考题猜想 2-1 轴对称图形

（考题猜想，热考+压轴 必刷 55 题 13 种题型）

题型大集合

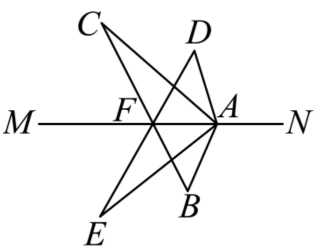
- 利用轴对称的性质求解
- 折叠问题
- 根据作图痕迹画图求解
- 设计轴对称图形
- 等腰三角形的分类讨论
- 等腰三角形的性质与判定综合
- 找出图中的等腰三角形
- 根据已知两点判定能构成等腰三角形的第三点个数
- 等边三角形性质与判定综合
- 含 **30°**角的直角三角形
- 利用直角三角形斜边的中线的性质求解
- 将军饮马问题
- 等腰三角形的动点问题

题型大通关

一．利用轴对称的性质求解（共 **4** 小题）

（23-24 八年级上·吉林·期中）

1．如图，$\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 关于直线 MN 对称，BC 与 DE 的交点 F 在直线 MN 上．

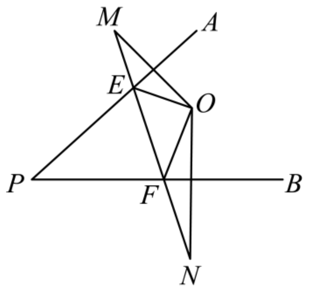


(1)图中点D的对应点是点______，AE的对应边是______；

(2)若$\angle DAE=108°$，$\angle EAF=39°$，求$\angle DAC$的度数．

（23-24八年级上·江苏宿迁·阶段练习）

2．如图所示，已知O是$\angle APB$内的一点，点M、N分别是O点关于PA、PB的对称点，MN点PA、PB分别相交于点E、F，已知$MN=8\text{cm}$．

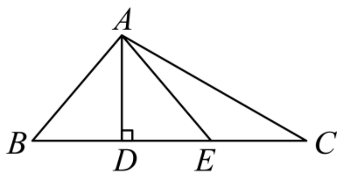


(1)求$\triangle OEF$的周长；

(2)连接PM、PN，若$\angle APB=\alpha$，求$\angle MPN$．（用含α的代数式表达）

（22-23七年级下·河南周口·期末）

3．如图，在$\triangle ABC$，AD是BC边上的高，$\triangle ABD$与$\triangle AED$关于AD对称，点E在CD上，$\angle B=50°,\angle C=30°$．

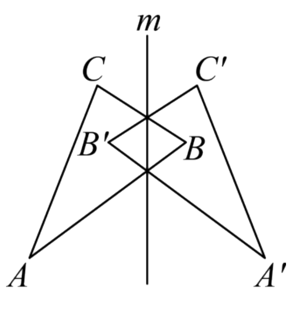


(1)求$\angle EAD$的度数；

(2)求$\angle CAE$的度数．

（2023八年级上·江苏·专题练习）

4．如图，$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$关于直线m对称．



(1)结合图形指出对称点．

(2)$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$有什么关系？若$\angle A=32°$，$\angle B'=68°$，求$\angle C'$的度数．

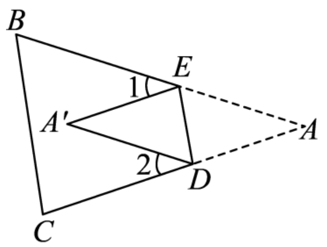
(3)分别连接AA'，BB'，CC'，直线m与线段AA'，BB'，CC'有什么关系？线段AA'，BB'，CC'之间有什么关系？

(4)延长线段AC与$A'C'$，它们的交点与直线m有怎样的关系？其他对应线段（或其延长线）的交点呢？你发现了什么规律，请叙述出来与同伴交流．

二．折叠问题（共5小题）

（23-24八年级上·山东临沂·阶段练习）

5．现有一张$\triangle ABC$纸片，点D、E分别是$\triangle ABC$边上两点，若沿直线DE折叠，折成如图的形状．



(1)若$\angle 1=25^{\circ}$、$\angle 2=35^{\circ}$，求$\angle A$的度数；

(2)猜想$\angle 1$、$\angle 2$和$\angle A$的数量关系，并说明理由．

（22-23七年级下·四川成都·期中）

6．（1）如图1，在$\triangle ABC$中，$\angle ABC$、$\angle ACB$的角平分线交于点P，求证：$\angle P=90^{\circ}+\frac{1}{2}\angle A$；

（2）如图2，点P为$\triangle ABC$内一点且满足$\angle ABP=2\angle PBC,\angle ACP=2\angle PCB$，将$\triangle ABC$沿$DE$折叠使得点$A$与点$P$重合，得到四边形$BCDE$，若$\angle 1+\angle 2=132^{\circ}$；求$\angle BPC$的度数；

（3）在四边形$BCDE$中，$EB\parallel CD$，点F在直线ED上运动（点F不与E，D两点重合），CF，在$\angle EBF$与$\angle DCF$内，且满足$\angle FBQ=n\angle EBF,\angle FCQ=n\angle FCD$，若$\angle EBF=\alpha$，$\angle DCF=\beta$，直接写出$\angle Q$和$\alpha$，$\beta$之间的数量关系．

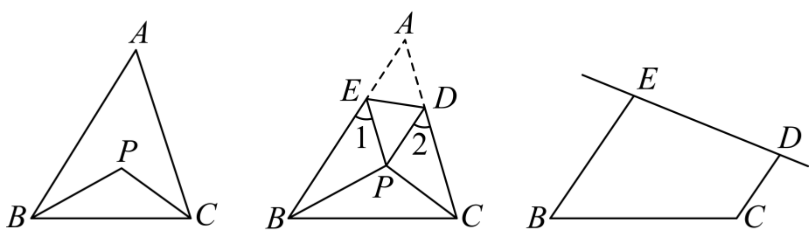


图1　　图2　　图3

（23-24八年级上·吉林长春·期末）

7．将$\triangle ABC$的$\angle C$折起，翻折后角的顶点位置记作C'．

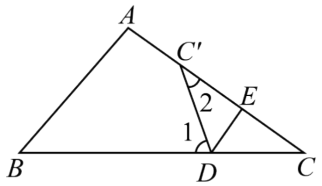


图1

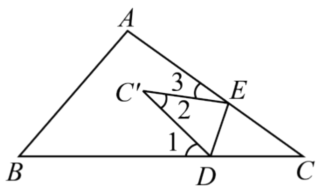


图2

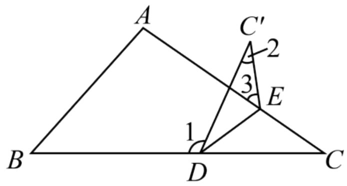


图3

(1)当C'落在AC上时（如图 1），可得$\angle 1$与$\angle 2$的关系为_；

(2)当C'点落在CA和CB之间（如图 2）时，探究$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$之间的关系，并说明理由；

(3)当C'落在CB，CA的同旁（如图 3）时，直接写出$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$之间的关系．

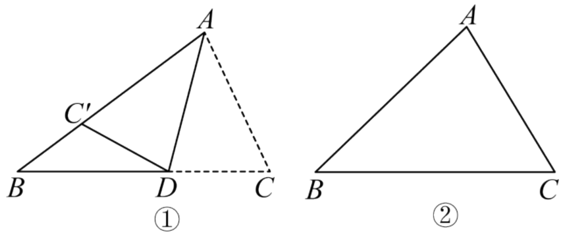
（23-24 八年级上·江苏南京·期中）

8．[问题背景]

如图①，将$\triangle ABC$沿折痕AD翻折，使点C落在AB边上点C'处，已知$\angle BAC = 80°$，$\angle C = 65°$，求$\angle ADB$的度数；

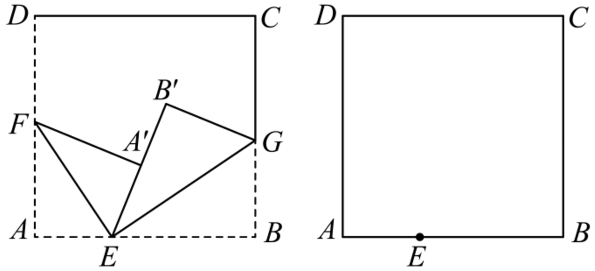
[变式运用]

如图②，在$\triangle ABC$中，$AB > AC$，求证：$\angle C > \angle B$．



（2023 八年级上·全国·专题练习）

9．有一张正方形纸片$ABCD$，点E是边AB上一定点，在边AD上取点F，沿着EF折叠，点A落在点A'处，在边BC上取一点G，沿EG折叠，点B落在点B'处．



备用图

(1)如图，当点B'落在直线$A'E$上时，猜想两折痕的夹角$\angle FEG$的度数并说明理由．

(2)当$\angle A'EB' = \frac{1}{4}\angle B'EB$时，设$\angle A'EB' = x$．

①试用含x的代数式表示$\angle FEG$的度数．

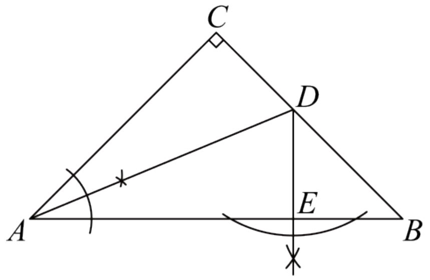
②探究EB'是否可能平分$\angle FEG$，若可能，求出此时$\angle FEG$的度数；若不可能，请说明理

由．

三．根据作图痕迹画图求解（共 4 小题）

（23-24 九年级下·湖南长沙·期中）

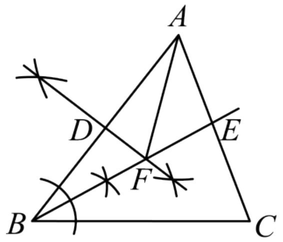
10．在$\triangle ABC$中，$\angle ACB = 90^\circ$，$AC = BC$，$AB = 6$，用尺规作图的方法作线段AD和线段DE，保留作图痕迹如图所示，认真观察作图痕迹，则$\triangle BDE$的周长是（　）



A．3　　B．$3\sqrt{2}$　　C．$6\sqrt{2}$　　D．6

（2024·四川达州·模拟预测）

11．如图，在$\triangle ABC$中，根据尺规作图痕迹，下列说法一定正确的是（　　）

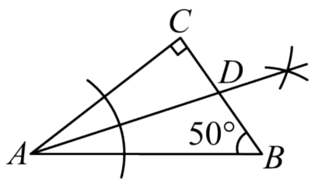


A．$BE \perp AC$　　B．$DF=\frac{1}{2}BF$

C．$\angle BAF = \frac{1}{2}\angle ABC$　　D．$EF = AE$

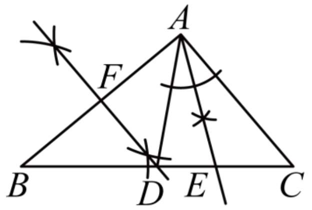
（24-25 八年级上·全国·单元测试）

12．如图，根据尺规作图所留痕迹，可以求出$\angle ADC =$______°．



（22-23 八年级上·江苏泰州·期中）

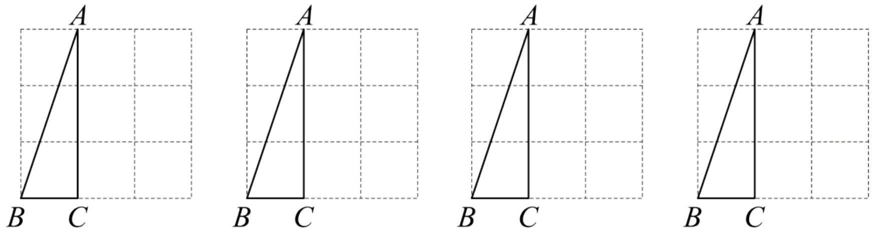
13．如图，在$\triangle ABC$中，$\angle B = 40^\circ$，$\angle C = 50^\circ$，通过观察尺规作图的痕迹，可以求得$\angle DAE =$________．



四．设计轴对称图形（共 3 小题）

（24-25 八年级上·北京·期中）

14．如图，在3×3的正方形格纸中，格线的交点称为格点，以格点为顶点的三角形称为格点三角形．图中$\triangle ABC$是一个格点三角形．请你分别在下列每张图中画出一个以D、E、F为顶点的格点三角形，使它与$\triangle ABC$关于某条直线对称．（所画的 4 个图形不能重复）

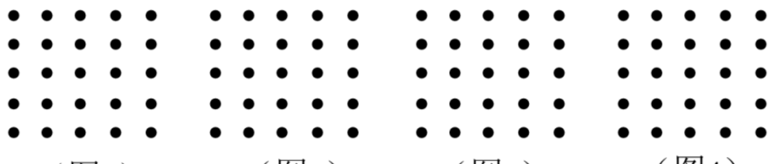


（2024 八年级上·江苏·专题练习）

15．某班围棋兴趣小组的同学在一次活动时，他们用 25 粒围棋摆成了如图 1 所示的图案．甲、乙两人发现了该图案的具有以下性质：

甲：这是一个轴对称图形，且有 4 条对称轴；

乙：这是一个轴对称图形，且每条对称轴都经过 5 粒棋子．



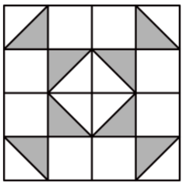
(1)请在图 2 中去掉 4 个棋子，使所得图形仅保留甲所发现的性质．

(2)请在图 3 中去掉 4 个棋子，使所得图形仅保留乙所发现的性质．

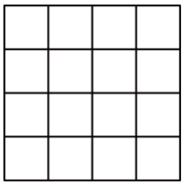
(3)在图 4 中，请去掉若干个棋子（大于 0 且小于 10），使所得图形仍具有甲、乙两人所发现的所有性质．（图中用“×”表示去掉的棋子）

（2024 八年级上·江苏·专题练习）

16．认真观察图甲，其中每个小正方形的边长都是 1．



图甲



图乙

(1)①图甲中阴影部分构成的图案是轴对称图形吗？如果是，它有几条对称轴？如果不是，请说明理由.

②图甲中阴影部分的面积是多少？

(2)请在图乙中设计出至少有两条对称轴且面积与图甲中阴影部分面积相等的一个轴对称图形.

五．等腰三角形的分类讨论（共 6 小题）

（24-25 八年级上·湖北荆门·期中）

17．已知等腰$\triangle ABC$的一个角是$80°$，则$\triangle ABC$的底角的度数是_____.

（24-25 八年级上·云南楚雄·期中）

18．若一个等腰三角形两边的长分别为3cm和7cm，则这个等腰三角形的周长是______cm.

（24-25 八年级上·山东临沂·期中）

19．已知等腰三角形一腰上的中线将它的周长分成9cm和12cm两部分，则等腰三角形的腰长为_____________.

（24-25 七年级上·山东烟台·期中）

20．若等腰三角形的周长为 14，一边是 4，则此等腰三角形的腰长是____.

（24-25 八年级上·湖南岳阳·期中）

21．一个等腰三角形的一腰上的高与另一腰的夹角为$40°$，则它的顶角为____________.

（2024 八年级上·全国·专题练习）

22．已知等腰三角形的周长为 13．若该三角形其中两边的长分别为$3x$和$2x+5$，则底边长为_____.

六．等腰三角形的性质与判定综合（共 4 小题）

（24-25 八年级上·江苏无锡·期中）

23．在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，AD和CE是高，它们所在的直线相交于点H.

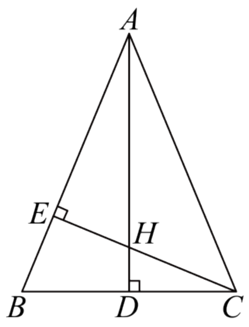


图1

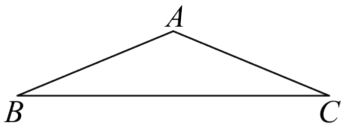


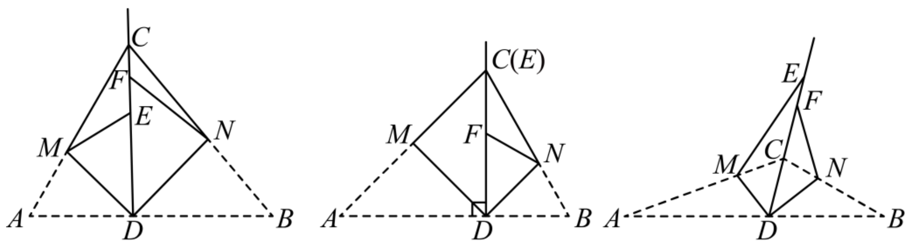
图2

(1)如图 1，若 $\angle BAC=45°$，求证：$AH=2BD$；

(2)如图 2，若 $\angle BAC=135°$，（1）中的结论是否依然成立？请在图②中画出图形并证明你的结论．

（24-25 八年级上·江苏苏州·期中）

24．【背景呈现】数学兴趣小组发现以下图形折叠方式：如图①，在$\triangle ABC$中，点D是边AB上任意一点，作射线DC，点M、N分别在线段AC、BC上．将$\triangle ABC$折叠，使点A落在点E处，点B落在点F处，点E、F均在射线DC上，折痕分别为DM和DN．设$\angle CME=\alpha$，$\angle CNF=\beta$．



【问题探究】当点E、F均在线段DC上时，试求α、β与$\angle ACB$之间的数量关系．（不必作答）

【问题解决】

（1）经过讨论．小组同学想利用“从特殊到一般”的思想方法解决问题，某同学做如下尝试：如图②，令$\angle ADC=\angle BDC=90°$，若点$E$恰好与点$C$重合，此时$\angle A=$________°，若点$F$在线段$DC$上，当$\angle B=65°$时，$\beta=$________°．

（2）合作交流后，该小组同学认为可以利用三角形和轴对称图形的知识解决该问题，如图①．当点E，F均在线段DC上时，试证明：$\alpha+\beta=180°-2\angle ACB$．

【迁移应用】

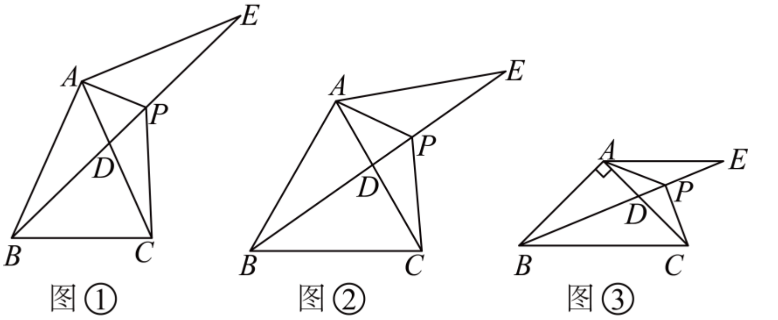
（3）在背景呈现的条件下，解答下列问题：

①如图③，当点E、F均在线段DC的延长线上时，试求α、β与$\angle ACB$之间的数量关系；

②若$\angle ADC=\angle BDC=90^\circ$，点$E$，$F$在射线$DC$上，且位于点$C$异侧，当$a=\beta$时，$\angle ACB=$________.

（24-25 八年级上·江苏连云港·期中）

25．如图，等腰$\triangle ABC$中，$AB=AC$，点D是AC上一动点，点E、P分别在BD延长线上，且$AB=AE$，$CP=EP$.



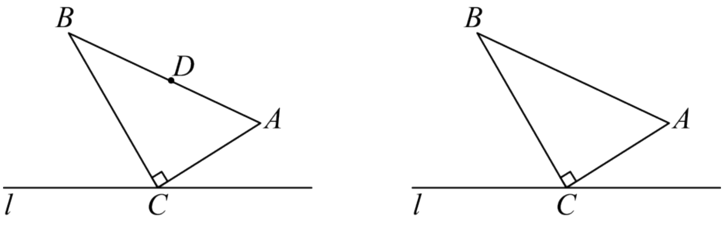
【问题思考】(1) 在图①中，求证：$\angle BPC=\angle BAC$；

【问题再探】(2) 若$\angle BAC=60^\circ$，如图②，探究线段AP、BP、EP之间的数量关系，并证明你的结论；

【问题拓展】(3) 若$\angle BAC=90^\circ$且BD平分$\angle ABC$，如图③，若$BD=5$，则PC的值为______.

（24-25 八年级上·江苏无锡·期中）

26．如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90^\circ$，$AC=6$，$BC=8$，$AB=10$．点C在直线l上．点P从点A出发，在三角形边上沿$A\to C\to B$的路径向终点B运动；点Q从B点出发，在三角形边上沿$B\to C\to A$的路径向终点A运动．点P和Q分别以2单位/秒和3单位/秒的速度同时开始运动，运动时间为t秒；在运动过程中，若有一点先到达终点时，该点停止运动，另一个点继续运动，直到两点都到达相应的终点时整个运动才能停止.



(1)点P在AC边上时，$CP=$_____；点Q在AC边上时，$CQ=$_____；（用含t的代数式表示）；

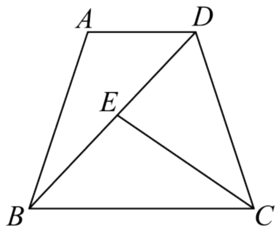
(2)若点D是AB的中点，$\triangle CDQ$是以CD为腰的等腰三角形，求运动时间t的值；

(3)分别过P和Q作$PE\perp l$于点E，$QF\perp l$于点F，当$\triangle$PEC与$\triangle CFQ$全等时，求运动时间t的值.

七．找出图中的等腰三角形（共 3 小题）

（23-24 八年级上·吉林白山·期中）

27．如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$AB = CD$，$\angle BDC = \angle BCD$，点 E 是线段 BD 上一点，且 $BE = AD$．



(1)求证：$\triangle ADB \cong \triangle EBC$；

(2)直接写出图中所有的等腰三角形．

（22-23 八年级上·黑龙江哈尔滨·期末）

28．如图 1，$\angle DAB = \angle ABC = 90°$，$\angle BAC = 45°$，$CE \perp BD$．

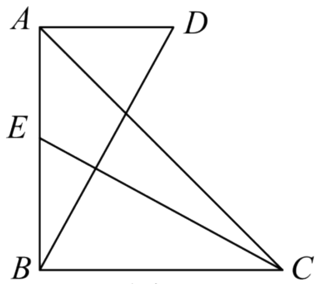


图1

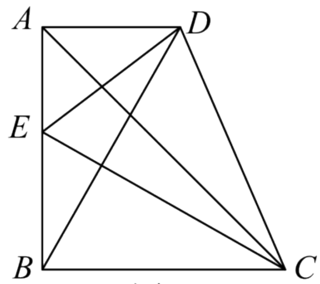


图2

(1)求证：$AD = BE$；

(2)如图 2，若点 E 是 AB 的中点，连接 DE、CD，在不添加其他字母的条件下，写出图中四个等腰三角形．

（2024 七年级下·全国·专题练习）

29．如图 1，已知等边 $\triangle ABC$ 中，D、E 分别是 AB、AC 上的点，连接 DE．

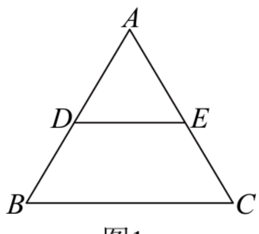


图1

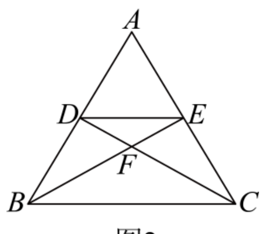


图2

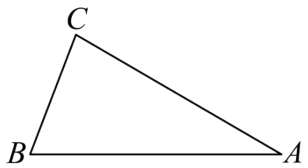
(1)若 $DE \parallel BC$，求证：$\triangle ADE$ 是等边三角形；

(2)如图 2，若 D、E 分别为 AB、AC 中点，连接 CD、BE，CD 与 BE 相交于点 F，请直接写出图中所有等腰三角形．（$\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 除外）

八．根据已知两点判定能构成等腰三角形的第三点个数（共 4 小题）

（24-25 八年级上·江苏无锡·阶段练习）

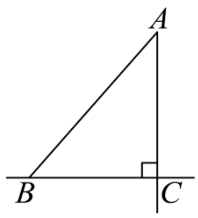
30．已知：如图，$\triangle ABC$ 中 $\angle B = 70°$，$\angle C = 80°$，在直线 BA 上找一点 D，使 $\triangle ACD$ 或 $\triangle BCD$ 为等腰三角形，则符合条件的点 D 的个数有（　）



A．9 个　　B．8 个　　C．7 个　　D．6 个

（23-24 八年级上·江苏徐州·期中）

31．如图，已知 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB = 90°$，$\angle A = 40°$，在直线 AC 取一点 P，使得 $\triangle PAB$ 是等腰三角形，则符合条件的点 P 共有（　）



A．2 个　　B．3 个　　C．4 个　　D．5 个

（2024 八年级下·全国·专题练习）

32．在平面直角坐标系中，O 为坐标原点，点A 的坐标为$(3,4)$，点 P 是坐标轴上的一点，使 $\triangle OAP$ 为等腰三角形的点 P 的个数有（　　）

A．5 个　　B．6 个　　C．7 个　　D．8 个

（23-24 八年级上·黑龙江齐齐哈尔·期中）

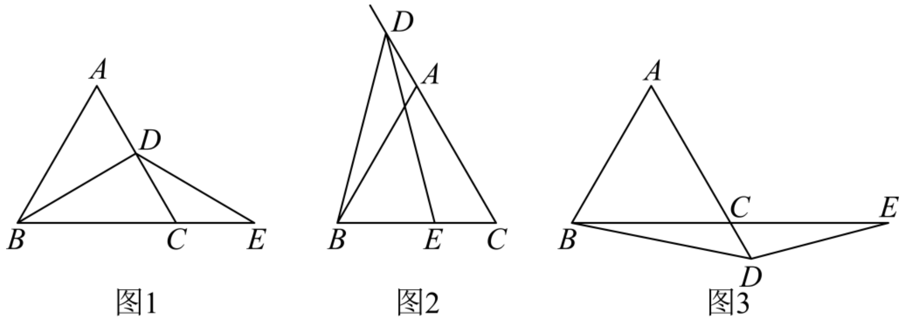
33．在平面直角坐标系中，已知 $A\left(4,1\right)$，在坐标轴上确定一点 P 使得 $\triangle AOP$ 为等腰三角形，则满足条件的点可以画出（　）

A．4 个　　B．6 个　　C．8 个　　D．7 个

九．等边三角形性质与判定综合（共 4 小题）

（24-25 八年级上·江苏南通·期中）

34．已知，ΔABC 是等边三角形，点 D 是直线 AC 上的点，点 E 是直线 BC 上的点，且 $DB = DE$.

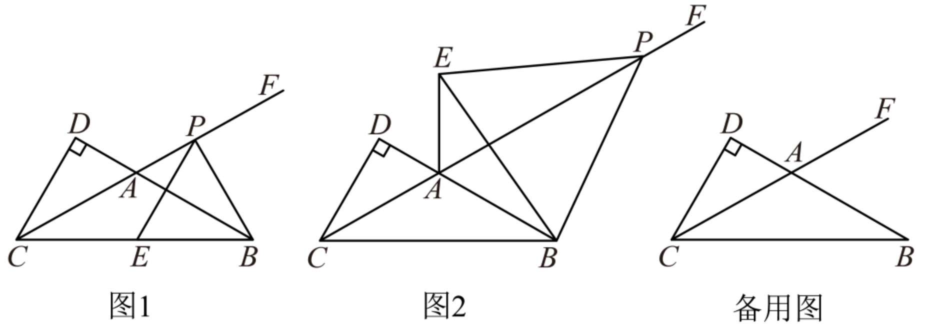


(1)如图 1，当点 D 在线段 AC 上（不与点 A，C 重合）时，求证：$AD=CE$；

(2)当点 D 在线段CA或线段 AC的延长线上时，AD与CE有怎样的数量关系？写出你的猜想，并在图 2 和图 3 中选择一种情况给予证明.

（24-25 八年级上·湖北荆门·期中）

35．已知等腰三角形 ABC 中，$AB=AC=20\text{ cm}$，$\angle ABC=30^\circ$，$CD\perp AB$ 交 BA 延长线于点 D，AF 为 CA 的延长线，点 P 从 A 点出发以每秒 2 cm 的速度在射线 AF 上向右运动，连接 BP，以 BP 为边，在 BP 的左侧作等边三角形 BPE，连接 AE.



(1)如图 1，当 $BP\perp AC$ 时，求证：$\triangle ABP\cong\triangle ACD$；

(2)当点 P 运动到如图 2 位置时，此时点 D 与点 E 在直线 AP 同侧，求证：$AP=AB+AE$；

(3)在点 P 运动过程中，连接 DE，当点 P 运动多少秒时，线段 DE 长度取到最小值.

（24-25 八年级上·江苏泰州·期中）

36．【阅读理解】

中线是三角形中的重要线段之一．在解决几何问题时，当条件中出现“中点”、“中线”等条件，可以考虑利用中线作辅助线，即把中线延长一倍，通过构造全等三角形，把分散的已知条件和所要求的结论集中到同一个三角形中，从而运用全等三角形的有关知识来解决问题，这种作辅助线的方法称为“倍长中线法”.

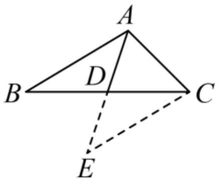


图1

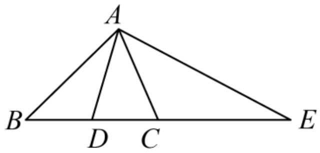


图2

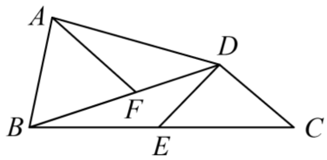


图3

（1）如图 1，AD 是 $\triangle ABC$ 的中线，且 $AB > AC$，延长 AD 至点 E，使 $ED = AD$，连接 EC．

①根据所作辅助线可以证得 $\triangle ADB \cong \triangle EDC$，其中判定全等的依据为：______；

②若 $AB = 4, AC = 3$，则 AD 的取值范围是______；

【方法运用】

运用上面的方法解决下面的问题：

（2）如图 2，AD 是 $\triangle ABC$ 的中线，点 E 在 BC 的延长线上，$CE = AB = BC$，求证：AC 平分 $\angle DAE$；

【问题拓展】

（3）如图 3，BD 是四边形 $ABCD$ 的对角线，$\angle CDB = 120°$，点 E 是 BC 边的中点，点 F 在 BD 上，$CD = FD, AF = AB = BF$，若 $ED = 5$，求 AD 的长．

（24-25 八年级上·江苏徐州·期中）

37．教材回顾：我们在学习完2.5等腰三角形的轴对称性后，教材设置了这样一道题目：如图1，$\triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 都是等边三角形，且点 A 、C 、E 在一条直线上，AD 与 BE 相等吗？我们通过证明 $\triangle ACD \cong \triangle BCE$，得出 $AD = BE$，$\triangle ACD \cong \triangle BCE$ 的理由是_；

拓展思考：(1) 设 AD 与 BC 的交点记为点 F，BE 与 CD 的交点记为点 G，连接 FG，猜想 FG 与 AE 的位置关系，并证明你的猜想（可直接使用结论 $\triangle ACD \cong \triangle BCE$）；

自主探究：若 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 在直线 AC 的异侧，其余条件不变，如图2所示，AD 与 BC 的延长线交与点 F，BE 与 CD 的延长线于点 G，AF 与 BG 交于点 O，连接 GF．

（2）求证：$FG \parallel AE$；

（3）$\angle DOE =$ _ °；

思维发散：(4) 如图1，若 $\triangle CDE$ 绕点 C 旋转，其余条件不变，当点 A 、C 、E 不在一条直线上时，请你参考以上探究过程，在图3中画出图形的一种情况，并结合图形写出2条结论（等边三角形的性质除外）．

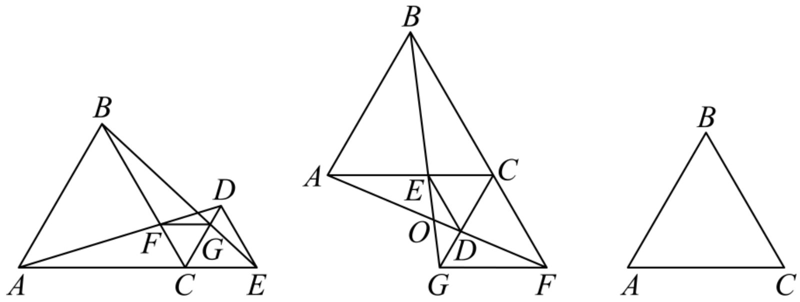
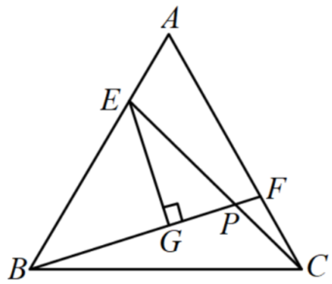


图1　　　　　　　　图2　　　　　　　　图3

一十．含30°角的直角三角形（共3小题）

（24-25八年级上·江苏扬州·阶段练习）

38．如图，$\triangle ABC$是等边三角形，E、F分别是边AB、AC 上的点，且$AE=CF$，且CE、BF交于点P，且 $EG\perp BF$，垂足为 G．

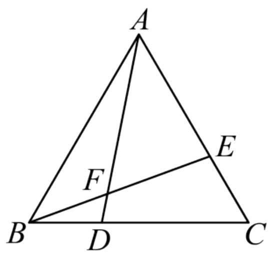


(1)求证：$\angle ACE=\angle CBF$；

(2)若 $PG=PC=2$，求 BF的长度．

（24-25八年级上·江苏宿迁·阶段练习）

39．已知：如图，等边$\triangle ABC$中，D，E分别在BC，AC边上运动，且始终保持$BD=CE$，点D、E始终不与等边$\triangle ABC$的顶点重合，连接AD、BE，AD，BE交于点F．



(1)试说明$\triangle BEC\cong\triangle ADB$；

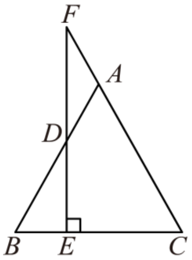
(2)求$\angle AFE$度数；

(3)点P在射线FE上，当$AF=4$，$\triangle APF$为直角三角形时，$PF=$________．

（24-25八年级上·湖南长沙·阶段练习）

40．如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，D是AB上的一点，过点D作$DE\perp BC$于点E，延长ED

和 CA，交于点 F.



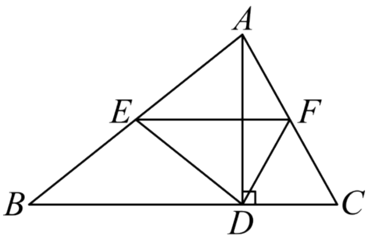
(1)求证：$\triangle ADF$ 是等腰三角形；

(2)若 $\angle F=30°$，$BD=4$，$EC=6$，求 AC 的长.

一十一．直角三角形斜边的中线的性质求解（共 4 小题）

（24-25 八年级上·江苏盐城·期中）

41．如图，在 $\triangle ABC$ 中，AD 是 BC 边上的高，E、F 分别是 AB、AC 的中点．

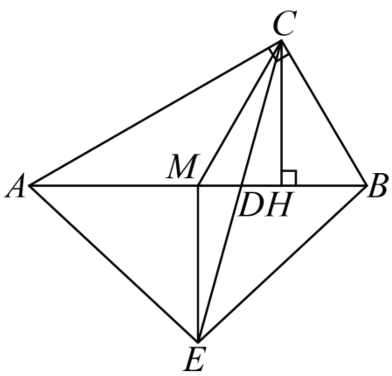


(1) $AB=12$，$AC=8$，求四边形 $AEDF$ 的周长；

(2) EF 与 AD 有怎样的位置关系？证明你的结论．

（23-24 八年级上·浙江杭州·期中）

42．在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，M 是边 AB 的中点，$CH\perp AB$ 于点 H，CD 平分 $\angle ACB$．



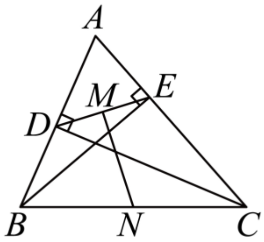
(1)求证：CD 平分 $\angle MCH$；

(2)过点 M 作 AB 的垂线交 CD 的延长线于点 E，求证：$CM=EM$；

(3) $\triangle AEM$ 是什么三角形？证明你的猜想．

（23-24 八年级上·江苏扬州·期末）

43．已知：如图，锐角$\triangle ABC$中，CD、BE分别是边AB、AC上的高，M、N分别是线段DE、BC的中点．

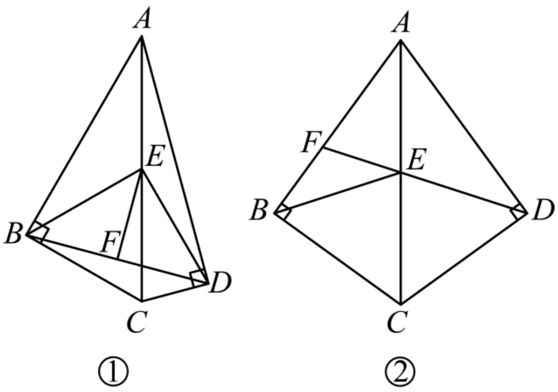


(1)求证：$MN \perp DE$；

(2)连接DN、EN，猜想$\angle A$与$\angle DNE$之间的关系，并说明理由．

（24-25 八年级上·江苏南京·阶段练习）

44．在四边形$ABCD$中，$\angle ABC = \angle ADC = 90°$，$E$是$AC$的中点．



(1)如图①，点F为BD中点．

①求证：$EF \perp BD$；

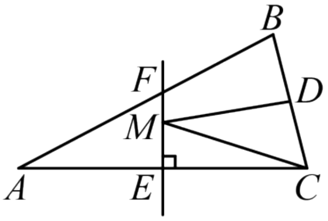
②若$\angle BCD = 135°$，$AC = 6$，则$\triangle BED$的面积为______；

(2)如图②，若$AB = AD$，延长DE交AB于点F，且$BF = EF$，求$\angle BAC$的度数为______．

一十二．将军饮马问题（共 6 小题）

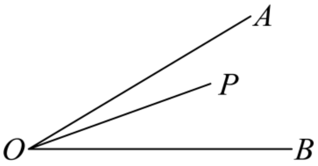
（24-25 八年级上·湖南·期中）

45．如图，在$\triangle ABC$中，$AB = AC$，$BC = 4$，面积是 16，AC的垂直平分线EF分别交AC，AB边于E，F点，若D为BC边的中点，M为线段EF上一动点，则$\triangle CDM$的周长的最小值为______．



（24-25八年级上·江苏扬州·阶段练习）

46．如图，已知$\angle AOB=30^{\circ}$，其内部有一点P，$OP=12$，在$\angle AOB$的两边分别有C、D两点（不同于点O），使$\triangle PCD$的周长最小，请画出草图，并求出$\triangle PCD$周长的最小值．



（23-24八年级上·新疆昌吉·期末）

47．已知点P在$\angle MON$内．如图1，点P关于射线OM的对称点是G，点P关于射线ON的对称点是H，连接OG、OH、OP．

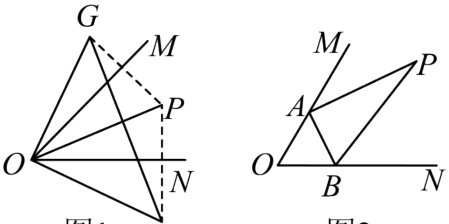


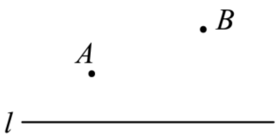
图1　　图2

(1)若$\angle MON=50^{\circ}$，求$\angle GOH$的度数；

(2)如图2，若$OP=6$，当$\triangle PAB$的周长最小值为6时，求$\angle MON$的度数．

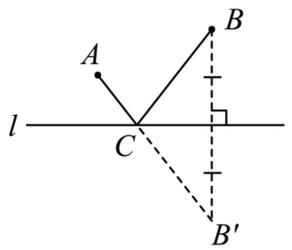
（22-23七年级下·河南洛阳·期末）

48．古希腊有一个著名的"将军饮马问题"，大致内容如下：古希腊一位将军，每天都要巡查河岸同侧的两个军营A，B．他总是先去A营，再到河边饮马，之后，再巡查B营．他时常想，怎么走，才能使他每天走的路程之和最短呢？



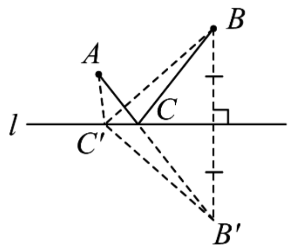
大数学家海伦曾用轴对称的方法巧妙地解决了这个问题．

如图2，作B关于直线l的对称点B'，连结AB'与直线l交于点C，点C就是所求的位置．请你在下列阅读、应用的过程中，完成解答：



(1)证明：如图 3，在直线 l 上另取任一点 C'，连结 AC'，BC'，$B'C'$，

∵直线 l 是点 B，B' 的对称轴，点 C，C' 在 l 上，



$\therefore CB=$_，$C'B=$_，

$\therefore AC+CB=AC+CB'=$_.

在$\triangle AC'B'$中，

$\because AB'<AC'+C'B'$，

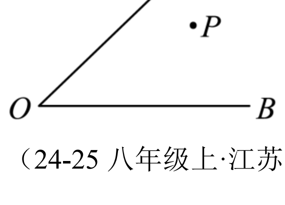
$\therefore AC+CB<AC'+C'B'$.

$\therefore AC+CB<AC'+C'B'$，即 $AC+CB$ 最小.

本问题实际上是利用轴对称变换的思想，把 A，B 在直线同侧的问题转化为在直线的两侧，从而可利用“两点之间线段最短”，即“三角形两边之和大于第三边”的问题加以解决（在连接 A，B' 两点的线中，线段 AB' 最短）. 本问题可归纳为求定直线上一动点与直线外两定点的距离和的最小值的问题的数学模型.

(2)问题解决

如图，将军牵马从军营 P 处出发，到河流 OA 饮马，再到草地 OB 吃草，最后回到 P 处，试分别在边 OA 和 OB 上各找一点 E、F，使得走过的路程，即$\triangle PEF$ 的周长最小.（保留画图痕迹，辅助线用虚线，最短路径用实线）



（24-25 八年级上·江苏盐城·阶段练习）

49．综合与实践

【提出问题】唐朝诗人李颀的诗《古从军行》开头两句“白日登山望烽火，黄昏饮马傍交河，”中隐含着一个有趣的数学问题——将军饮马．如图 1，将军从山脚下的点 A 出发，到达河岸点 P 饮马后再回到点 B 宿营，他时常想，怎么走，才能使他每天走的路程之和最短呢？

【分析问题】

小亮：作 B 关于直线 l 的对称点 B'，连接 AB' 与直线 l 交于点 C，点 C 就是饮马的地方，此时所走的路程就是最短的．（如图 2）

小慧：你能详细解释为什么吗？

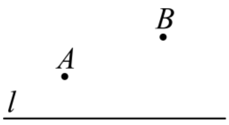


图1

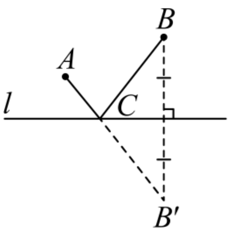


图2

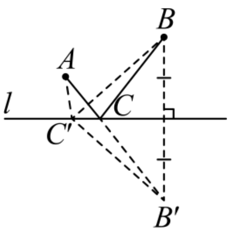


图3

小亮：如图 3，在直线 l 上另取任一点 C'，连接 AC'，BC'，$B'C'$，我只要证明

$AC+CB<AC'+C'B$．

∵直线 l 是点 B，B' 的对称轴，点 C，C' 在 l 上，

∴$CB=$_，$C'B=$_，

请完整地写出小亮的证明过程．

【解决问题】

如图 4，将军牵马从军营 P 处出发，到河流 OA 饮马，再到草地 OB 吃草，最后回到 P 处，试分别在边 OA 和 OB 上各找一点 E、F，使得走过的路程最短．（保留画图痕迹，辅助线用虚线，最短路径用实线．）

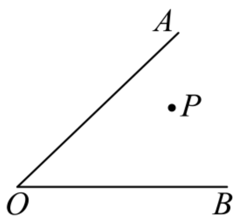


图4

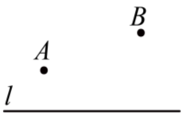
（24-25 八年级上·辽宁大连·期中）

50．阅读材料：

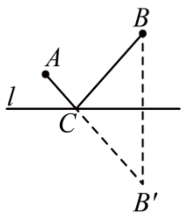
如图 1，“智慧小组”在探究“将军饮马问题”时抽象出数学模型：直线 l 同旁有两个定点 A，

B，在直线l上存在点C，使得$CA+CB$的值最小.

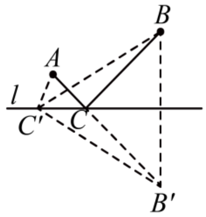
“智慧小组”的作法是：如图2，作点B关于直线l的对称点B'，连接AB'，则AB与直线l的交点即为点C，且$CA+CB$的最小值为AB'的长.



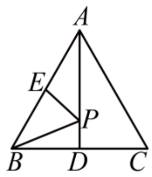
(图1)



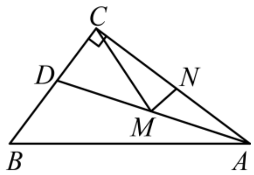
(图2)



(图3)



(图4)



(图5)

如图3，为了证明点C的位置即为所求，“智慧小组”经探究发现，在直线上另外取点C'，连接AC'，BC'，$B'C'$，证明$AC+BC<AC'+BC'$即可.

(1)请完成图3中的证明；

(2)如图4，在等边$\triangle ABC$中，E是AB中点，AD是$\angle BAC$的平分线，P是AD上的动点．若$AD=4$，则$PE+PB$的最小值是________；

(3)如图5，在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$\angle ACB=90^\circ$，$AC=8$，$BC=6$，$AB=10$，AD平分$\angle BAC$，分别在AD，AC上取点M，N，连接CM，MN，则$CM+MN$的最小值是________.

一十三．等腰三角形的动点问题（共5小题）

（24-25九年级上·广东深圳·开学考试）

51.【初步感知】

（1）如图1，已知$\triangle ABC$为等边三角形，点D为边BC上一动点（点D不与点B，点C重合）．以AD为边向右侧作等边$\triangle ADE$，连接CE．求证：$\triangle ABD\cong\triangle ACE$；

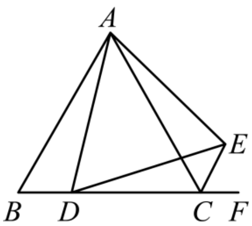


图1

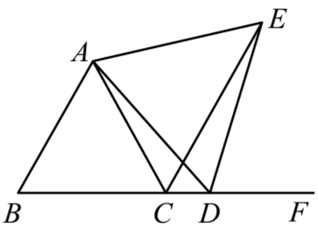


图2

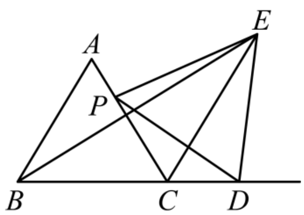


图3

【类比探究】

（2）如图2，若点D在边BC的延长线上，随着动点D的运动位置不同，线段EC，AC，CD之间的数量关系为__________，请证明你的结论.

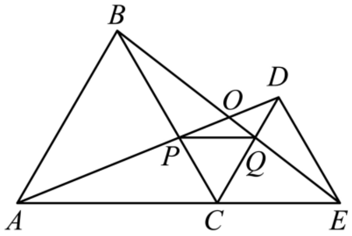
【拓展应用】

（3）如图3，在等边$\triangle ABC$中，$AB=5$，点P是边AC上一定点且$AP=2$，若点D为射线

BC 上动点，以 DP 为边向右侧作等边 $\triangle DPE$，连接 CE，BE．请问：$PE+BE$ 是否有最小值？若有，请求出其最小值；若没有，请说明理由．

（24-25 八年级上·江苏无锡·阶段练习）

52．如图，C 为线段 AE 上一动点（不与点 A，E 重合），在 AE 同侧分别作正三角形 ABC 和正三角形 CDE（正三角形也叫等边三角形，它的三条边都相等，三个内角都等于60°），AD 与 BE 交于点 O，AD 与 BC 交于点 P，BE 与 CD 交于点 Q，连接 PQ．



试说明：

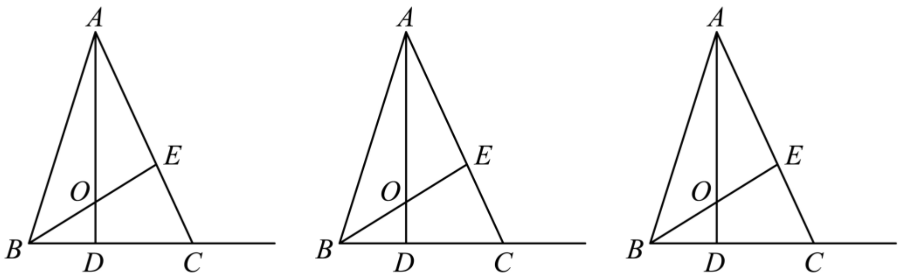
① $AD=BE$；

②填空 $\angle AOE=$_°；

③ $CP=CQ$．

（2024 八年级上·江苏·专题练习）

53．如图，在 $\triangle ABC$ 中，$BC=5$，AD 是 BC 边上的高，BE 是 AC 边上的高，AD、BE 相交于点 O，且 $AE=BE$．



(备用图1)　　(备用图2)

(1)求证：$\triangle AOE \cong \triangle BCE$．

(2)动点 P 从点 O 出发，沿线段 OA 以每秒 1 个单位长度的速度向终点A运动，动点 Q 从点 B 出发沿射线 BC 以每秒 4 个单位长度的速度运动，P、Q 两点同时出发，当点 P 到达A点时，P、Q 两点同时停止运动．设点 P 的运动时间为 t 秒，点 F 是直线 AC 上的一点且 $CF=BO$．是否存在 t 值，使以点 B、O、P 为顶点的三角形与以点 F、C、Q 为顶点的三角形全等？若存在，请求出符合条件的 t 值；若不存在，请说明理由．

（22-23 八年级上·江苏盐城·期中）

54．【问题提出】如图 1，$\triangle ABD$、$\triangle ACE$ 都是等边三角形，求证：$BE = DC$．

【方法提炼】这两个共顶点的等边三角形，其在相对位置变化的同时，始终存在一对全等三角形，即$\triangle ADC \cong \triangle ABE$．如果把小等边三角形的一边看作“小手”，大等边三角形的一边看作“大手”，这样就类似“大手拉着小手”，不妨称之为“手拉手”基本图形，当图形中只有一个等边三角形时，可尝试在它的一个顶点作另一个等边三角形，构造“手拉手”基本图形，从而解决问题．

【方法应用】

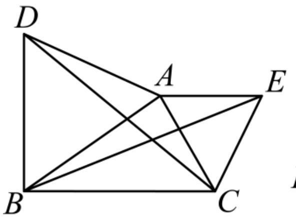


图1

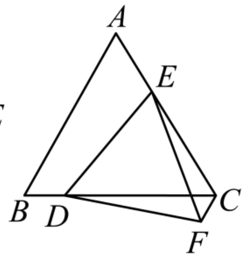


图2

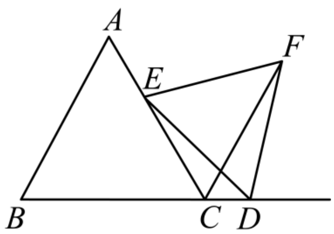


图3

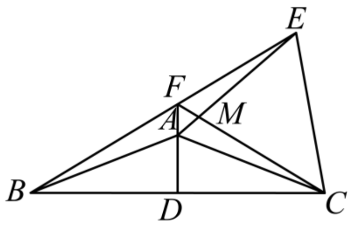


图4

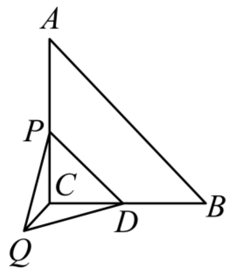


图5

(1)等边三角形 ABC 中，E 是边 AC 上一定点，D 是直线 BC 上一动点，以 DE 为一边作等边：等边三角形 DEF，连接 CF．

①如图 2，若点 D 在边 BC 上，求证：$CE + CF = CD$．

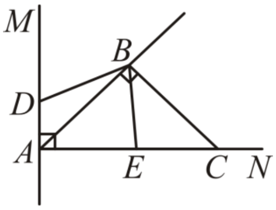
②如图 3，若点 D 在边 BC 的延长线上，线段 CE、CF、CD 之间的关系为__________（直接写出结论）

(2)如图 4，等腰$\triangle ABC$ 中，$120° < \angle BAC < 180°$，$AB = AC$，$AD \perp BC$，且交 BC 于点 D，以 AC 为边作等边$\triangle ACE$，直线 BE 交直线 AD 于点 F，连接 FC 交 AE 于点 M，写出 FE、FA、FC 之间的数量关系，并加以说明．

(3)如图 5，在$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB = 90°$，$AC = BC = 8$，点 D 是 BC 的中点，点 P 是 AC 边上的一个动点，连接 PD，以 PD 为边在 PD 的下方作等边三角形 PDQ，连接 CQ，则 CQ 是否有最小值，如有，求出它的最小值，没有，请说明理由．

（24-25 八年级上·江苏常州·阶段练习）

55．如图，在直角三角形ABC中，$\angle ABC=90°$，$BA=BC$，$\angle BAC=\angle BCA$，直线$AM\perp AC$．动点E，D同时从点A出发，其中动点E以$2\text{cm}/\text{s}$的速度沿射线AN运动．动点D以$1\text{cm}/\text{s}$的速度在直线AM上运动，已知$AC=6\text{cm}$，设动点D，E的运动时间为$t\text{s}$．



(1)当点D沿射线AM运动时，若$S_{\triangle ABD}:S_{\triangle BEC}=2:1$，求$t$的值．

(2)当动点D在直线AM上运动时，若$\triangle ADB$与$\triangle BEC$全等，求t的值．

1．(1) B， AC

(2) $\angle DAC=30^{\circ}$

【分析】本题主要考查了轴对称的性质，解题的关键是熟练掌握性质，准确计算．

（1）本题考查轴对称的性质，根据轴对称的性质解答即可．

（2）本题根据轴对称性质推出 $\angle CAF=\angle EAF=39^{\circ}$，从而得出 $\angle CAE=78^{\circ}$，最后根据 $\angle DAC=\angle DAE-\angle CAE$ 即可解题．

【详解】（1）解：由题意可得：图中点 D 的对应点是点 B， AE 的对应边是 AC，

故答案为： B， AC．

（2）解：$\because \angle DAE=108^{\circ}$， $\angle EAF=39^{\circ}$,

$\therefore \angle CAF=\angle EAF=39^{\circ}$，

$\therefore \angle CAE=\angle CAF+\angle EAF=78^{\circ}$，

$\therefore \angle DAC=\angle DAE-\angle CAE=30^{\circ}$．

2．(1) 8cm

(2) 2α

【分析】本题考查的是轴对称的性质，熟记轴对称的性质是解本题的关键；

（1）根据轴对称的性质可得 $EM=EO$， $FN=FO$，再结合三角形的周长公式可得答案；

（2）根据轴对称的性质可得 $\angle MPA=\angle OPA$，$\angle NPB=\angle OPB$，再结合角的和差运算可得答案；

【详解】（1）解：$\because M$，N 分别是点 O 关于 PA 、 PB 的对称点，

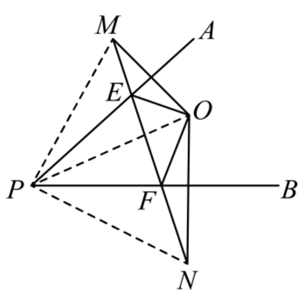
$\therefore EM=EO$， $FN=FO$，

$\therefore \triangle OEF$ 的周长 $=OE+OF+EF$

$=ME+EF+FN=MN$

$=8(\text{cm})$；

（2）如图，连接 PM， PN， PO，



$\because M$，N 分别是点 O 关于 PA 、 PB 的对称点，

$\therefore \angle MPA = \angle OPA$， $\angle NPB = \angle OPB$，

$\therefore \angle MPN = 2\angle APB = 2a$．

3．(1) $40°$

(2) $20°$

【分析】（1）根据对称的性质得到$\angle B = \angle AED = 50°$，利用三角形内角和定理求出$\angle EAD$的度数；

（2）先根据对称的性质求出$\angle AED$的度数，再由三角形外角的性质即可得出结论．

【详解】（1）解：$\because \triangle ABD$与$\triangle AED$关于AD对称，

$\therefore \angle B = \angle AED = 50°$，

$\because AD$是BC边上的高，

$\therefore \angle ADE = 90°$，

$\therefore \angle EAD = 180° - 90° - 50° = 40°$；

（2）$\because \triangle ABD$与$\triangle AED$关于AD对称，

$\therefore \angle AED = \angle B = 50°$，

$\because \angle AED$是$\triangle ACE$的外角，

$\therefore \angle AED = \angle CAE + \angle C$，

$\therefore \angle CAE = \angle AED - \angle C = 50° - 30° = 20°$．

【点睛】本题考查的是三角形内角和，三角形外角的性质，对称的性质，熟知三角形的内角和等于$180°$是解答此题的关键．

4．(1)A和A'，B和B'，C和C'

(2)$\angle C' = 80°$

(3)直线m垂直平分线段AA'，BB'，CC'， $AA' \parallel BB' \parallel CC'$

(4)见解析

【分析】本题考查成轴对称的性质，全等三角形的性质等知识，解题的关键是掌握成轴对称的性质，把一个图形沿着某一条直线折叠，如果它能够与另一个图形重合，那么就说这两个图形关于这条直线对称，这条直线叫做对称轴．成轴对称的两个图形的性质： ①关于某条直线对称的两个图形形状相同，大小相等，是全等形； ②如果两个图形关于某条直线对称，则对称轴是任何一对对应点所连线段的垂直平分线； ③两个图形关于某条直线对称，如果它们的对应线段或延长线相交，那么它们的交点在对称轴上．

（1）根据成轴对称的性质求解即可；

（2）首先根据成轴对称的性质得到$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$，然后利用全等三角形的性质得到$\angle A' = \angle A = 32°$，然后利用三角形内角和定理求解即可；

（3）根据成轴对称的性质求解即可；

（4）根据成轴对称的性质求解即可．

【详解】（1）解：$\because \triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$关于直线m对称

$\therefore$对称点有A和A'，B和B'，C和C'．

（2）解：$\because \triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$关于直线m对称

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

在$\triangle A'B'C'$中，$\angle A' = \angle A = 32°$，

$\therefore \angle C' = 180° - \angle A' - \angle B' = 180° - 32° - 68° = 80°$．

（3）解：$\because \triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$关于直线m对称

$\therefore$直线m垂直平分线段AA'，BB'，CC'，$AA' \parallel BB' \parallel CC'$．

（4）解：$\because \triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$关于直线m对称

$\therefore$它们的交点在直线m上，其他对应线段（或其延长线）的交点也在直线m上．

规律：若两条线段关于直线m对称，且不平行，则它们的交点或它们的延长线的交点在对称轴m上．

5．(1) $30°$

(2) $\angle A = \frac{1}{2}(\angle 1 + \angle 2)$

【分析】（1）本题主要考查图形折叠的性质和三角形内角和定理，根据图形折叠的性质可得$\angle AED = \angle A'ED$，进而可得$2\angle AED = 180° - \angle 1$，可求得$\angle AED$的度数，同理可求得$\angle ADE$的度数，结合三角形内角和定理即可求得答案．

（2）本题主要考查图形折叠的性质和三角形内角和定理，根据图形折叠的性质可得$\angle AED = \angle A'ED$，进而可得$2\angle AED = 180° - \angle 1$，可求得$\angle AED = 90° - \frac{1}{2}\angle 1$，同理可求得$\angle ADE = 90° - \frac{1}{2}\angle 2$，结合三角形内角和定理即可求得答案．

【详解】（1）根据图形折叠的性质可知$\angle AED = \angle A'ED$，

$\therefore \angle AED + \angle A'ED = 2\angle AED = 180° - \angle 1 = 155°$．

$\therefore \angle AED = 77.5°$．

同理可得$\angle ADE = 72.5°$．

$\therefore \angle A = 180° - \angle AED - \angle ADE = 180° - 77.5° - 72.5° = 30°$．

（2）$\angle A=\frac{1}{2}(\angle 1+\angle 2)$，理由如下：

根据图形折叠的性质可知$\angle AED=\angle A'ED$，

$\therefore \angle AED+\angle A'ED=2\angle AED=180°-\angle 1$．

$\therefore \angle AED=\frac{180°-\angle 1}{2}=90°-\frac{1}{2}\angle 1$．

同理可得$\angle ADE=90°-\frac{1}{2}\angle 2$．

$\therefore \angle A=180°-\angle AED-\angle ADE=180°-\left(90°-\frac{1}{2}\angle 1\right)-\left(90°-\frac{1}{2}\angle 2\right)=\frac{1}{2}(\angle 1+\angle 2)$．

6．（1）详见解析（2）123°（3）①$\angle Q=(1-n)(\beta-\alpha)$，$\angle Q=(1-n)(\beta+\alpha)$，

$\angle Q=(1-n)(\alpha-\beta)$

【分析】本题考查了三角形内角和，角平分线的定义，以及平行线的性质，分类讨论是解答本题的关键．

（1）由$\angle ABC$、$\angle ACB$的角平分线交于点P得$\angle PBC=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle PCB=\frac{1}{2}\angle ACB$，即$\angle PBC+\angle PCB=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)$，因为$\angle P=180°-(\angle PBC+\angle PCB)$，$\angle ABC+\angle ACB=180°-\angle A$，可证$\angle P=90°+\frac{1}{2}\angle A$；

（2）已知$\angle 1+\angle 2=132°$，可得$\angle AEP+\angle ADP$的度数，由于折叠，$\angle AED=\angle PED$，$\angle ADE=\angle PDE$，可得$\angle AED+\angle ADE$、$\angle A$的度数，因为$\angle BPC=90°+\frac{1}{2}\angle A$，可得$\angle BPC$的度数；

（3）点F在DE延长线上、点F在DE上、点F在ED延长线上三种情况讨论．

【详解】(1) 证明：$\because \angle ABC$、$\angle ACB$的角平分线交于点P，

$\therefore \angle PBC=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle PCB=\frac{1}{2}\angle ACB$，

$\therefore \angle PBC+\angle PCB=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)$，

$\because \angle P=180°-(\angle PBC+\angle PCB),\angle ABC+\angle ACB=180°-\angle A$，

$\therefore \angle P=180°-\left(90°-\frac{1}{2}\angle A\right)=90°+\frac{1}{2}\angle A$；

（2）$\because \angle 1+\angle 2=132°$，

$\therefore \angle AEP+\angle ADP=228°$，

$\because \triangle ABC$沿DE折叠使得点A与点P重合，

$\therefore \angle AED=\angle PED,\angle ADE=\angle PDE$，

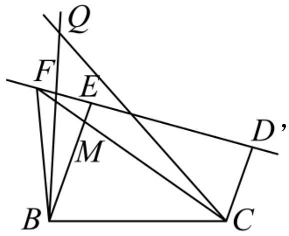
$\therefore \angle AED+\angle ADE=\frac{1}{2}\left(\angle AEP+\angle ADP\right)=114^\circ$，

$\therefore \angle A=180^\circ-\left(\angle AED+\angle ADE\right)=66^\circ$，

$\because \angle BPC=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A$，

$\therefore \angle P=123^\circ$；

（3）①点 F 在 DE 延长线上时，



，

$\because \angle FBQ=n\angle EBF, \angle FCQ=n\angle FCD$， $\angle EBF=\alpha$， $\angle DCF=\beta$，

$\therefore \angle FBQ=n\alpha$，即 $\angle QBE=\angle FBE-\angle FBQ=\alpha-n\alpha=\left(1-n\right)\alpha$，

$\because EB\ /\!/\ CD$，

$\therefore \angle BMC=\angle DCF=\beta$，

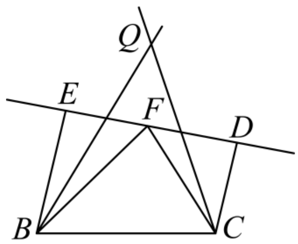
$\therefore \angle MBC+\angle MCB=180^\circ-\angle BMC=180^\circ-\beta$，

$\because \angle Q=180^\circ-\angle QBC-\angle QCB=180^\circ-\left(\angle QBE+\angle EBC\right)-\left(\angle QCF+\angle FCB\right)$

$=180^\circ-\angle QBE-\angle QCF-\left(\angle EBC+\angle FCB\right)$，

$\therefore \angle Q=180^\circ-\left(1-n\right)\alpha-n\beta-\left(180^\circ-\beta\right)=\left(1-n\right)\left(\beta-\alpha\right)$，

②点 F 在 DE 上时，



，

$\because \angle FBQ=n\angle EBF, \angle FCQ=n\angle FCD$， $\angle EBF=\alpha$， $\angle DCF=\beta$，

$\therefore \angle FBQ=n\alpha, \angle FCQ=n\beta$，

$\therefore \angle QBE=\angle FBE-\angle FBQ=\alpha-n\alpha=\left(1-n\right)\alpha$，

$\angle QCD=\angle FCD-\angle FCQ=\beta-n\beta=\left(1-n\right)\beta$，

$\because EB\ /\!/\ CD$，

$\therefore \angle EBC+\angle DCB=180^\circ$，

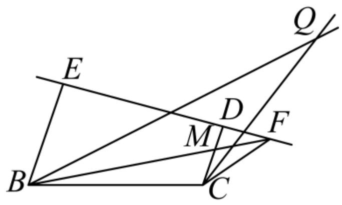
$\therefore \angle QBC+\angle QCB=\angle EBC+\angle DCB-\left(\angle QBE+\angle DCQ\right)=180^\circ-\left(\angle QBE+\angle DCQ\right)$

$=180^\circ-[\left(1-n\right)\alpha+\left(1-n\right)\beta]$，

$\because \angle Q=180^\circ-\left(\angle QBC+\angle QCB\right)$，

$\therefore \angle Q=\left(1-n\right)\left(\beta+\alpha\right)$，

③点 F 在 ED 延长线上时，



，

$\because \angle FBQ=n\angle EBF,\angle FCQ=n\angle FCD$， $\angle EBF=\alpha$， $\angle DCF=\beta$，

$\therefore \angle FBQ=n\alpha,\angle FCQ=n\beta$，即 $\angle QCD=\angle DCF-\angle FCQ=\beta-n\beta=\left(1-n\right)\beta$，

$\because EB\,/\!/\,CD$，

$\therefore \angle BMC=\angle EBF$，

$\therefore \angle MBC+\angle MCB=180^\circ-\angle BMC=180^\circ-\alpha$，

$\because \angle Q=180^\circ-\angle QBC-\angle QCB$

$=180^\circ-\left(\angle QBF+\angle FBC\right)-\left(\angle QCD+\angle DCB\right)$

$=180^\circ-\angle QBF-\angle QCD-\left(\angle FBC+\angle DCB\right)$，

$\therefore \angle Q=180^\circ-n\alpha-\left(1-n\right)\beta-\left(180^\circ-\alpha\right)=\left(1-n\right)\left(\alpha-\beta\right)$.

7．(1) $\angle 1=2\angle 2$

(2) $\angle 1+\angle 3=2\angle 2$，理由见解析

(3) $\angle 1=2\angle 2+\angle 3$

【分析】本题主要考查了图形的折叠变化及其性质、三角形外角的定义及性质，熟练掌握图形的折叠变化及其性质，灵活运用三角形的外角定理找出相关角之间的关系是解决问题的关键．

（1）由折叠的性质可得 $\angle C=\angle 2$，再根据三角形外角的定义及性质可得 $\angle 1=\angle C+\angle 2=2\angle 2$，即可得解；

（2）由三角形外角的定义及性质可得 $\angle 1=\angle DCC'+\angle DC'C$，$\angle 3=\angle ECC'+\angle EC'C$，从而得

到 $\angle 1+\angle 3=\angle DCE+\angle DC'E$，由折叠的性质可得 $\angle DCE=\angle DC'E=\angle 2$，即可得解；

（3）由三角形外角的定义及性质可得 $\angle EHD=\angle 2+\angle 3$，$\angle 1=\angle C+\angle EHD$，从而得到 $\angle 1=\angle C+\angle 2+\angle 3$，由折叠的性质可得 $\angle C=\angle 2$，即可得解.

【详解】（1）解：当点 C' 落在 AC 上时，如图 1 所示：

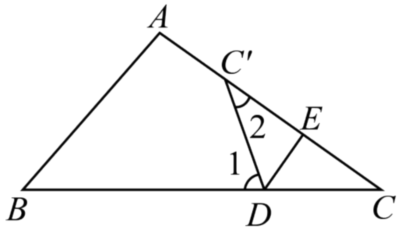


图1

由折叠的性质可知：$\angle C=\angle 2$，

由三角形的外角定理得：$\angle 1=\angle C+\angle 2=2\angle 2$；

故答案为：$\angle 1=2\angle 2$.

（2）解：当 C' 点落在 CA 和 CB 之间时，连接 CC'，如图 2 所示：

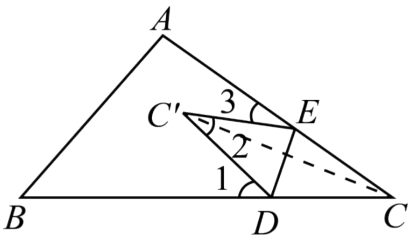


图2

则 $\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$ 之间的关系是：$\angle 1+\angle 3=2\angle 2$，

理由如下：

由三角形的外角定理得：$\angle 1=\angle DCC'+\angle DC'C$，$\angle 3=\angle ECC'+\angle EC'C$，

$\therefore \angle 1+\angle 3=\angle DCC'+\angle DC'C+\angle ECC'+\angle EC'C$，即 $\angle 1+\angle 3=\angle DCE+\angle DC'E$，

由折叠的性质可知：$\angle DCE=\angle DC'E=\angle 2$，

$\therefore \angle 1+\angle 3=2\angle 2$；

（3）解：当 C' 落在 CB，CA 的同旁时，设 $C'D$ 与 AC 交于点 H，如图 3 所示：

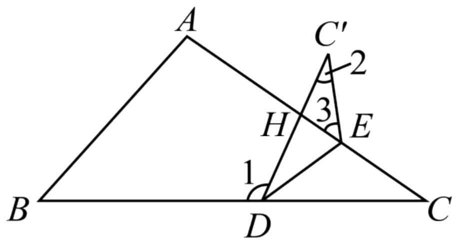


图3

则$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$之间的关系是：$\angle 1=2\angle 2+\angle 3$，

理由如下：

$\because \angle EHD$是$\triangle C'HE$的一个外角，

$\therefore \angle EHD=\angle 2+\angle 3$，

$\because \angle 1$是$\triangle CHD$的一个外角，

$\therefore \angle 1=\angle C+\angle EHD$，即$\angle 1=\angle C+\angle 2+\angle 3$，

由折叠的性质可知：$\angle C=\angle 2$，

$\therefore \angle 1=2\angle 2+\angle 3$.

8．[问题背景]$105°$；[变式运用]见解析

【分析】本题考查翻折变换的性质，全等三角形的性质，三角形外角的性质，解题的关键是：[问题背景]问题①根据折叠的性质可得$\triangle ACD\cong\triangle AC'D$，继而得到$\angle CAD=40°$，再根据三角形外角的性质可得结论；

[变式运用]利用①的方法，将$\triangle ABC$沿折痕AD翻折，点C的对应点为点C'，可得$\triangle AC'D\cong\triangle ACD$，根据全等三角形的性质可得$\angle AC'D=\angle C$，再根据三角形外角的性质即可得证.

【详解】解：[问题背景]$\because \triangle ABC$沿折痕AD翻折，$\angle BAC=80°$，$\angle C=65°$，

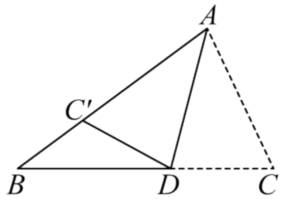
$\therefore \triangle ACD\cong\triangle AC'D$，

$\therefore \angle CAD=\angle C'AD=\dfrac{1}{2}\angle BAC=\dfrac{1}{2}\times 80°=40°$，

$\therefore \angle ADB=\angle CAD+\angle C=40°+65°=105°$，

$\therefore \angle ADB$的度数为$105°$；

[变式运用]证明：如图，$\triangle ABC$沿折痕AD翻折，点C的对应点为点C'，



$\because AB > AC$，

$\therefore$点C'落在AB边上，

$\therefore \triangle AC'D \cong \triangle ACD$，

$\therefore \angle AC'D = \angle C$，

$\because \angle AC'D = \angle B + \angle BDC' > \angle B$，

$\therefore \angle C > \angle B$.

9．(1)猜想：$\angle FEG = 90°$，见解析

(2)①当点B落在$\angle A'EG$内部时，$\angle FEG = 90° + \frac{x}{2}$，当点$B$落在$\angle A'EF$内部时，$\angle FEG = 90° - \frac{x}{2}$；②可能，当点$B$落在$\angle A'EG$内部时，$\angle FEG = \left(\frac{720}{7}\right)°$；当点$B$落在$\angle A'EF$内部时，$\angle FEG = 80°$

【分析】（1）利用翻折变换的性质和角的计算即可；

（2）①根据已知条件，分两种情况：当点B落在$\angle AEG$内部时，当点B落在$\angle A'EF$内部时，做出草图，通过角的和差计算即可；

②假设EB'能平分$\angle FEG$，分两种情况：当点B落在$\angle AEG$内部时，当点B落在$\angle A'EF$内部时，做出草图，通过角平分线的性质和①计算即可.

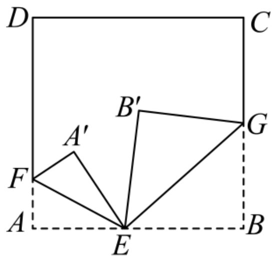
【详解】（1）解：猜想：$\angle FEG = 90°$.

$\because \angle AEA' + \angle A'EB = 180°$，

由折叠可知，$\angle AEF = \angle A'EF$，$\angle B'EG = \angle GEB$，

$\therefore \angle FEA' + \angle A'EG = \angle FEG = 90°$.

（2）①如图，当点B落在$\angle AEG$内部时，



$\because \angle A'EB' = \frac{1}{4}\angle B'EB$， $\angle A'EB' = x$， $\angle B'EG = \angle GEB = \frac{1}{2}\angle B'EB$，

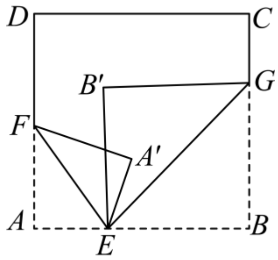
则 $\angle B'EB = 4x$， $\angle B'EG = 2x$，

$\therefore \angle FEA' = \frac{1}{2}\angle AEA' = \frac{180° - (\angle A'EB' + \angle B'EB)}{2} = 90° - \frac{5}{2}x$，

$\therefore \angle FEG = \angle FAA' + \angle A'EB' + \angle B'EG = 90° - \frac{5}{2}x + x + 2x$，

$\therefore \angle FEG = 90° + \frac{1}{2}x$；

如图，当点 B 落在 $\angle A'EF$ 内部时，



$\because \angle A'EB' = \frac{1}{4}\angle B'EB$， $\angle A'EB' = x$， $\angle B'EG = \angle GEB = \frac{1}{2}\angle B'EB$，

则 $\angle B'EB = 4x$， $\angle B'EG = \angle BEG = 2x$，

$\therefore \angle AEA' = 180° - \angle A'EB = 180° - (\angle B'EB - \angle A'EB) = 180° - 3x$，

$\therefore \angle AEF = \frac{1}{2}\angle AEA' = 90° - \frac{3}{2}x$，

$\therefore \angle FEG = 180° - \angle BEG - \angle AEF = 90° - \frac{x}{2}$.

综上所述，当点 B 落在 $\angle A'EG$ 内部时， $\angle FEG = 90° + \frac{1}{2}x$，当点 B 落在 $\angle A'EF$ 内部时，

$\angle FEG = 90° - \frac{x}{2}$；

②可能．

由①知，当点 B 落在 $\angle AEG$ 内部时，

若 EB' 平分 $\angle FEG$，此时， $\angle B'EG = \angle FEB'$， $\angle FEB' = \angle FEA' + \angle A'EB' = 90° - \frac{5x}{2} + x$，

$\angle B'EG = 2x$，

即 $2x = \frac{180° - 5x}{2} + x$，

解得： $x = \frac{180°}{7}$，

$\therefore \angle FEG = 90° + \frac{1}{2}x = \frac{720°}{7}$；

当点 B 落在 $\angle A'EF$ 内部时，$\angle FEG=90^\circ-\dfrac{x}{2}$，

$\because EB$ 平分 $\angle FEG$，

$\therefore \angle B'EG=\dfrac{1}{2}\angle FEG$，

即 $2x=\dfrac{1}{2}\left(90^\circ-\dfrac{1}{2}x\right)$，

解得：$x=20^\circ$，

$\therefore \angle FEG=90^\circ-\dfrac{1}{2}x=90^\circ-\dfrac{1}{2}\times 20=80^\circ$

综上所述：当点 B 落在 $\angle A'EG$ 内部时，$\angle FEG=\left(\dfrac{720}{7}\right)^\circ$；当点 B 落在 $\angle A'EF$ 内部时，$\angle FEG=80^\circ$.

【点睛】考查了翻折变换的性质、角的计算等知识，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题，学会利用翻折不变性解决问题.

10．D

【分析】本题考查了角平分线性质，三角形全等的判定与性质以及尺规作图，掌握以上知识点是解题的关键.

观察作图痕迹，知道 AD 是 $\angle CAB$ 的角平分线，$DE\perp AB$，根据角平分线的性质结合 $\angle ACB=90^\circ$，证明 $Rt\triangle ACD\cong Rt\triangle AED$，推出 $CD=DE$，$AC=AE$，那么 $DE+DB=CD+BD=BC=AC=AE$，从而推出 $\triangle BDE$ 的周长.

【详解】由作图痕迹，知道 AD 是 $\angle CAB$ 的角平分线，且 $DE\perp AB$

$\because$ AD 是 $\angle CAB$ 的角平分线，$DE\perp AB$，$\angle ACB=90^\circ$

$\therefore CD=ED$

在 $Rt\triangle ACD$ 和 $Rt\triangle AED$ 中，$CD=ED$，$AD=AD$

$\therefore Rt\triangle ACD\cong Rt\triangle AED$

$\therefore AC=AE$

$\because CD=ED$，$AC=AE$，$AC=BC$

$\therefore DE+DB=CD+BD=BC=AC=AE$

$\therefore DE+DB+BE=AE+BE=AB$

$\because AB=6$

$\therefore \triangle DEB$ 的周长为 6

故选 D.

11．C

【分析】本题主要考查作图-基本作图、线段的垂直平分线、角平分线等知识点，读懂图象信息、灵活运用所学知识是解题的关键.

由作图可知BE平分$\angle ABC$，DF垂直平分线段AB，再根据线段的垂直平分线的性质判断即可.

【详解】解：由作图可知：BE平分$\angle ABC$，DF垂直平分线段AB，

$\therefore \angle ABE=\angle EBC, FB=FA$，

$\therefore \angle BAF=\angle ABE$，

$\therefore \angle BAF=\frac{1}{2}\angle ABC$，故选项C正确.

故选：C.

12．70

【分析】本题考查了尺规作图的知识，解题的关键是根据作图痕迹得到AD平分$\angle CAB$.

首先根据作图痕迹得到AD平分$\angle CAB$，然后利用三角形外角的性质求得$\angle CDA$的度数即可.

【详解】解：$\because \angle B=50°, \angle C=90°$，

$\therefore \angle CAB=40°$，

观察作图痕迹知：AD平分$\angle CAB$，

$\therefore \angle DAB=20°$，

$\therefore \angle ADC=50°+20°=70°$，

故答案为：70.

13．$25°$##25度

【分析】本题主要考查线段垂直平分线的性质、角平分线的定义、三角形内角和定理等知识点，熟练掌握线段垂直平分线的性质、角平分线的定义是解答本题的关键.

由题可得，直线DF是线段AB的垂直平分线，AE为$\angle DAC$的平分线，再根据线段垂直平分线的性质、角平分线的定义以及三角形内角和定理求解即可.

【详解】解：由题可得，直线DF是线段AB的垂直平分线，AE为$\angle DAC$的平分线，

$\therefore AD=BD, \angle DAE=\angle CAE$，

$\therefore \angle B=\angle BAD=40°$，

$\therefore \angle ADC=\angle B+\angle BAD=80°$，

$\because \angle C=50°$，

$\therefore \angle DAC = 180° - 80° - 50° = 50°$，

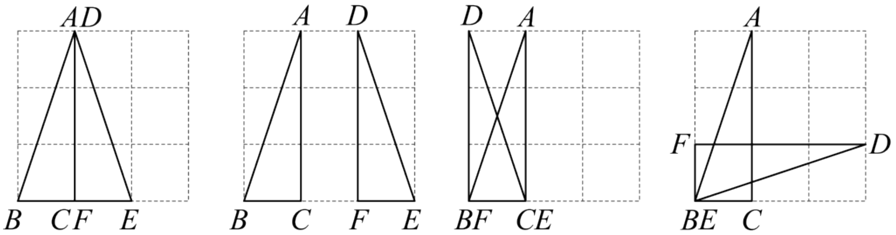
$\therefore \angle DAE = \angle CAE = \frac{1}{2}\angle DAC = 25°$，

故答案为：$25°$．

14．图见解析

【分析】本题考查了利用轴对称图形的定义设计图案，熟知概念是解题的关键．根据网格结构分别确定不同的对称轴，然后作出轴对称三角形即可．

【详解】解：如图，$\triangle DEF$ 即为所求作：



15．(1)作图见解析

(2)作图见解析

(3)作图见解析

【分析】本题主要考查了利用轴对称设计图案，熟练利用轴对称图形的性质得出是解题关键．

（1）根据图形是一个轴对称图形，且有 4 条对称轴，进而得出结合轴对称图形的性质得出；

（2）去掉一行上的左右两粒棋子即可符合要求的答案；

（3）根据题意可以去掉 8 个棋子，进而得出答案．

【详解】（1）解：如图 2 所示：

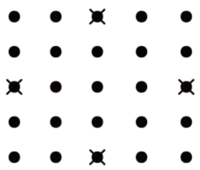


图2

（2）解：如图 3 所示：

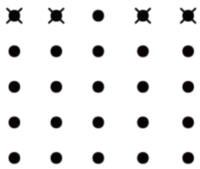


图3

（3）解：如图 4 所示：

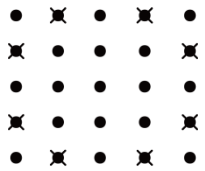


图4

16．(1)①图甲中阴影部分构成的图案是轴对称图形，有 4 条对称轴；②4

(2)见解析

【分析】本题考查了利用轴对称设计图案的知识，同时考查了学生的动手实践能力和逻辑思维能力．

（1）观察图形即可得出答案．

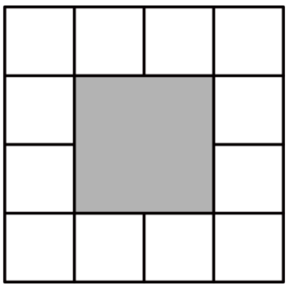
（2）根据轴对称图形的定义及特点即可设计出满足条件的图形．

【详解】（1）解：①图甲中阴影部分构成的图案是轴对称图形，有 4 条对称轴．

②∵每个小正方形的边长都是 1，

∴图甲中阴影部分的面积$=8\times\frac{1}{2}\times1\times1=4$．

（2）所设计图形如下所示：（答案不唯一）



17． 50°或80°

【分析】本题考查了等腰三角形的性质，根据已知角为顶角和底角，分类讨论即可求解，掌握知识点的应用是解题的关键．

【详解】解：由题意知，分两种情况：

（1）当这个80°的角为顶角时，则底角$=\left(180^\circ-80^\circ\right)\div2=50^\circ$；

（2）当这个80°的角为底角时，则另一底角也为80°；

故答案为：50°或80°．

18．17

【分析】本题考查等腰三角形的性质，三角形三边关系，解题的关键是分类讨论等腰三角形的腰长．

因为等腰三角形的两边分别为3cm和7cm，但没有明确哪是底边，哪是腰，所以有两种情况，需要分类讨论，再根据三角形三边关系进行判断，最后将三边相加即可．

【详解】解：当等腰三角形的腰长为3cm时，其底边长为7cm，两条腰长均为3cm，

$\because 3+3<7$

$\therefore$3cm，3cm，7cm不可以构成三角形；

当等腰三角形的腰长为7cm时，其底边长为3cm，两条腰长均为7cm，

$\because 7+3>7$

$\therefore$3cm，7cm，7cm可以构成三角形，

$\therefore$等腰三角形的周长为：$7+7+3=17$，

故答案为：17．

19．8cm或6cm

【分析】设腰$AB=AC=2x$cm，底边$BC=y$cm，根据题意，分类表示周长，构造方程组解答，结合三角形的存在性，判断取舍解答即可．

【详解】解：设腰$AB=AC=2x$cm，底边$BC=y$cm，

$\because$一腰上的中线将它的周长分成9cm和12cm两部分，

$\therefore \begin{cases}2x+x=9\\x+y=12\end{cases}$或$\begin{cases}2x+x=12\\x+y=9\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}x=3\\y=9\end{cases}$或$\begin{cases}x=4\\y=5\end{cases}$，

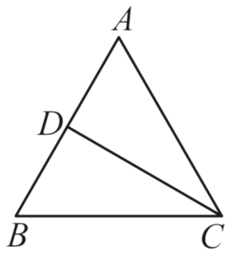
$\therefore$等腰三角形的三边长分别为6cm，6cm，9cm或8cm，8cm，5cm

$\because 6+6>9, 5+8>8$，

$\therefore$两种情况下，三角形都存在，

$\therefore$等腰三角形的腰长为8cm或6cm，

故答案为：8cm或6cm．



【点睛】此题主要考查了中线定义，等腰三角形的性质和三角形的三边关系；题目从边的方面考查三角形，涉及分类讨论的思想方法．列出方程组是正确解答本题的关键．

20．4 或 5##5 或 4

【分析】本题考查了等腰三角形的定义，三角形三边关系定理的应用．分腰长为 4 和底边长为 4 两种情况，分别利用三角形三边关系定理进行验证即可．

【详解】解：分情况讨论：

①若腰长为 4，则底边长为$14-4-4=6$，

$\because 4+4=8>6$，

∴此时能构成三角形；

②若底边长为 4，则腰长为$\frac{14-4}{2}=5$，

$\because 4+5=9>5$，

∴此时能构成三角形；

综上分析可知：此等腰三角形的腰长为 4 或 5．

故答案为：4 或 5．

21．130°或50°

【分析】本题考查了直角三角形的性质，等腰三角形的分类讨论问题，解题的关键是能够画出图形，根据数形结合的思想求出答案．根据题意可知等腰三角形需要分类讨论，分为锐角三角形和钝角三角形，画出图形解答即可．

【详解】解：①如图1所示，当等腰三角形是锐角三角形时，根据题意，$\angle ABM=40^\circ$，

又$\because BM$是AC边上的高，

$\therefore \angle AMB=90^\circ$，

$\therefore \angle A=90^\circ-40^\circ=50^\circ$，

②如图2，当等腰三角形是钝角三角形时，根据题意，$\angle DEN=40^\circ$，

$\because EN$是DF边上的高

$\therefore \angle N=90^\circ$，

$\therefore \angle EDN=90^\circ-40^\circ=50^\circ$，

$\therefore \angle EDF=180^\circ-50^\circ=130^\circ$

故顶角为：130°或50°．

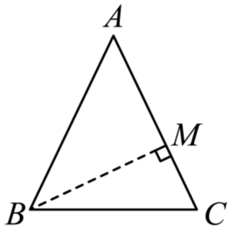


图1

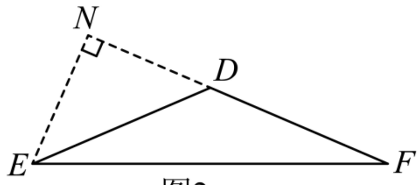


图2

22．$\frac{9}{7}$

【分析】本题考查了等腰三角形的定义、三角形三边关系、一元一次方程的应用，分三种情况，根据题意列出一元一次方程，解方程即可得出答案，熟练掌握以上知识点并灵活运用是解此题的关键．

【详解】解：分三种情况讨论：

①若两腰长分别为$3x$和$2x+5$，则$3x=2x+5$，解得$x=5$，

$\therefore$腰长为$3x=15$，

$\because$等腰三角形的周长为13，

故此时不符合题意，舍去；

②若腰长为$3x$，底边长为$2x+5$，则$6x+2x+5=13$，解得$x=1$，

$\therefore 3x=3$，$2x+5=7$，此时三角形三条边为3，3，7，不满足三角形三边关系，故不符合题意，舍去；

③若底边长为$3x$，腰长为$2x+5$，则$3x+2(2x+5)=13$，解得$x=\frac{3}{7}$，

$\therefore 3x=\frac{9}{7}$，$2x+5=5\frac{6}{7}$，此时三角形三边长为$\frac{9}{7}$，$5\frac{6}{7}$，$5\frac{6}{7}$，满足三角形三边关系，符合题意；

综上所述，底边长为$\frac{9}{7}$，

故答案为：$\frac{9}{7}$．

23．(1)见解析

(2)成立，见解析

【分析】本题重点考查了三角形全等的判定与性质，等腰三角形的性质与判定；证明两个三角形全等是解答本题的关键．

（1）已知$AB=AC$，$AD\perp BC$，由等腰三角形的性质得$BC=2BD$，继而推出$\angle EAH=\angle ECB$，再由$\angle BAC=45°$及CE是高，可得$AE=CE$，证明$\triangle AEH\cong\triangle CEB$即可．

（2）已知 $AB=AC$，$AD\perp BC$，由等腰三角形的性质得 $BC=2BD$，继而推出 $\angle H=\angle B$，再由 $\angle BAC=135°$ 及 CE 是高，可得 $\angle ACE=\angle CAE=45°$，进而有 $AE=CE$，证明 $\triangle AEH\cong\triangle CEB$ 即可．

【详解】（1）证明：$\because AB=AC$，$AD\perp BC$，

$\therefore BC=2BD$；

$\because AD$ 和 CE 是高，

$\therefore \angle CDH=\angle AEH=90°$；

$\because \angle AHE=\angle DHC$，

$\therefore \angle EAH=\angle ECB$；

$\because \angle BAC=45°$，CE 是高，

$\therefore \angle AEH=\angle CEB=90°$，$\angle ECA=\angle BAC=45°$，

$\therefore AE=CE$，

在 $\triangle AEH$ 与 $\triangle CEB$ 中，

$$\begin{cases}\angle EAH=\angle ECB\\ \angle AEH=\angle CEB\\ AE=CE\end{cases},$$

$\therefore \triangle AEH\cong\triangle CEB(\mathrm{AAS})$，

$\therefore AH=BC$；

$\therefore AH=2BD$；

（2）解：仍有 $AH=2BD$；

证明如下：

$\because AB=AC$，$AD\perp BC$，

$\therefore BC=2BD$；

$\because AD$ 和 CE 是高，

$\therefore \angle BDH=\angle AEH=90°$；

$\because \angle HAE=\angle DAB$，

$\therefore \angle H=\angle B$；

$\because \angle BAC=135°$，CE 是高，

$\therefore \angle AEH=\angle CEB=90°$，$\angle ACE=\angle CAE=45°$，

$\therefore AE=CE$，

在$\triangle AEH$与$\triangle CEB$中，

$$\begin{cases}\angle H=\angle B\\ \angle AEH=\angle CEB\\ AE=CE\end{cases},$$

$\therefore \triangle AEH\cong\triangle CEB(\text{AAS})$，

$\therefore AH=BC$；

$\therefore AH=2BD$；

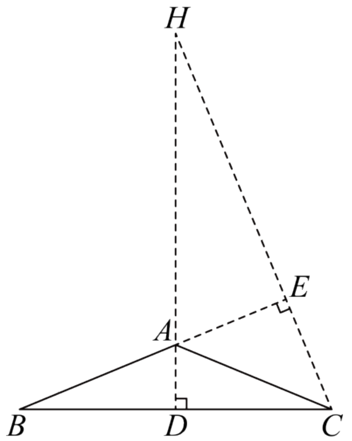


图2

24.（1）45，40；（2）见解析；（3）①$\alpha+\beta=2\angle ACB-180°$；②90°

【分析】（1）利用三角形外角，等腰三角形的判定与性质进行计算即可；

（2）利用三角形和轴对称图形的知识进行证明即可；

（3）①由三角形外角得$\angle EMC=\angle ACD-\angle MBC$，$\angle FNC=\angle BCD-\angle MFC$，故$\alpha+\beta=(\angle ACD+\angle BCD)-(\angle MEC+\angle NFC)$，即$\alpha+\beta=\angle ACB-(\angle A+\angle B)$，再换算即可.

②由三角形外角得$\angle ACD=\angle MED-\angle CME$，$\angle DCB=\angle CNF+\angle NPC$，故$\angle ACD+\angle DCB=\angle MED-\angle CME+\angle CNF+\angle NFC$，又$\alpha=\beta$，再换算即可.

【详解】解：问题解决（1）$\because \angle ADC=\angle BDC=90°$，若点$E$恰好与点$C$重合，

$\therefore AD=DC$，$\angle ADC=90°$

$\therefore \triangle ADC$为等腰直角三角形，

$\therefore \angle A=45°$；

$\because \angle A=45°$，$\angle B=65°$，

$\therefore \angle ACB=180°-45°-65°=70°$，

$\because \angle ACD=45°$

$\therefore \angle BCD = 70° - 45° = 25°$

$\because \angle DFN = \angle B = 65°$

$\therefore \angle CNF = \angle DFN - \angle DCB = 65° - 25° = 40°$，

故答案为：45，40；

（2）$\because \angle ACB + \angle A + \angle B = 180°$，

$\therefore \angle A + \angle B = 180° - \angle ACB$．

$\because \angle MED$ 是 $\triangle CEM$ 的外角，

$\therefore \angle MED = \angle ACD + \alpha$，

$\therefore \alpha = \angle MED - \angle ACD$．

又由折叠可知，$\angle MED = \angle A$，

$\therefore \alpha = \angle A - \angle ACD$．

同理：$\beta = \angle B - \angle BCD$．

$\therefore \alpha + \beta = \angle A + \angle B - \angle ACD - \angle BCD$．

$= 180° - \angle ACB - \angle ACB$，

即 $\alpha + \beta = 180° - 2\angle ACB$．

迁移应用（3）①$\alpha + \beta = 2\angle ACB - 180°$，

理由：

$\because \angle EMC = \angle ACD - \angle MBC$，$\angle FNC = \angle BCD - \angle MFC$，

$\therefore \angle EMC + \angle FNC = \angle ACD - \angle MEC + \angle BCD - \angle NFC$，

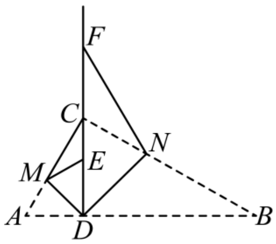
$\therefore \alpha + \beta = \left(\angle ACD + \angle BCD\right) - \left(\angle MEC + \angle NFC\right)$，

即 $\alpha + \beta = \angle ACB - \left(\angle A + \angle B\right)$，

$\therefore \alpha + \beta = \angle ACB - \left(180° - \angle ACB\right)$，

$\therefore \alpha + \beta = 2\angle ACB - 180°$．

②如图：



$\because \angle ACD = \angle MED - \angle CME$，$\angle DCB = \angle CNF + \angle NPC$，

$\therefore \angle ACD + \angle DCB = \angle MED - \angle CME + \angle CNF + \angle NFC$，

$\because \alpha=\beta$，

$\therefore \angle ACD+\angle DCB=\angle A+\angle B$，

$\angle ACB=\angle A+\angle B$，

又 $\angle ACB+\angle A+\angle B=180°$，

$\therefore \angle ACB=90°$．

故答案为：$90°$．

【点睛】本题考查了翻折变换（折叠问题），轴对称图形，三角形外角性质，三角形内角和，等腰三角形的判定与性质，利用对称是解答关键．

25．（1）见解析；（2）$AP+EP=BP$，理由见解析；（3）$\frac{5}{2}$

【分析】（1）由题意易证 $\triangle ACP\cong\triangle AEP(\text{SSS})$，得出 $\angle ACP=\angle E$，即得出 $\angle ACP=\angle ABE$，从而得出 $\angle BPC=\angle BAC$；

（2）在 BP 上取点 G，使 $PG=PC$，连接 GC，易证 $\triangle GPC$ 和 $\triangle ABC$ 为等边三角形，从而可证 $\triangle BCG\cong\triangle ACP(\text{SAS})$，得出 $BG=AP$，进而得出 $BP=BG+GP=AP+EP$；

（3）延长 BA，CP 交于点 H，易证 $\triangle HBP\cong\triangle CBP(\text{ASA})$，得出 $CP=HP=\frac{1}{2}CH$．再证明 $\triangle BAD\cong\triangle CAH(\text{ASA})$，得出 $BD=CH=2CP$，从而即可求解．

【详解】解：（1）证明：$\because AB=AC$，$AB=AE$，

$\therefore AC=AE$，$\angle ABE=\angle E$．

又 $\because CP=EP$，$AP=AP$，

$\therefore \triangle ACP\cong\triangle AEP(\text{SSS})$，

$\therefore \angle ACP=\angle E$，

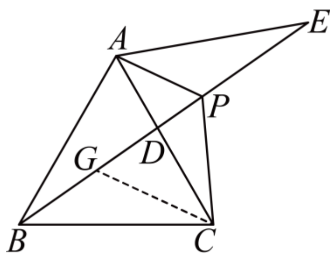
$\therefore \angle ACP=\angle ABE$．

$\because \angle ADB=\angle CDP$，

$\therefore \angle BPC=\angle BAC$；

（2）$AP+EP=BP$，理由如下，

如图，在 BP 上取点 G，使 $PG=PC$，连接 GC．



$\because \angle BAC = 60^\circ$，

$\therefore \angle BPC = 60^\circ$，

$\therefore \triangle GPC$ 为等边三角形，

$\therefore PG = PC = CG$．

$\because AB = AC$，

$\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形，

$\therefore \angle ACB = \angle GCP = 60^\circ$，

$\therefore \angle ACB - \angle ACG = \angle GCP - \angle ACG$，即 $\angle BCG = \angle ACP$．

又 $\because BC = AC$，$GC = PC$，

$\therefore \triangle BCG \cong \triangle ACP(\text{SAS})$，

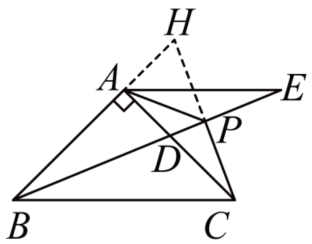
$\therefore BG = AP$．

$\because EP = CP$

$\therefore EP = GP$，

$\therefore BP = BG + GP = AP + EP$；

（3）解：延长 BA，CP 交于点 H，如图，



$\because \angle BPC = \angle BAC = 90^\circ$，

$\therefore \angle BPC = \angle BPH = 90^\circ$．

$\because BD$ 平分 $\angle ABC$，

$\therefore \angle ABP = \angle CBP$．

又 $\because BP = BP$，