2022-2023 学年第二学期高二年级期中考试

理科数学

本试卷共 4 页，全卷满分 150 分，考试时间 120 分钟.

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知复数 z 满足 $z(1+\mathrm{i})=2$，则 $\overline{z}$ 的虚部为（　　）

A. 1　　B. -1　　C. i　　D. $-\mathrm{i}$

【答案】A

【解析】

【分析】化简 $z=1-\mathrm{i}$，再求出 $\overline{z}=1+\mathrm{i}$ 即得解.

【详解】由 $z(1+\mathrm{i})=2$，得 $z=\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{2(1-\mathrm{i})}{1^2-\mathrm{i}^2}=1-\mathrm{i}$，从而 $\overline{z}=1+\mathrm{i}$，所以 $\overline{z}$ 的虚部为 1.

故选：A

2. 已知集合 $A=\left\{x|\ x^2-x-2<0\right\},B=\left\{y|\ y=x^2,x\in A\right\}$，则 $A \cap B=$（　　）

A. $(0,2)$　　B. $[0,2)$　　C. $(1,4)$　　D. $[1,4)$

【答案】B

【解析】

【分析】先求出集合 A,B，再由交集的定义求解即可.

【详解】因为 $x^2-x-2<0$，所以 $(x+1)(x-2)<0$，即 $-1<x<2$，

所以 $A=\{x|-1<x<2\}$，

因为 $y=x^2,x\in A$，所以当 $x=0,y_{\min}=0$，

当 $x=2,y=4$，所以 $0\le y<4$，

$\therefore B=\{y|0\le y<4\},\therefore A\cap B=[0,2)$.

故选：B.

3. 已知 $f(x)=2\ln x+ax^2-3x$ 在 $x=2$ 处取得极小值，则 a 的值为（　　）

A. 2　　B. $\frac{1}{2}$　　C. -2　　D. $-\dfrac{1}{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】求导，然后通过 $f'(2)=0$ 求出 a 的值，再代入原导函数验证在 $x=2$ 处取得极小值即可.

【详解】由已知 $f'(x)=\dfrac{2}{x}+2ax-3$， $x>0$，

$\therefore f'(2)=1+4a-3=0$，得 $a=\dfrac{1}{2}$，

此时 $f'(x)=\dfrac{2}{x}+x-3=\dfrac{x^2-3x+2}{x}=\dfrac{(x-1)(x-2)}{x}$， $x>0$，

令 $f'(x)>0$，得 $0<x<1$ 或 $x>2$，

令 $f'(x)<0$，得 $1<x<2$，

故 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，

故 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极小值，符合题意.

则 a 的值为 $\frac{1}{2}$.

故选：B.

4. 将函数 $y=\sin 2x(x\in\mathrm{R})$ 的图象上所有的点向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度，再把所得图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍（纵坐标不变），得到的图象所表示的函数是（　　）

A. $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right),x\in\mathrm{R}$　　B. $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right),x\in\mathrm{R}$

C. $y=\sin\left(4x+\dfrac{\pi}{6}\right),x\in\mathrm{R}$　　D. $y=\sin\left(4x+\dfrac{\pi}{3}\right),x\in\mathrm{R}$

【答案】D

【解析】

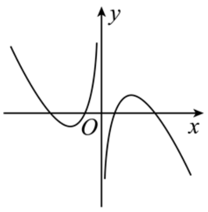
【分析】根据三角函数图象变换规律求解即可

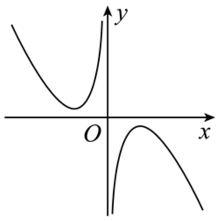
【详解】将函数 $y=\sin 2x(x\in\mathbf{R})$ 的图象上所有的点向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度，所得图象表示的函数是 $y=\sin\left[2\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\right]=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)(x\in\mathbf{R})$，

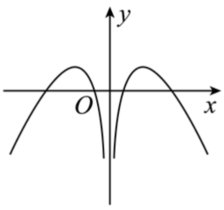
再把 $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)(x\in\mathbf{R})$ 图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍（纵坐标不变），得到的图象所表示的函数是 $y=\sin\left(4x+\dfrac{\pi}{3}\right)(x\in\mathbf{R})$.

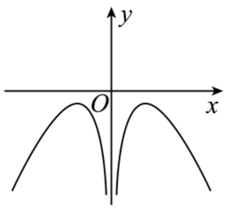
故选：D

5. 函数 $y=\ln|x|-\dfrac{1}{2}x^2$ 的图像大致为（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】D

【解析】

【分析】先求函数的定义域，然后判断函数的奇偶性，再判断单调性即可得答案.

【详解】解：函数的定义域为 $\{x|x\neq 0\}$，

因为 $y=\ln|x|-\dfrac{1}{2}x^2$ 是偶函数，所以图像关于 y 轴对称，所以排除 AB

又 $x>0$ 时，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-x=\dfrac{1-x^2}{x}$，

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$，当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$，

所以函数在 $(0,1)$ 上递增，在 $(1,+\infty)$ 上递减，

因为 $f(x)\leq f(1)=-\dfrac{1}{2}<0$，所以排除 C

故选：D.

【点睛】此题考查了函数图像的识别，考查了函数的性质，属于基础题.

6. 甲、乙、丙、丁 4 名学生参加数学竞赛，在成绩公布前，4 人作出如下预测：甲说：乙第一；乙说：丁第一；丙说：我不是第一；丁说：乙第二.公布的成绩表明，4 名学生的成绩互不相

同，并且有且只有 1 名学生预测错误，则预测错误的学生是（　　）

A. 甲　　B. 乙　　C. 丙　　D. 丁

【答案】A

【解析】

【分析】分别假设甲、乙、丙、丁的预测错误，看能否推出与题意相矛盾的情况，即可判断答案.

【详解】若甲预测错误，则其余三人预测正确，即丁第一，乙第二，丙第三或第四，甲第四或第三，符合题意；

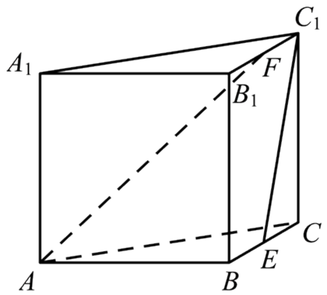
若乙预测错误，则其余三人预测正确，则甲和丁的预测相矛盾，这样有两人预测错误，不符合题意；

若丙预测错误，则其余三人预测正确，则甲和丁的预测相矛盾，这样有两人预测错误，不符合题意；

若丁预测错误，则其余三人预测正确，则甲和乙的预测相矛盾，这样有两人预测错误，不符合题意；

故选：A

7. 如图，在直棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=BC=CC_1$，$AB\perp BC$，E 为 BC 的中点，F 为 B_1C_1 的中点，则异面直线 AF 与 C_1E 所成角的正弦值为（　　）



A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

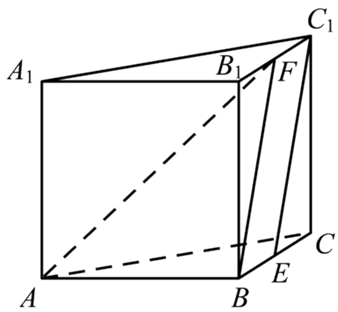
【答案】B

【解析】

【分析】连接 BF，证明 $BF//C_1E$，在 $\triangle ABF$ 中计算即可作答.

【详解】在直棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，连接 BF，如图，因 E 为 BC 的中点，F 为 B_1C_1 的中点，

则$C_1F//BE, C_1F=BE$，



则四边形BEC_1F为平行四边形，即有$BF//C_1E$，因此$\angle AFB$是异面直线AF与C_1E所成角或其补角，

因$BB_1\perp$平面ABC，$AB\subset$平面ABC，则$AB\perp BB_1$，又$AB\perp BC$，$BB_1 \cap BC=B$，

$BB_1, BC\subset$平面BCC_1B_1，

即有$AB\perp$平面BCC_1B_1，$BF\subset$平面BCC_1B_1，即$AB\perp BF$，令$AB=2$，则$BF=\sqrt{5}, AF=3$，

所以异面直线AF与C_1E所成角的正弦值为$\sin\angle AFB=\dfrac{AB}{AF}=\dfrac{2}{3}$.

故选：B

8. 抛物线$y=x^2-x$与x轴围成的图形的面积为（　　）

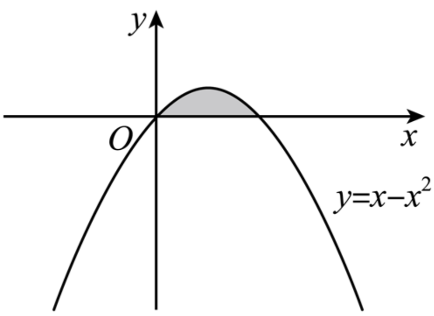
A. $\dfrac{1}{6}$　　B. $\dfrac{1}{3}$　　C. $\dfrac{2}{3}$　　D. 1

【答案】A

【解析】

【分析】根据题意，由定积分的运算，即可得到结果.

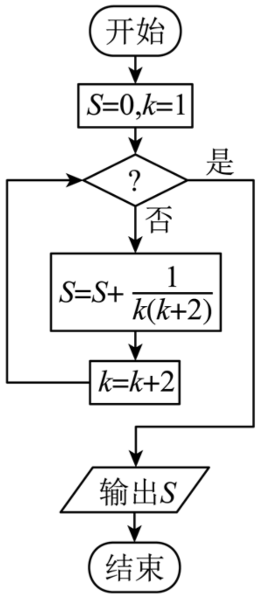
【详解】



$\because y=x^2-x$与x轴围成的图形在x轴下方，$\therefore$取该函数关于x轴对称的函数$y=x-x^2$在$[0,1]$上的积分$S=\int_0^1\left(x-x^2\right)\mathrm{d}x=\left(\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$.

故选：A

9. 若某程序框图如图所示，已知该程序运行后输出S的值是$\frac{5}{11}$，则判断框的条件可能是（　　）



A. $k\geq 9$　　B. $k>10$　　C. $k>11$　　D. $k>12$

【答案】B

【解析】

【分析】根据程序框图与数列裂项求和，即可得出判断框的条件.

【详解】由题意，

假设先执行若干次循环：$S=0$，$k=1$；$S=\frac{1}{1\times3}$，$k=3$；$S=\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}$，$k=5$，…，

$S=\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\frac{1}{7\times9}$，$k=9$；

$S=\frac{1}{1\times3}+\cdots+\frac{1}{9\times11}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)=\frac{5}{11}$，$k=11$；

结束循环，再分析选项，只有B符合题意，

故选：B.

10. 已知抛物线$y^2=20x$的焦点与双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的一个焦点重合，且抛物线的准线被双曲线截得的线段长为$\frac{9}{2}$，该双曲线的渐近线方程为（　　）

A. $y=\pm\frac{3}{4}x$　　B. $y=\pm\frac{4}{3}x$　　C. $y=\pm\frac{4}{5}x$　　D. $y=\pm\frac{5}{4}x$

【答案】A

【解析】

【分析】先由抛物线求出焦点和准线方程，利用双曲线与抛物线的关系列方程解出 a、b，求出渐近线方程.

【详解】抛物线 $y^2=20x$ 的焦点 $F(5,0)$,准线方程： $x=-5$.

∵抛物线 $y^2=20x$ 的焦点与双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一个焦点重合，且抛物线的准线被双曲线截得的线段长为 $\frac{9}{2}$，

∴ $\begin{cases}a^2+b^2=25\\ \frac{2b^2}{a}=\frac{9}{2}\end{cases}$ 解得： $\begin{cases}a=4\\ b=3\end{cases}$

∴双曲线的渐近线方程 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 为： $y=\pm\frac{3}{4}x$

故选：A

【点睛】求双曲线的渐近线的方法:直接令标准方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 中的 1 变成 0,得到 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$,利用平方差公式得到渐近线方程: $y=\pm\frac{bx}{a}$.

11. 将一个四棱锥的每个顶点染上一种颜色，使同一条棱的两端点异色，如果只有 5 种颜色可供使用，那么不同的染色种数是（　　）

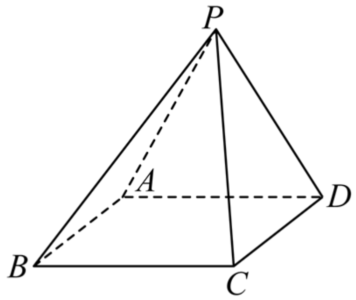
A. 300　　B. 360　　C. 420　　D. 480

【答案】C

【解析】

【分析】根据所需染颜色的个数进行分类讨论，最少需要 3 种，即 AC， BD 颜色相同，写出此时染色种数，需要 4 种时，即 AC， BD 中选一组使其颜色相同，写出染色种数，需要 5 种颜色时，写出染色种数，计算出最终结果即可.

【详解】解：画出四棱锥 $P-ABCD$ 如下：



最少需要 3 种颜色，即 AC，BD，P 各一种颜色，所以有 A_5^3 种可能，

当用 4 种颜色时，在 AC，BD 中选一组使其颜色相同，所以有 $\mathrm{C}_2^1\mathrm{A}_5^4$ 种可能，

当用 5 种颜色时，有 A_5^5 种可能，所以共 $\mathrm{A}_5^3+\mathrm{C}_2^1\mathrm{A}_5^4+\mathrm{A}_5^5=420$ 种可能.

故选：C

12. 已知 $a=\ln\sqrt{2}$，$b=\frac{\ln 3}{3}$，$c=\frac{1}{\mathrm{e}}$，则下列判断正确的是（　　）

A. $c<b<a$　　B. $b<a<c$　　C. $a<b<c$　　D. $c<a<b$

【答案】C

【解析】

【分析】构造函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$，利用导数研究函数的单调性，然后利用函数的单调性即可比较大小.

【详解】设 $f(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$，则 $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$，

当 $x\in(0,\mathrm{e})$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 为增函数；

当 $x\in(\mathrm{e},+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 为减函数．所以 $f(x)=f(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}}$，

$a=\ln\sqrt{2}=\frac{1}{2}\ln 2=\frac{2}{4}\ln 2=\frac{1}{4}\ln 4=f(4)$，又 $b=\frac{\ln 3}{3}=f(3)$，$c=\frac{1}{\mathrm{e}}=f(\mathrm{e})$，$\mathrm{e}<3<4$，且 $f(x)$ 在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递减，所以 $f(4)<f(3)<f(\mathrm{e})$，所以 $a<b<c$.

故选：C.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 设 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}4x+3y-5\ge 0\\ x\le 2\\ y\le 3\end{cases}$，则 $z=-x+y$ 的最小值为__________.

【答案】-3

【解析】

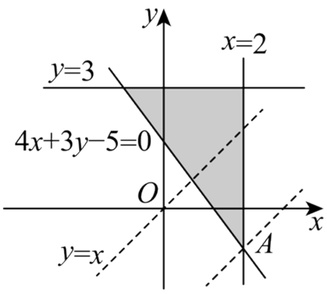
【分析】根据约束条件，画出可行域，由目标函数求出最小值.

【详解】画出x，y满足约束条件$\begin{cases}4x+3y-5\geq 0\\ x\leq 2\\ y\leq 3\end{cases}$的可行域如下图：

$\begin{cases}x=2\\ 4x+3y-5=0\end{cases}$，可得点$A(2,-1)$，

当直线$z=-x+y$过点$A(2,-1)$时，z取最小值-3.

故答案为：-3.



14. 已知向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$30°,|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=\sqrt{3}$，则$|\vec{a}-2\vec{b}|=$__________.

【答案】$\sqrt{7}$

【解析】

【分析】由向量的模长公式和数量积的定义求解即可.

【详解】因为向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$30°,|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=\sqrt{3}$，

所以$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 30°=1\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}$，

$|\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{(\vec{a}-2\vec{b})^2}=\sqrt{\vec{a}^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}^2}=\sqrt{1^2-4\times\frac{3}{2}+4\times(\sqrt{3})^2}=\sqrt{7}$.

故答案为：$\sqrt{7}$.

15. 函数$f(x)=f'\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin x-\cos x$的最大值为__________.

【答案】2

【解析】

【分析】求导，令 $x=\frac{\pi}{3}$，求出 $f'(\frac{\pi}{3})$，得 $f(x)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$，再根据正弦函数的最值可得结果.

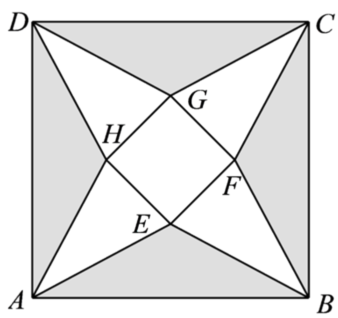
【详解】因为 $f'(x)=f'\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos x+\sin x$，所以 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=f'\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}f'(\frac{\pi}{3})+\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$，所以 $f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$，

\ $f(x)$ 的最大值为 2.

故答案为：2.

16. 如图，正方形纸片 $ABCD$ 的边长为 5cm，在纸片上作正方形 $EFGH$，剪去阴影部分，再分别沿 $EFGH$ 的四边将剩余部分折起．若 A、B、C、D 四点恰好能重合于点 P，得到正四棱锥 $P-EFGH$，则 $P-EFGH$ 体积的最大值为______ cm^3.



【答案】$\frac{4\sqrt{10}}{3}$ ## $\frac{4}{3}\sqrt{10}$

【解析】

【分析】设正方形 $EFGH$ 的边长为 $2x$，分析可得 $0<x<\frac{5\sqrt{2}}{4}$，求出正四棱锥 $P-EFGH$ 的体积关于 x 的函数关系式，结合导数法可求得正四棱锥 $P-EFGH$ 体积的最大值.

【详解】设正方形 $ABCD$ 的中心为点 O，则点 O 也为正方形 $EFGH$ 的中心，

连接 HF，连接 AC 分别交 EH、FG 于点 M、N，易知 M、N 分别为 EH、FG 的中点，