：

$$\min \quad = 700\ _{11} + 750\ _{12} + 650\ _{13}$$

$$+ 850\ _{21} + 550\ _{22} + 450\ _{23}$$

$$\text{s.t.}\ _{11} + \ _{12} + \ _{13} \quad 400$$

$$_{21} + \ _{22} + \ _{23} \quad 600$$

$$_{11} + \ _{21} = 350$$

$$_{11} + \ _{22} = 250$$

$$_{13} + \ _{23} = 400$$

$$0, \quad = 1,2; \quad = 1,2,3$$

以上两式符号可以为等号，对于供需不平衡的问题，则必须为

也可以为 ，以下两式同

必须有变量的非负约束

4、某公司提供4种不同型号的彩色涂料产品 $_1$、 $_2$、 $_3$和 $_4$，各型号产品的市场售价如表1-13所示。这些彩色涂料由3种原料（原色涂料 $_1$、 $_2$和 $_3$）根据不同的配方物理混合而成

（成品重量为原料重量之和），各原料在成品中的配方比例如表1-13所示，采购售价如表1-14所示。

表 1-13不同型号成品的配方和销售价格

成品型号	配方比例要求	销售价格（元/公斤）
$_{1}$	$_{1}$不少于40% $_{2}$不多于20% $_{3}$不多于5%	120
$_{2}$	$_{1}$不多于10% $_{2}$不多于30% $_{3}$不少于50%	90
$_{3}$	$_{1}$不多于10% $_{2}$不少于60%	70
$_{4}$	$_{1}$不多于30% $_{2}$不多于40% $_{3}$不多于40%	50

表 1-143种原料的市场售价

原料	$_{1}$	$_{2}$	$_{3}$
价格	50	30	40

假设4种产品均供不应求，且本月的采购预算为10 000元，问：该公司本月应如何采购并如何生产，可获得最多利润？试建立本问题的线性规划模型。

答案：

解：定义 (= 1,2,3,4; = 1,2,3)为成品 中原料 的数量。则本问题的线性规划模型为：

$$\max \quad = 120(\ _{11} + \ _{12} + \ _{13}) + 90(\ _{21} + \ _{22} + \ _{23})$$
$$+ 70(\ _{31} + \ _{32} + \ _{33}) + 50(\ _{41} + \ _{42} + \ _{43})$$
$$50(\ _{11} + \ _{21} + \ _{31} + \ _{41}) \quad 30(\ _{12} + \ _{22} + \ _{32}$$
$$+ \ _{42}) \quad 40(\ _{13} + \ _{23} + \ _{33} + \ _{43})$$

$$\text{s.t.} \quad _{11} \quad 0.4(\ _{11} + \ _{12} + \ _{13})$$
$$_{12} \quad 0.2(\ _{11} + \ _{12} + \ _{13})$$
$$_{13} \quad 0.05(\ _{11} + \ _{12} + \ _{13})$$
$$_{21} \quad 0.1(\ _{21} + \ _{22} + \ _{23})$$
$$_{22} \quad 0.3(\ _{21} + \ _{22} + \ _{23})$$
$$_{23} \quad 0.5(\ _{21} + \ _{22} + \ _{23})$$
$$_{31} \quad 0.1(\ _{31} + \ _{32} + \ _{33})$$
$$_{32} \quad 0.6(\ _{31} + \ _{32} + \ _{33})$$
$$_{41} \quad 0.3(\ _{41} + \ _{42} + \ _{43})$$
$$_{42} \quad 0.4(\ _{41} + \ _{42} + \ _{43})$$
$$_{43} \quad 0.4(\ _{41} + \ _{42} + \ _{43})$$
$$\sum_{=1} \sum_{=1} \quad 10000$$
$$0, \quad = 1,2,3,4; \quad = 1,2,3$$

表示第 种原料的市场价格

必须有变量的非负约束

5、某公司将产品从三个工厂($_{1}$、 $_{2}$和 $_{3}$)运往四个城市($_{6}$、 $_{7}$、 $_{8}$和 $_{9}$)，图1-1给出了各可行路线的单位运输成本（单位：千元/公斤），其中 $_{4}$和 $_{5}$为分销中心，图两侧的数字

分别表示各工厂的供应量和各个城市的需求量（单位：公斤）。

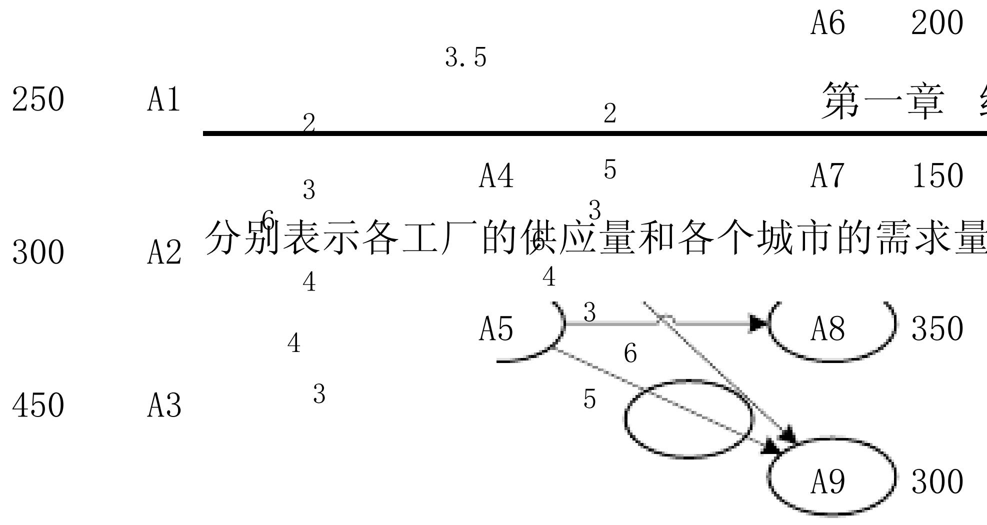

图 1-1物流网络数据图

问：如何安排运输可使总运费最少？试建立本问题的线性规划模型。

答案：

解：定义从 到 的运输量为 ，其中 到 有运输路线，= 1,2,•••,5, = 4,5,•••,9。则本问题的本问题的线性规划模型为：

$$\min \quad = 3.5\,{}_{16} + 2\,{}_{14} + 3\,{}_{15} + 6\,{}_{24} + 4\,{}_{25} + 4\,{}_{34} + 3\,{}_{35}$$
$$+ 2\,{}_{46} + 5\,{}_{47} + 3\,{}_{48} + 6\,{}_{49} + 4\,{}_{56} + 3\,{}_{57} + 6\,{}_{58} + 5\,{}_{59}$$

$$\text{s.t.} \quad {}_{16} + {}_{14} + {}_{15} = 250$$
$${}_{24} + {}_{25} = 300$$
$${}_{34} + {}_{35} = 450$$
$${}_{14} + {}_{24} + {}_{34} = {}_{46} + {}_{47} + {}_{48} + {}_{49}$$
$${}_{15} + {}_{25} + {}_{35} = {}_{56} + {}_{57} + {}_{58} + {}_{59}$$
$${}_{46} + {}_{56} = 200$$
$${}_{47} + {}_{57} = 150$$
$${}_{48} + {}_{58} = 350$$
$${}_{49} + {}_{59} = 300$$
$$0, \quad = 1,\cdots,5, \quad = 1,\cdots,9$$

以上两个约束条件容易漏掉

6、SH 地产集团有闲置资金20亿元，拟在未来5年进行对外投资。为了保证资金安全，财务部门提出了以下4个可选的投资方向：

投资方向1：企业借贷投资——每年年初可投资，当年年末收回本利107%；

投资方向2：国内基金投资——每年年初可投资，次年年末收回本利118%；

投资方向3：土地买卖——每年年初可投资，回收周期为3年，回收本利130%；

投资方向4：股权投资——只能在第3年年初投资，最大投资不能超过10亿元，第5年年末收回本利155%。

假定不存在投资风险且忽略利率波动因素，问：该集团应如何安排投资计划，使得第5年年末时拥有的本利总额最大？建立本问题的线性规划模型。

答案：

定义 (= 1,•••,5; = 1,•••,4)为第 年年初用于第 个投资方向的投资额。根据问题描述，可以得到每年年初的投资额，以及年底的收益如下表所示：

答案表 1-2

年份	年初投资总额	年末收回本利总额
1	$_{11}+{}_{12}+{}_{13}$	$1.07{}_{11}$
2	$_{21}+{}_{22}+{}_{23}$	$1.07{}_{21}+1.18{}_{12}$
3	$_{31}+{}_{32}+{}_{33}+{}_{34}$	$1.07{}_{31}+1.18{}_{22}+1.30{}_{13}$
4	$_{41}+{}_{42}+{}_{43}$	$1.07{}_{41}+1.18{}_{32}+1.30{}_{23}$
5	$_{51}+{}_{52}+{}_{53}$	$1.07{}_{51}+1.18{}_{42}+1.30{}_{33}+1.55{}_{34}$

本问题的线性规划模型为：

$$\max \quad = 1.07{}_{51}+1.18{}_{42}+1.30{}_{33}+1.55{}_{34}$$

$$\text{s.t.} \quad {}_{11}+{}_{12}+{}_{13} \quad 20$$

符号可以为等号，下同

$$_{21}+{}_{22}+{}_{23} \quad 1.07{}_{11}$$

$$_{31}+{}_{32}+{}_{33}+{}_{34} \quad 1.07{}_{21}+1.18{}_{12}$$

$$_{41}+{}_{42}+{}_{43} \quad 1.07{}_{31}+1.18{}_{22}+1.30{}_{13}$$

$$_{51}+{}_{52}+{}_{53} \quad 1.07{}_{41}+1.18{}_{32}+1.30{}_{23}$$

$$_{34} \quad 10$$

$$0(= 1,\cdots,5;\ = 1,\cdots,4)$$

必须有变量的非负约束

7、某手工作坊生产的竹制座椅中需要用到3种规格楠竹片，每张椅子需要长度为60cm、40cm 和 30cm 的楠竹片 2、 6和2 片。可以在市场上采购这些规格的现货，也可以将作坊仓库中长度为110cm的楠竹片切割成所需的规格，但每切割1次会发生1cm的长度损耗。

问：如果要制作100张竹制座椅，该作坊的仓库中至少要有多少条长度为110cm的楠竹片，才不用去市场上采购？试建立本问题的线性规划模型。

答案：

解：将110cm长的竹片切割为60cm、40cm和30cm共有5种方式，见下表：

答案表 1-35种切割方式

得到片数 规格 / 切割方式	60cm	40cm	30cm
1	1	1	0
2	1	0	1
3	0	1	2
4	0	2	0
5	0	0	3

定义　为采取第 种方式切割的110cm楠竹片的数量，则本问题的线性规划模型为：

$$\min \quad = {}_{1}+{}_{2}+{}_{3}+{}_{4}+{}_{5}$$

$$\text{s.t.} \quad {}_{1}+{}_{2} \quad 200$$

符号必须为

$$_{1}+{}_{3}+2{}_{4} \quad 600$$

$$_{2}+2{}_{3}+3{}_{5} \quad 200$$

$$0,\ = 1,\cdots,5$$

必须有变量的非负约束

8、JM公司是一家基于互联网的化妆品销售公司，该公司每个月需租用仓库存放货物。已知其未来4个月的仓储面积需求如表1-15所示，租金按单位面积的租用时间计算，租金价格见表1-16

表1-15仓储面积需求

月份	面积（单位：平方米）
1	40,000
2	30,000
3	20,000
4	50,000

表1-16不同租期的仓库租金

租用时长（月）	每平方米月租金（元）
1	60
2	100
3	135
4	170

现JM公司需要与出租方签订未来4个月的租用合同，该合同可细化到各月不同租期租用不同仓储面积，例如：在2月份，租10,000平方米租期1个月，20,000平方米的3个月。

问：JM公司应如何制订租用计划，可使租金支出最少？建立本问题的线性规划模型（提示：设 为第 个月初租用租期为 个月的仓储面积(= 1, •••,4; = 1, •••,4)。）

答案：

定义 为第 个月初租用租期为 个月的仓储面积(= 1, •••,4; = 1, •••,4).

每个月实际可用仓储面积如下表所示：

答案表1-4

月份	11	12	13	14	21	22	23	24	31	32	33	34	41	42	43	44
1	√	√	√	√												
2		√	√	√	√	√	√	√								
3			√	√		√	√	√	√	√	√	√				
4				√			√	√		√	√	√	√	√	√	√

√表示仓储面积当月可用

本问题的模型为：

$$\min \quad = 60_{11} + 100_{12} + 135_{13} + 170_{14} + 60_{21} + 100_{22} + 135_{23} + 170_{24}$$

$$+ 60_{31} + 100_{32} + 135_{33} + 170_{34} + 60_{41} + 100_{42} + 135_{43} + 170_{44}$$

s.t.

$${}_{11} + {}_{12} + {}_{13} + {}_{14} \quad 40000$$

$${}_{12} + {}_{13} + {}_{14} + {}_{21} + {}_{22} + {}_{23} + {}_{24} \quad 30000$$

$${}_{13} + {}_{14} + {}_{22} + {}_{23} + {}_{24} + {}_{31} + {}_{32} + {}_{33} + {}_{34} \quad 20000$$

$${}_{14} + {}_{23} + {}_{24} + {}_{32} + {}_{33} + {}_{34} + {}_{41} + {}_{42} + {}_{43} + {}_{44} \quad 50000$$

0(= 1, •••,4; = 1, •••,4)

符号必须为 ，下同

二、线性规划问题的图解法计算

9、应用图解法求解下列线性规划问题：

(1) $\max \quad = 2\ {}_1 + \ {}_2$

s.t. ${}_1 + \ {}_2 \quad 4$

${}_1 + \ {}_2 \quad 5$

${}_1,\ {}_2 \quad 0$

答案：

无可行域，所以问题无可行解。图略。

(2) $\max \quad = \ {}_1 \quad 3\ {}_2$

s.t. ${}_1 \quad {}_2 \quad 1$

${}_1 + 2\ {}_2 \quad 4$

${}_1,\ {}_2 \quad 0$

答案：

最优解为(4,0)，最优值为4。图略。

(3) $\max \quad = 2\ {}_1 + \ {}_2$

s.t. ${}_2 \quad 10$

$2\ {}_1 + 5\ {}_2 \quad 30$

${}_1 + \ {}_2 \quad 20$

$3\ {}_1 + \ {}_2 \quad 36$

${}_1,\ {}_2 \quad 0$

答案：

最优解为($\frac{150}{13}$, $\frac{18}{13}$)，最优值为$\frac{318}{13}$。图略。

(4) $\min \quad = \ 2\ {}_1 \quad 4\ {}_2$

s.t. ${}_1 + 2\ {}_2 \quad 15$

${}_1 + \ {}_2 \quad 12$

$5\ {}_1 + 3\ {}_2 \quad 45$

${}_1,\ {}_2 \quad 0$

答案：

最优解为(3,9)，最优值为 42。图略。

第二章　深入线性规划

习 题

一、标准单纯形法的计算

1、将下列线性规划问题变换为标准形式。

(1) $\min \quad = \quad 3\,_1 + 4\,_2 \quad 2\,_3 + 5\,_4$

$\text{s.t.} \quad 4\,_1 \quad _2 + 2\,_3 \quad _4 = \quad 2$

$_1 + \quad _2 + 3\,_3 \quad _4 \quad 14$

$2\,_1 + 3\,_2 \quad _3 + 2\,_4 \quad 2$

$_1,\ _2 \quad 0,\ _3 \quad 0,\ _4$ 无限制

答案：

$\max \quad = 3\,_1 \quad 4\,_2 \quad 2\,_3' \quad 5\,_4' + 5\,_4''$

$\text{s.t.} \quad 4\,_1 + \quad _2 + 2\,_3' + \quad _4' \quad _4'' \quad = 2$

$_1 + \quad _2 \quad 3\,_3' \quad _4' + \quad _4'' + \quad _5 \quad = 14$

$2\,_1 + 3\,_2 + \quad _3' + 2\,_4' \quad 2\,_4'' \quad _6 = 2$

$_1,\ _2,\ _3',\ _4',\ _4'',\ _5,\ _6 \quad 0$

(2) $\max \quad = 2\,_1 + 3\,_2$

$\text{s.t.} \quad _1 + \quad _2 \quad 3$

$2\,_1 \quad _2 \quad 2$

$_1 \quad 0,\ _2$ 无限制

答案：

$\max \quad = 2\,_1 + 3\,_2' \quad 3\,_2''$

$\text{s.t.} \quad _1 + \quad _2' \quad _2'' + \quad _3 \quad = 3$

$2\,_1 \quad _2' + \quad _2'' \quad _4 = 2$

$_1,\ _2',\ _2'',\ _3,\ _4 \quad 0$

2、请穷举出下列线性规划问题的所有基本解，指出其中的基本可行解和最优解。

(1) $\max \quad = \quad _1 + \quad _2$

$\text{s.t.}\ 2\,_1 + 3\,_2 \quad 6$

$2\,_1 + \quad _2 \quad 4$

$_1,\ _2 \quad 0$

答案：

引入松弛变量 $_3$，$_4$将模型变换为标准形式：

$\max \quad = \quad _1 + \quad _2$

$\text{s.t.}\ 2\,_1 + 3\,_2 + \quad _3 \quad = 6$

$2\,_1 + \quad _2 \quad + \quad _4 = 4$

$_1,\ _2,\ _3,\ _4 \quad 0$

约束条件数量为2，所以基本解中基变量个数为2。

答案表 2-1

序	基变量组合	基本解	可行解	目标函数值	($_1$, $_2$)	最优解
1	($_1$, $_2$)	$(\frac{3}{2},1,0,0)$	是	$\frac{5}{2}$	$(\frac{3}{2},1)$	是
2	($_1$, $_3$)	(2,0,2,0)	是	2	(2,0)	
3	($_1$, $_4$)	(3,0,0,　2)	否	—	—	
4	($_2$, $_3$)	(0,4,　6,0)	否	—	—	
5	($_2$, $_4$)	(0,2,0,2)	是	2	(0,2)	
6	($_3$, $_4$)	(0,0,6,4)	是	0	(0,0)	

(2) $\min \quad = 3\ {}_1 \quad {}_2 + 2\ {}_3 \quad 4\ {}_4$

$\text{s.t.}\ 2\ {}_1 + 3\ {}_2 + \ {}_3 + 2\ {}_4 = 12$

${}_1 + \ {}_2 \quad {}_3 + 2\ {}_4 = 8$

${}_1,\ {}_2,\ {}_3,\ {}_4 \quad 0$

答案：

将模型标准化为：

$$\max \quad = \ 3\ {}_1 + \ {}_2 \quad 2\ {}_3 + 4\ {}_4$$
$$\text{s.t.}\ 2\ {}_1 + 3\ {}_2 + \ {}_3 + 2\ {}_4 = 12$$
$${}_1 + \ {}_2 \quad {}_3 + 2\ {}_4 = 8$$
$${}_1,\ {}_2,\ {}_3,\ {}_4 \quad 0$$

约束条件数量为2，所以基本解中基变量个数为2。

答案表 2-2

序	基变量组合	基本解	可行解	目标函数值	$({}_1,\ {}_2,\ {}_3,\ {}_4)$	最优解
1	$({}_1,\ {}_2)$	(12, 4,0,0)	否	—	—	
2	$({}_1,\ {}_3)$	$(\frac{20}{3},0,\ \frac{4}{3},0)$	否	—	—	
3	$({}_1,\ {}_4)$	(4,0,0,2)	是	4	(4,0,0,2)	
4	$({}_2,\ {}_3)$	(0,5, 3,0)	否	—	—	
5	$({}_2,\ {}_4)$	(0,2,0,3)	是	14	(0,2,0,3)	
6	$({}_3,\ {}_4)$	(0,0,2,5)	是	16	(0,0,2,5)	是

这里要么写成 ，要么写成 ，不能写成

注：由于还不涉及单纯形法求解，本题的目标函数也可以不用化为max ，而是直接计算。

3、应用单纯形表法求解下列线性规划问题。

(1) $\max \quad = \ {}_1 + 5\ {}_2 + 2\ {}_3$

$\text{s.t.}\ {}_1 + \ {}_2 \quad {}_3 \quad 16$

${}_1 + 2\ {}_2 + \ {}_3 \quad 32$

$2\ {}_1 + 3\ {}_2 + 2\ {}_3 \quad 60$

${}_1,\ {}_2,\ {}_3 \quad 0$

答案：

答案表 2-3

		1	5	2	0	0	0	b
C_B	X_B	${}_1$	${}_2$	${}_3$	${}_4$	${}_5$	${}_6$	
5	${}_2$	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	16
2	${}_3$	0	0	1	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	3
1	${}_1$	1	0	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{4}$	3
—		0	0	0	$\frac{5}{12}$	$\frac{23}{12}$	$\frac{1}{4}$	=83

本例在一开始求解即出现退化（答案中不需明确），本问题有唯一最优解：

$X* = (\ ^*_1,\ ^*_2,\ ^*_3,\ ^*_4,\ ^*_5,\ ^*_6) = (3,16,3,0,0,0)$ ，　$* = 83.$

(2) min　= 3 $_1$ 3 $_2$ $_3$

s.t.　$_1$ + $_2$　12

$_1$ + $_2$ + 3 $_3$　14

3 $_1$ + $_2$ + $_3$　16

$_1$, $_2$, $_3$　0

答案：

标准化后用单纯形表求解结果如下：

下表为目标函数转化为max　= 3 $_1$ + 3 $_2$ + $_3$的单纯形表，如直接以min求解，检验数为相反数。

答案表 2-4

		3	3	1	0	0	0	b
C$_B$	X$_B$	1	2	3	4	5	6	
3	2	0	1	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{43}{4}$
1	3	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$
3	1	1	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{4}$
		0	0	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$=37\frac{1}{2}$

本问题有唯一最优解：

$X* = (\ ^*_1,\ ^*_2,\ ^*_3,\ ^*_4,\ ^*_5,\ ^*_6) = (\frac{5}{4},\frac{43}{4},\frac{3}{2},0,0,0)$ ，　$* = 37\frac{1}{2}.$

注意：如果转换了目标函数，在最后应转换为　。

(3) max　= 4 $_1$ + 5 $_2$ + 4 $_3$

s.t.　$_1$ + $_2$ + $_3$　8

$_1$ + 3 $_2$ + $_3$　21

3 $_1$ + 2 $_2$ + $_3$　15

$_1$, $_2$, $_3$　0

答案：

标准化后用单纯形表求解结果如下：

答案表 2-5

		4	5	4	0	0	0	b
C$_B$	X$_B$	1	2	3	4	5	6	
4	3	0	0	1	$\frac{7}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$
5	2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{13}{2}$
4	1	1	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
		0	0	0	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$=38\frac{1}{2}$

有0检验数

本问题有无穷多最优解，其中一个最优解为：

必须明确

$$X^* = ({}^*_1, {}^*_2, {}^*_3, {}^*_4, {}^*_5, {}^*_6) = (\frac{1}{4}, \frac{13}{2}, \frac{5}{4}, 0, 0, 0) \ , \quad {}^* = 38\frac{1}{2}.$$

(4) $\min \quad = {}_1 + 2\,{}_2 + {}_3$

s.t. ${}_1 + {}_2 \quad 12$

${}_1 \quad {}_3 \quad 4$

${}_1, {}_2, {}_3 \quad 0$

答案：

在第1、2个约束条件中分别引入剩余变量 ${}_4$ 和松弛变量 ${}_5$：

$$\min \quad = {}_1 + 2\,{}_2 + {}_3$$
$$\text{s.t.} \ {}_1 + {}_2 \quad {}_4 = 12$$
$${}_1 \quad {}_3 \quad + {}_5 = 4$$
$${}_1, {}_2, {}_3, {}_4, {}_5 \quad 0$$

可直接以 ${}_2$，${}_5$ 为基变量建立初始单纯形表直接求解。

注：下表为最小值直接求解的单纯形表，如以最大值为目标函数，检验数取相反数

答案表 2-6

		1	2	1	0	0	b
C_B	X_B	${}_1$	${}_2$	${}_3$	${}_4$	${}_5$	
2	${}_2$	1	1	0	1	0	12
0	${}_5$	[1]	0	1	0	1	4→
−		1↑	0	1	2	0	=24
2	${}_2$	0	1	1	1	1	8
1	${}_1$	1	0	1	0	1	4
−		0	0	0	2	1	=20

有0检验数

本问题有无穷多最优解，其中一个最优解为：

必须明确

$$X^* = ({}^*_1, {}^*_2, {}^*_3, {}^*_4, {}^*_5) = (4, 8, 0, 0, 0) \ , \quad {}^* = 20.$$

4、分别应用大M 法和两阶段法求解下列线性规划问题。

(1) $\max \quad = {}_1 + 2\,{}_2 + 3\,{}_3$

s.t. $2\,{}_1 + 3\,{}_2 + 5\,{}_3 \quad 10$

$2\,{}_1 + 5\,{}_2 + 7\,{}_3 = 15$

${}_1, {}_2, {}_3 \quad 0$

答案：

大M 法：标准化后在第1、2个约束条件中分别引入人工变量 ${}_5$ 和 ${}_6$，将问题的目标函数改写为

$$\max \quad = {}_1 + 2\,{}_2 + 3\,{}_3 \qquad {}_5 \qquad {}_6$$

注意人工问题是否写对，特别是 的符号

单纯形表求解结果如下：

答案表 2-7

		1	2	3	0			b
C B	X B	1	2	3	4	5	6	
1	1	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{15}{2}$
0	4	0	2	2	1	1	1	5
—		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0		$\frac{1}{2}$	= $\frac{15}{2}$

本问题有唯一最优解：

$$X* = (*_1, *_2, *_3, *_4, *_5, *_6) = (\frac{15}{2},0,0,5,0,0) , \quad * = \frac{15}{2}.$$

两阶段法：第一阶段：构造辅助问题min $= {}_5 + {}_6$，单纯形表求解结果如下：

注意辅助问题是否写对，特别是目标函数应求min而不是max

答案表 2-8

		0	0	0	0	1	1	b
C B	X B	1	2	3	4	5	6	
0	3	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{7}$	1	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{15}{7}$
0	4	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{7}$	0	1	1	$\frac{5}{7}$	$\frac{5}{7}$
—		0	0	0	0	1	1	=0

最优表中 = 0，亦即人工变量全部为0（非基变量），可进入第二阶段。

第二阶段：去掉第一阶段最优表中的人工变量，将原始问题的目标函数系数代回，单纯形表求解结果如下：

注意2：求解过程中右端常数不得出现负数

答案表 2-9

		1	2	3	0	b
C B	X B	1	2	3	4	
1	1	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	0	$\frac{15}{2}$
0	4	0	2	2	1	5
—		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	= $\frac{15}{2}$

注意1：不得随意调整基变量的次序，下同；

本问题有唯一最优解：

$$X* = (*_1, *_2, *_3, *_4) = (\frac{15}{2},0,0,5) , \quad * = \frac{15}{2}.$$

(2) max $= 12{}_1 + 15{}_2 + 10{}_3$

s.t. ${}_1 + {}_2 + 2{}_3 \quad 5$

${}_1 + 3{}_2 + 5{}_3 \quad 9$

$15{}_1 + 6{}_2 \quad 5{}_3 \quad 15$

${}_1, {}_2, {}_3 \quad 0$

答案：

大M 法：标准化后在第1个约束条件中引入人工变量 ${}_5$，将目标函数改写为

$$\max = 12{}_1 + 15{}_2 + 10{}_3 \qquad {}_5$$

注意人工问题是否写对，特别是 的符号

单纯形表求解结果如下：

答案表 2-10

		12	15	10	0		0	0	b
C_B	X_B	$_1$	$_2$	$_3$	$_4$	$_5$	$_6$	$_7$	
	$_5$	0	$\frac{43}{80}$	0	1	1	$\frac{7}{16}$	$\frac{3}{80}$	$\frac{1}{2}$
10	$_3$	0	$\frac{39}{80}$	1	0	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{80}$	$\frac{3}{2}$
12	$_1$	1	$\frac{9}{16}$	0	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{2}$
−		0	$\frac{27}{8}$ $\frac{43}{80}$	0		0	$\frac{21}{8}$ $\frac{7}{16}$	$\frac{5}{8}$ $\frac{3}{80}$	=33 $\frac{1}{2}$

最优表中残留有非0的人工变量 $_5$，本问题无可行解。

必须明确，而且写成“无解”、“无界解”都是错误的

两阶段法：

第一阶段：构造辅助问题min　=　$_5$，单纯形表求解结果如下：

注意辅助问题是否写对，特别是目标函数应求min而不是max

答案表 2-11

		0	0	0	0	1	0	0	b
C_B	X_B	$_1$	$_2$	$_3$	$_4$	$_5$	$_6$	$_7$	
1	$_5$	0	$\frac{43}{80}$	0	1	1	$\frac{7}{16}$	$\frac{3}{80}$	$\frac{1}{2}$
0	$_3$	0	$\frac{39}{80}$	1	0	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{80}$	$\frac{3}{2}$
0	$_1$	1	$\frac{9}{16}$	0	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{2}$
−		0	$\frac{43}{80}$	0	1	0	$\frac{7}{16}$	$\frac{3}{80}$	= $\frac{1}{2}$

辅助问题最优表中残留有非0的人工变量 $_5$，原始问题无可行解。

必须明确，而且写成“无解”、“无界解”都是错误的

(3) min　=　$_1$ +　$_2$　$_3$

s.t.　$_1$ + 2 $_2$ + 3 $_3$ = 12

2 $_1$ +　$_2$　4 $_3$ = 8

$_1$, $_2$, $_3$　0

答案：

大M 法：

在第1、2个约束条件中分别引入人工变量 $_4$和 $_5$，将目标函数改写为

$$\min \quad = \quad _1 + \quad _2 \quad _3 + \quad _4 + \quad _5$$

注意人工问题是否写对，特别是　的符号

单纯形表求解结果如下：

答案表 2-12

		1	1	1			b
C_B	X_B	$_1$	$_2$	$_3$	$_4$	$_5$	
1	$_3$	0	$\frac{3}{10}$	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{8}{5}$
1	$_1$	1	$\frac{11}{10}$	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{36}{5}$
−		0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$ +	$\frac{2}{5}$ +	= $\frac{28}{5}$

本问题有唯一最优解：

$$X^* = (\ ^*_1,\ ^*_2,\ ^*_3,\ ^*_4,\ ^*_5) = \left(\frac{36}{5}, 0, \frac{8}{5}, 0, 0\right), \quad ^* = \frac{28}{5}.$$

两阶段法：

注意辅助问题是否写对，特别是目标函数应求min而不是max

第一阶段：构造辅助问题min　=　$_4$ +　$_5$，单纯形表求解结果如下：

答案表 2-13

		0	0	0	1	1	b
C_B	X_B	$_1$	$_2$	$_3$	$_4$	$_5$	
0	$_3$	0	$\frac{3}{10}$	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{8}{5}$
0	$_1$	1	$\frac{11}{10}$	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{36}{5}$
−		0	0	0	1	1	=0

最优表中　= 0，亦即人工变量全部为0（非基变量），可进入第二阶段。

第二阶段：去掉第一阶段最优表中的人工变量，将原始问题的目标函数系数代回，得到的单纯形表直接就是最优表：

答案表 2-14

		1	1	1	b
C_B	X_B	$_1$	$_2$	$_3$	
1	$_3$	0	$\frac{3}{10}$	1	$\frac{8}{5}$
1	$_1$	1	$\frac{11}{10}$	0	$\frac{36}{5}$
−		0	$\frac{1}{5}$	0	= $\frac{28}{5}$

本问题有唯一最优解：

$$X^* = ({}^*_1, {}^*_2, {}^*_3) = (\frac{36}{5}, 0, \frac{8}{5}), \quad {}^* = \frac{28}{5}.$$

(4)　min　=　2 $_1$ + 4 $_2$

s.t.　$_1$ + 4 $_2$　1

$_1$ +　$_2$　1

$_1$，$_2$　0

答案：

大M 法：标准化并引入人工变量 $_4$ 和 $_6$，则目标函数改写为

$$\min = 2_1 + 4_2 + \quad _4 + \quad _6$$

注意人工问题是否写对，特别是　的符号

单纯形表求解结果如下：

答案表 2-15

		2	4	0		0		b
C_B	X_B	$_1$	$_2$	$_3$	$_4$	$_5$	$_6$	
4	$_2$	0	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
2	$_1$	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$
−		0	0	$\frac{6}{5}$	$\frac{2}{5}$+	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$+	= $\frac{2}{5}$

必须明确，而且写成无解、无可行解都是错误的

最后一张表中，最小比值准则失效：入基变量 $_5$ 在约束矩阵列向量中的分量全部为负，所以人工问题有无界解。又因为上表中的基变量中无人工变量，所以本问题有无界解。

两阶段法：

第一阶段：构造辅助问题min　=　$_4$ + 　$_6$，单纯形表求解结果如下：

注意辅助问题是否写对，特别是目标函数应求min而不是max

答案表 2-16

		0	0	0	1	0	1	b
C_B	X_B	$_1$	$_2$	$_3$	$_4$	$_5$	$_6$	
0	$_2$	0	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
0	$_1$	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$
—		0	0	0	$\frac{2}{5}$	1	1	=0

最优表中　= 0，亦即人工变量全部为0（非基变量），可进入第二阶段。

第二阶段：去掉第一阶段最优表中的人工变量，将原始问题的目标函数系数代回，得到以下单纯形表：

答案表 2-17

		2	4	0	0	b
C_B	X_B	$_1$	$_2$	$_3$	$_5$	
4	$_2$	0	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
2	$_1$	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$
—		0	0	$\frac{6}{5}$	$\frac{4}{5}$	= $\frac{2}{5}$

以 $_5$为入基变量，最小比值准则失效，本问题有无界解。

必须明确，而且写成无解、无可行解都是错误的

5、某求最大值的线性规划问题求解过程中得到以下单纯形表：

表 2-29

		3	1	1	0	1	1	b
C_B	X_B	$_1$	$_2$	$_3$	$_4$	$_5$	$_6$	
	$_3$		2		0			1
	$_5$	3	3		2			
	$_6$	6			1			3
—								

其中，　、　、　为未知常数。请将表2-29中空白的部分补充完整，并分别求出当　、　、　满足什么条件时，有以下结论：

(1)当前表为最优表，但有无穷多最优解；

(2)下一个基本可行解为退化解；

(3)本问题有无界解；

(4)当前基本解为可进一步优化的可行解，且 $_2$为入基变量，　$_5$为出基变量；

(5)当前的基本可行解为退化解。

答案：

解：将单纯形表中空缺部分补充完整，有：

答案表 2-18

		3	1	1	0	1	1	b
C_B	X_B	$_1$	$_2$	$_3$	$_4$	$_5$	$_6$	
1	$_3$		2	1	0	0	0	1
1	$_5$	3	3	0	2	1	0	
1	$_6$	6		0	1	0	1	3
—		6+	2	0	1	0	0	=2

(1)满足

6

2

0

= 6 或/且 = 2

此式易漏掉，下同

时，本问题有无穷多最优解。

(2)满足：

0

0 < < 2

$\frac{}{3} = \frac{3}{}$

时，当前表出现退化解。

(3)满足：

6 + > 0 { 6 < 0

0 0

0

则该线性规划问题有无界解。

(4)需满足：当前解为可行解；$_2$的检验数为正，且大于$_1$的检验数，不论后者是否为正；以$_2$为入基变量时最小比值出现在$_5$所在行中(需区分$_6$所在行的系数 是否为正)；当前表不能判断是否有无界解。

当 > 0时，满足

> 0 0

0 0 < < 2

2 > 0 + 4

2 > 6 + $\frac{}{3} < \frac{3}{}$

$\frac{}{3} < \frac{3}{}$ 6或 > 0

6或 > 0

当 0时，满足

0 0

0 0

2 > 0 + 4

2 > 6 + 6或 > 0

6或 > 0

综合以上两种情况，即要求满足

0

0 < < 2

+ 4

$\frac{}{3} < \frac{3}{}$

6或 > 0

或者

0

0

+ 4

6或 > 0

注意：这两组式子可以分解成更多形式。

(5)前提：1、由当前表不能判断问题有无界解；2、有基变量取值为0，即右端有常数

为0；根据第(2)题的结果，可知答案为：

{

6或 > 0

= 0

人数

10

8

6

4

2

0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 时间

第四章 整数规划

习 题

一、应用问题的整数规划数学建模

1、某工厂用两条生产线 $_1$ 和 $_2$ 生产两种产品A 和B。这两条生产线每个月的额定工时分别为600和800小时，生产线 $_1$ 的生产率为产品A 60件/小时或产品B 45件/小时，生产线 $_2$ 的生产率为产品A 35件/小时或产品B 40件/小时；产品A 和B 的单位售价分别为12元/件和16元/件，生产产品A 和B 的固定成本分别为60 000元和80 000元。

问：应如何安排生产可实现利润最大化？试建立本问题的混合整数规划模型。

答案：

解：定义 为用生产线 生产第 种产品的总工时。例如， $_1$ 代表用生产线 $_1$ 生产A 的总工时。另外，定义变量

$$= \begin{cases} 1 & 用生产线\ \ 生产产品 \\ 0 & 不用生产线\ \ 生产产品 \end{cases}$$

因为本问题是有固定成本的问题，需要有此定义

则本问题的整数规划模型为：

$$\max \quad = 12\times 60\times {}_1 \quad 60000\,{}_1 + 16\times 45\times {}_1 \quad 80000\,{}_1$$
$$+ 12\times 35\times {}_2 \quad 60000\,{}_2 + 16\times 40\times {}_2 \quad 80000\,{}_2$$

$$\text{s.t.} \quad {}_1 + {}_1 \quad 600$$
$${}_2 + {}_2 \quad 800$$
$${}_1 \quad {}_{1\,1}$$
$${}_1 \quad {}_{2\,1}$$
$${}_2 \quad {}_{3\,2}$$
$${}_2 \quad {}_{4\,2}$$
$${}_1, {}_1, {}_2, {}_2 \quad 0且为整数$$
$${}_1, {}_1, {}_2, {}_2 = 0或1$$

最后两式，变量非负及(0-1整数约束不能漏

2、某大型社区临街的中式快餐店每天的营业时间为8:00到24:00。根据社区居民对早餐、中餐、晚餐和夜宵的需求不同，一天中不同时段对服务员的需求如图4-27所示。

图 4-27快餐店的服务员需求曲线

该店的员工分为两类。第一类是正式员工，分别在3个8小时时段上班：8:00到16:00、12:00到20:00、以及16:00到24:00。其工作时薪为14元/小时，且规定各时段正式员工

数量不能少于3人；第二类是钟点工，可在8:00到24:00的任意时间工作，其工作时薪为12元/小时。

问：应如何雇用正式员工和钟点工，可在人力资源成本最小的基础上满足需求？试建立本问题的整数规划模型。

答案：

解：定义 ${}_1$，${}_2$，${}_3$表示3个时段的正式员工的数量，且各个时间段钟点工的人数设为：

时间	8:00-12:00	12:00-16:00	16:00-20:00	20:00-22:00	22:00-24:00
钟点工人数	${}_1$	${}_2$	${}_3$	${}_4$	${}_5$

注意，钟点工的工作时段与正式员工可以不同步

则可以得到各时间段（注意，不是正式员工的工作时段）服务员的总需求和总人数为，如下表：

答案表 4-1

时间	8:00-12:00	12:00-16:00	16:00-20:00	20:00-22:00	22:00-24:00
人数需求	4	8	10	6	4
员工总数	${}_1 + {}_1$	${}_1 + {}_2 + {}_2$	${}_2 + {}_3 + {}_3$	${}_3 + {}_4$	${}_3 + {}_5$

本问题的模型为：

$$\begin{aligned} \min \quad & = 14\times 8\times {}_1 + 14\times 8\times {}_2 + 14\times 8\times {}_3 + 12\times 4\times {}_1 \\ & + 12\times 4\times {}_2 + 12\times 4\times {}_3 + 12\times 2\times {}_4 + 12\times 2\times {}_5 \\ \text{s.t.} \quad & {}_1 + {}_1 \quad 4 \\ & {}_1 + {}_2 + {}_2 \quad 8 \\ & {}_2 + {}_3 + {}_3 \quad 10 \\ & {}_3 + {}_4 \quad 6 \\ & {}_3 + {}_5 \quad 4 \\ & {}_1 \quad 3 \\ & {}_1 + {}_2 \quad 3 \\ & {}_2 + {}_3 \quad 3 \\ & {}_3 \quad 3 \\ & {}_1, {}_2, {}_3, {}_1, {}_2, {}_3, {}_4, {}_5 \quad 0 \text{且为整数} \end{aligned}$$

变量非负、整数约束不能漏

3、某公司计划在东、西、南三个地区建立销售网点，总共有7个备选地点 (= 1, •••,7)可供选择。现要求所设立的销售网点必须满足以下条件：

在东部地区，${}_1$，${}_2$，${}_3$三个备选地点中至多选择两个地点设立销售网点；

在西部地区，${}_4$，${}_5$两个备选地点中至少选择一个地点设立销售网点；

在南部地区，${}_6$，${}_7$两个备选地点只能选一个设立销售网点；

出于市场环境的考虑，如果方案中选择了 ${}_2$地点，必须选择在 ${}_5$同时设立销售网点。

若在备选地点 设立销售网点需要投资 万元，每年可获得利润 万元。问：如果总投资预算为B万元，在哪些备选地点设立网点可获得最多的利润？试建立本问题的数学模型。

答案：

解：定义 (= 1, •••,7)表示：

$$ = \begin{cases} 1 & \text{在第 地设立网点} \\ 0 & \text{不在第 地设立网点} \end{cases}$$

本问题的数学模型如下：

$$\max \quad = \sum_{=1} (\quad)$$

$$\text{s.t.} \quad {}_1 + {}_2 + {}_3 \quad 2$$

$$ {}_4 + {}_5 \quad 1$$

$$ {}_6 + {}_7 = 1$$

$$ {}_2 \quad {}_5 \quad 0$$

$$\sum_{=1} (\quad)$$

$$ = 0\text{或}1, \quad = 1, 2, \cdots, 7$$

0-1整数约束不能漏

4、某短途航空公司有10条联飞路线，可经停9个城市，表4-22给出了这10条飞行路线经停的城市和飞行总小时数（单位：小时）。

表 4-22飞行路线数据表

经停城市	备选飞行路线									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	√		√						√	
B		√	√	√	√					√
C			√		√	√	√			
D	√							√		√
E					√	√				√
F		√						√	√	
G	√			√			√	√		
H				√		√			√	
I	√	√			√		√			
飞行时间	4	6	5	6	7	4	6	5	5	7

注：“√”表示经停该城市

试从这10条路线中选择3条路线，既能够满足飞行总时间最少的要求，又能够经停9个城市至少1次。给出本问题的0-1整数规划模型。

答案：

解：定义0-1变量 , = 1, •••,10：

$$ = \begin{cases} 1 & \text{选择路线} \\ 0 & \text{不选择路线} \end{cases}$$

则本问题的模型为：

$$\min \quad = 4{}_1 + 6{}_2 + 5{}_3 + 6{}_4 + 7{}_5 + 4{}_6 + 6{}_7 + 5{}_8 + 5{}_9 + 7{}_{10}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{=1}^{10} = 3$$

$$_{1} + _{3} + _{9} \quad 1$$
$$_{2} + _{3} + _{4} + _{5} + _{10} \quad 1$$
$$_{3} + _{5} + _{6} + _{7} \quad 1$$
$$_{1} + _{8} + _{10} \quad 1$$
$$_{5} + _{6} + _{10} \quad 1$$
$$_{2} + _{8} + _{9} \quad 1$$
$$_{1} + _{4} + _{7} + _{8} \quad 1$$
$$_{4} + _{6} + _{9} \quad 1$$
$$_{1} + _{2} + _{5} + _{7} \quad 1$$
= 0或1, = 1,2, •••,10

0-1整数约束不能漏

5、某小提琴手作坊根据顾客提出的定制需求生产小提琴，价格和固定成本因定制需求而异。由于作坊的熟练技师有限(12人)，该手工作坊只能挑选部分订单，甚至只能部分完成订单所要求的数量。

目前，作坊收到来自3家交响乐队的小提琴订单，表4-23给出了与此订单相关的制作成本和价格（单位：元）。

表 4-23

	订单1	订单2	订单3
订单数量（把）	3	4	5
价格（元/把）	3 000	4 000	1 000
固定成本（元）	4 000	3 000	0
技师需求（人/把）	2	3	2

问：各订单各应接受多少台，可获得最多的利润？试建立本问题的整数规划模型。

答案：

解：定义 $_{1}$，$_{2}$，$_{3}$为该作坊完成各订单的数量，并考虑固定成本，可以得到本问题的混合整数规划模型为：

$$\max \quad = 3000\,_{1} \quad 4000\,_{1} + 4000\,_{2} \quad 3000\,_{2} + 1000\,_{3}$$
$$\text{s.t.} \quad _{1} \quad 3$$
$$_{2} \quad 4$$
$$_{3} \quad 5$$
$$2\,_{1} + 3\,_{2} + 2\,_{3} \quad 12$$
$$_{1} \quad _{1}\,_{1}$$
$$_{2} \quad _{2}\,_{2}$$
$$_{1},\ _{2},\ _{3} \quad 0且为整数$$
$$_{1},\ _{2} = 0或1$$

(0-1整数约束不能漏

6、问题5中，如果定制小提琴的价格并非固定，而是由制作的数量确定订单的总价。表4-24给出了具体数据（单位：元）。

表 4-24各订单不同制作数量的总价格

制作数量	订单1	订单2	订单3
0	0	0	0
1	1 000	1 000	1 000
2	3 000	2 000	2 000
3	5 000	4 000	3 000
4		6 000	5 000
5			7 000

问：此时各订单各应接受多少台，可获得最多的利润？试建立本问题的0-1整数规划模型。

答案：

解：定义0-1变量 表示：

$$= \begin{cases} 1 & \text{订单 制作 把} \\ 0 & \text{订单 不制作 把} \end{cases}$$

例如，$\ _{10}=1$表示订单1制作0把。可知，对所有3个订单有：

$$\ _{10}+\ _{11}+\ _{12}+\ _{13}=1$$
$$\ _{20}+\ _{21}+\ _{22}+\ _{23}+\ _{24}=1$$
$$\ _{30}+\ _{31}+\ _{32}+\ _{33}+\ _{34}+\ _{35}=1$$

本问题的数学模型为：

$$\max \quad = 1000\ _{11}+3000\ _{12}+5000\ _{13} \quad 4000(1 \quad _{10})$$
$$+1000\ _{21}+2000\ _{22}+4000\ _{23}+6000\ _{24} \quad 3000(1 \quad _{20})$$
$$+1000\ _{31}+2000\ _{32}+3000\ _{33}+5000\ _{34}+7000\ _{35}$$

这里的 4000(1 $_{10}$)表示该订单制作件数不为0时就将产生固定成本，下同

$$\text{s.t.} \quad _{10}+\ _{11}+\ _{12}+\ _{13}=1$$
$$\ _{20}+\ _{21}+\ _{22}+\ _{23}+\ _{24}=1$$
$$\ _{30}+\ _{31}+\ _{32}+\ _{33}+\ _{34}+\ _{35}=1$$
$$2\ _{11}+4\ _{12}+6\ _{13}+3\ _{21}+6\ _{22}+9\ _{23}+12\ _{24}+2\ _{31}+4\ _{32}+6\ _{33}+8\ _{34}+10\ _{35} \quad 12$$
$$\ _{10},\ _{11},\ _{12},\ _{13},\ _{20},\ _{21},\ _{22},\ _{23},\ _{24},\ _{30},\ _{31},\ _{32},\ _{33},\ _{34},\ _{35}=0或1$$

0-1整数约束不能漏

7、某地级决定对下辖的8个相邻的镇投资建立不超过4个生活污水处理厂用于集中处理这8个镇的生活污水，单个污水处理厂的设计处理能力为20万立方米/小时。目前，各镇郊区都有一片可用于建设污水处理厂的规划用地，其征用成本如表4-25所示。

表 4-258个镇的建厂用途的土地补偿费（单位：万元）

镇	1	2	3	4	5	6	7	8
成本	100	120	200	160	180	90	140	150

污水处理厂建立之后，还须将各镇污水引流至处理厂，所以需要在镇之间挖设沟渠埋置管道。除了地质条件因素，污水排放量不同，管道建设成本也有差异，见表4-26。

表 4-268个镇建设污水管道的建设成本（单位：元/千立方米·小时）

城镇	1	2	3	4	5	6	7	8
1		2 000		4 000		1 000		
2				2 400		3 000		4 500
3	8 000				2 400		1 800	
4			2 400		2 400			1 900
5		4 000				2 000	4 000	
6			2 200	3 600			1 400	
7	4 000			3 000				2 700
8		2 700			2 800			

上表中空缺项表示不可行的方案。建立在镇 郊区的污水厂与镇 之间无需建立管道，即成本为0。

各镇的污水总排量可按常住人口数粗略估计，大致的比例为每千人每小时产生500立方米的生活污水，各镇常住人口数见表4-27。

表 4-278个镇的常住人口数量（单位：千人）

镇	1	2	3	4	5	6	7	8
人口	100	200	90	180	150	120	60	130

问：应如何建厂，并如何铺设管道，可最经济地满足8个镇污水处理需求？给出本问题的整数规划模型。

答案：

解：本题中涉及固定成本。首先，计算各镇每小时制造污水的数量（单位：千立方米/小时），见下表。

答案表 4-2

镇	1	2	3	4	5	6	7	8
人口	100	200	90	180	150	120	60	130
污水排放量	50	100	45	90	75	60	30	65

(1)决策变量：定义0-1变量 (= 1, •••,8)

$$= \begin{cases} 1 & \text{在镇 建立污水处理厂} \\ 0 & \text{不在镇 建立污水处理厂} \end{cases}$$

定义 (,= 1, •••,8)为镇 将数量为 的污水排放到镇 的污水厂。

(2)目标函数：总建设成本包括管道成本和固定成本2项（镇 向其郊区的污水处理厂排放污水，不需要考虑管道成本），则目标函数为：

$$
\begin{aligned}
\min\ = {} & 0.2\,_{12} + 0.4\,_{14} + 0.1\,_{16} \\
& + 0.24\,_{24} + 0.3\,_{26} + 0.45\,_{28} \\
& + 0.8\,_{31} + 0.24\,_{35} + 0.18\,_{37} \\
& + 0.24\,_{43} + 0.24\,_{45} + 0.19\,_{48} \\
& + 0.4\,_{52} + 0.2\,_{56} + 0.4\,_{57} \\
& + 0.22\,_{63} + 0.36\,_{64} + 0.14\,_{67} \\
& + 0.4\,_{71} + 0.3\,_{74} + 0.27\,_{78} \\
& + 0.27\,_{82} + 0.28\,_{85} \\
& + 100\,_{1} + 120\,_{2} + 200\,_{3} + 160\,_{4} + 180\,_{5} + 90\,_{6} + 140\,_{7} + 150\,_{8}
\end{aligned}
$$

(3)约束条件：

各镇排放的污水总量：

$$_{11}+\ _{12}+\ _{14}+\ _{16}=50$$
$$_{22}+\ _{24}+\ _{26}+\ _{28}=100$$
$$_{31}+\ _{33}+\ _{35}+\ _{37}=45$$
$$_{43}+\ _{44}+\ _{45}+\ _{48}=90$$
$$_{52}+\ _{55}+\ _{56}+\ _{57}=75$$
$$_{63}+\ _{64}+\ _{66}+\ _{67}=60$$
$$_{71}+\ _{74}+\ _{77}+\ _{78}=30$$
$$_{82}+\ _{85}+\ _{88}=65$$

各污水处理厂20万立方米/小时污水处理能力约束：

$$_{11}+\ _{31}+\ _{71}\quad 200$$
$$_{12}+\ _{22}+\ _{52}+\ _{82}\quad 200$$
$$_{33}+\ _{43}+\ _{63}\quad 200$$
$$_{14}+\ _{24}+\ _{44}+\ _{64}+\ _{74}\quad 200$$
$$_{35}+\ _{45}+\ _{55}+\ _{85}\quad 200$$
$$_{16}+\ _{26}+\ _{56}+\ _{66}\quad 200$$
$$_{37}+\ _{57}+\ _{67}+\ _{77}\quad 200$$
$$_{28}+\ _{48}+\ _{78}+\ _{88}\quad 200$$

建立污水处理厂的固定成本约束：

$$_{11}+\ _{31}+\ _{71}\quad _{1}$$
$$_{12}+\ _{22}+\ _{52}+\ _{82}\quad _{2}$$
$$_{33}+\ _{43}+\ _{63}\quad _{3}$$
$$_{14}+\ _{24}+\ _{44}+\ _{64}+\ _{74}\quad _{4}$$
$$_{35}+\ _{45}+\ _{55}+\ _{85}\quad _{5}$$
$$_{16}+\ _{26}+\ _{56}+\ _{66}\quad _{6}$$
$$_{37}+\ _{57}+\ _{67}+\ _{77}\quad _{7}$$
$$_{28}+\ _{48}+\ _{78}+\ _{88}\quad _{8}$$

最多只建立4间污水处理厂，即：

$$_{1}+\ _{2}+\ _{3}+\ _{4}+\ _{5}+\ _{6}+\ _{7}+\ _{8}\quad 4$$

决策变量的约束：

$$=0或1,\quad 0,\quad ,=1,\cdots,8.$$

完整模型略。

8、某工厂生产A和B两种型号的产品，其生产过程须经过甲、乙、丙三个流水线车间加工，其中，乙车间有两条加工效率不同的流水线乙1和乙2（相关数据见表4-28）。

表 4-28

单位产品加工时耗	甲	乙		丙	产品利润（单位：万元）
		乙1	乙2		
产品A	3	3	2	2	25
产品B	7	5	4	1	40
车间额定工时	250	150	120	100	

已知乙车间的两条流水线只能任选一条使用，问：如何安排生产可获得最大的利润。建立本问题的整数规划模型。

答案：

解：本题中有相互排斥的约束条件。设生产A、B的数量为 $_1$，$_2$；定义 表示是否使用流水线乙 （ = 1,2)：

$$= \begin{cases} 1 & \text{使用流水线乙} \\ 0 & \text{不使用流水线乙} \end{cases}$$

本问题的完整数学模型为

$$\begin{aligned} \max \quad & = 25\ _1 + 40\ _2 \\ \text{s.t.}\ & 3\ _1 + 7\ _2 \quad 250 \\ & 2\ _1 + \quad _2 \quad 100 \\ & 3\ _1 + 5\ _2 \quad 150 + \quad _1(1 \quad _1) \\ & 2\ _1 + 4\ _2 \quad 120 + \quad _2(1 \quad _2) \\ & _1 + \quad _2 = 1 \\ & _1,\ _2 \quad 0\text{且为整数} \\ & _1,\ _2 = 0\text{或}1 \end{aligned}$$

变量非负、(0-1整数约束不能漏

9、将以下问题化为一个0-1整数规划问题

$$\begin{aligned} \max \quad & = \ _1 + 2\ _2 + 5\ _3 \\ \text{s.t.}\ & |\ _1 + 10\ _2 \quad 3\ _3| \quad 25 \\ & 2\ _1 + \quad _2 + 3\ _3 \quad 15 \\ & 0 \ (= 1,2,3) \end{aligned}$$

答案：

本问题建模为混合0-1整数规划问题如下：

$$\begin{aligned} \max \quad & = \ _1 + 2\ _2 + 5\ _3 \\ \text{s.t.}\ & _1 + 10\ _2 \quad 3\ _3 \quad 25 + \quad _1(1 \quad _1) \\ & _1 + 10\ _2 \quad 3\ _3 \quad 25 + \quad _2\ _1 \\ & 2\ _1 + \quad _2 + 3\ _3 \quad 15 \\ & 0 \ (= 1,2,3) \\ & _1 = 0\text{或}1 \end{aligned}$$

10、有4项任务需要在一台机器上完成，已知各项任务的时间消耗、完成的最后期限和延工的罚

款（假定时间从0开始）如表4-29所示。

表 4-29

任务编号	持续时间	到期时间	延期罚款
1	5	25	19
2	20	22	12
3	15	35	34
4	16	50	20

问：应该如何安排操作顺序可以最经济地完成这4项任务？

答案：

解：本题中有相互排斥的约束条件。(1)决策变量：定义工作 的持续时间、到期时间、延期罚款和开工时间分别为 ， ， ， （ = 1, •••,4)；定义0-1变量 （ ,= 1, •••,4且 <)表示工作 与工作 之间的先后顺序，即

$$= \begin{cases} 1 & \text{工作 先于工作} \\ 0 & \text{工作 后于工作} \end{cases}$$

另外，定义 表示工作 完工时间和到期时间的差值，即：

$$= \quad +$$

(2)目标函数：最经济的方案就是罚款最小的方案，即

$$\min \quad = 19\,_{11} + 12\,_{21} + 34\,_{31} + 20\,_{41}$$

(3)约束条件：

如果工作 先于工作 执行，则工作 的开始时间必然晚于工作 的完工时间，即：

$$+$$

同理，如果工作 先于工作 执行，有：

$$+$$

由于两个约束条件只能有一个有效，有

$$\begin{cases} \\ \qquad (1 \qquad) \end{cases}$$

当 0时，工作 没有超时，不需要支付罚款；而当 > 0时，工作 超时，必须支付 的罚款。由于变量 可以为负数，为适应线性规划所有变量非负的条件，将 分解为两个非负的变量，即 = $_1$ $_2$，($_1$， $_2$ 0)，有：

$$_1 \quad _2 = \quad + \qquad\qquad _1 \quad _2 \quad =$$

综上，本问题的0-1整数规划模型为：

$$\min \quad = 19\,_{11} + 12\,_{21} + 34\,_{31} + 20\,_{41}$$

$$\text{s.t.} \;\; _2 \;\; _1 \;\; _1 \quad (1 \quad _{12}), \quad _1 \;\; _2 \;\; _2 \quad _{12}$$

$$_3 \;\; _1 \;\; _1 \quad (1 \quad _{13}), \quad _1 \;\; _3 \;\; _3 \quad _{13}$$

4 1 1 (1 14), 1 4 4 14

3 2 2 (1 23), 2 3 3 23

4 2 2 (1 24), 2 4 4 24

4 3 3 (1 34), 3 4 4 34

11 12 1 = 1 1 = 5 25 = 20

21 22 2 = 2 2 = 20 22 = 2

31 32 3 = 3 3 = 15 35 = 20

41 42 4 = 4 4 = 16 50 = 34

1，2，3，4，11，12，21，22，31，32，41，42 0

12，13，14，23，24，34 = 0或1

0-1整数约束不能漏

11、E物流公司每天凌晨将GP日报从郊区的印刷厂运往城市的5个分销点，并由这5个分销点向全市所有书报亭、订购报纸的单位分发报纸。在充分回避了交通拥堵路段后，有如表4-30所示的6条运输路线可供选择，各路线表示货运车从印刷厂出发，依次访问各个分销点后，再回到印刷厂。

表 4-30备选运输路线

运输路线	访问顺序
1	1-3-4
2	4-3-5
3	1-2-5
4	2-3-5
5	1-4-2
6	1-3-5

已知印刷厂与各分销点之间的行驶距离如表4-31所示。

表 4-31距离表（单位：公里）

	印刷厂	分销点1	分销点2	分销点3	分销点4	分销点5
印刷厂		10	13	15	9	8
分销点1	10		16	4	9	5
分销点2	13	16		7	11	10
分销点3	15	4	7		8	9
分销点4	9	8	10	7		6
分销点5	8	5	10	9	5	

问：选择哪些运输路线，可以在满足将报纸送达各分销点的前提下使车辆的总行驶里程最短？试建立本问题的0-1整数规划模型（提示：本题建模思路与第4题类似，不过需要自行计算各运输路线的行驶距离）。

答案：

解：根据不同运输路线的行驶距离，各运输路线可访问的分销点，可定义0-1变量 (= 1, •••, 6)

$$= \begin{cases} 1 & \text{选择路线} \\ 0 & \text{不选择路线} \end{cases}$$

本问题的模型如下：

$$\min \quad = 31_{1} + 33_{2} + 44_{3} + 37_{4} + 40_{5} + 31_{6}$$

$$\text{s.t.} \quad {}_{1} + {}_{3} + {}_{5} + {}_{6} \quad 1$$

$$ {}_{3} + {}_{4} + {}_{5} \quad 1$$

$$ {}_{1} + {}_{2} + {}_{4} + {}_{6} \quad 1$$

$$ {}_{1} + {}_{2} + {}_{5} \quad 1$$

$$ {}_{2} + {}_{3} + {}_{4} + {}_{6} \quad 1$$

$$ = 0或1(= 1, \cdots, 6)$$

0-1整数约束不能漏

12、某少年体校游泳教练带领3名学生选手参加市青少年游泳锦标赛，根据比赛规则，每位选手只能最多只能参加2项比赛，而且一项比赛只允许一个学校的最多一名选手参赛。根据报名成绩，教练估计出这3名选手参加5个单项比赛的获胜的可能性，如表4-32所示。

表 4-32 3名学生参加各项比赛的获胜可能性

胜率 项目 / 选手	50米蛙泳	50米蝶泳	50米自由泳	50米仰泳	100米自由泳
选手1	39%	65%	69%	66%	57%
选手2	64%	84%	24%	90%	22%
选手3	59%	45%	55%	31%	50%

问：教练应该安排哪些学生参加哪些比赛项目，能使该校的总比赛成绩最好？试建立本问题的整数规划模型。

答案：

解：定义0-1整数变量 代表第 个选手是否参加第 项比赛，并定义参数 代表第 个选手是否参加第 项比赛能够获胜的可能性，即表中数据。因此有，

$$\max \quad = \sum_{=1} \sum_{=1}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{=1} \quad 2, \quad (= 1,2,3)$$

$$\sum_{=1} \quad 1, \quad (= 1,2,3,4,5)$$

$$ = 0或1, \quad (= 1,2,3; \quad = 1,2,3,4,5)$$

0-1整数约束不能漏

13、图4-28给出了某地区高速公路各路段小型乘用车收费情况（单位：元）。

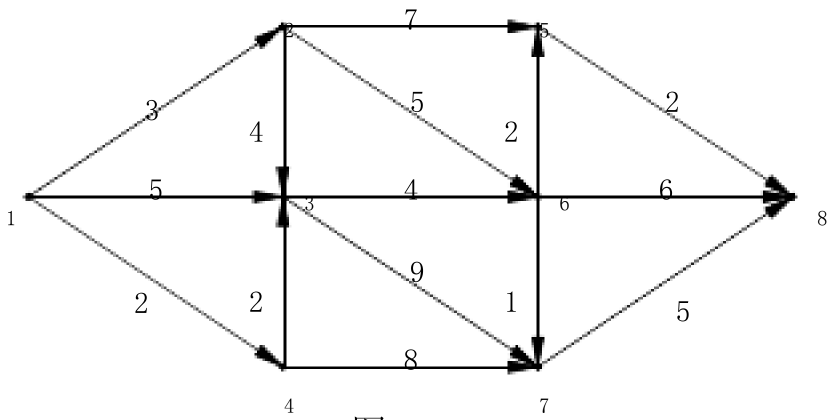

图 4-28