第八章立体几何初步综合复习训练

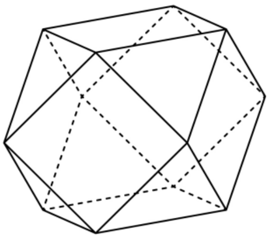
学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．在正四面体$S-ABC$中，M是SC的中点，N是SB的中点，则异面直线BM与AN夹角的余弦值为（　）

A．$\frac{1}{6}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{2}}{2}$

2．"阿基米德多面体"也称半正多面体，是由边数不全相同的正多边形围成的多面体，它体现了数学的对称美．如图是以正方体的各条棱的中点为顶点的多面体，这是一个有八个面为正三角形，六个面为正方形的"阿基米德多面体"，若该多面体的棱长为$\sqrt{2}$，则该多面体外接球的表面积为（　）



A．8π　　B．4π

C．2π　　D．$\frac{4}{3}\pi$

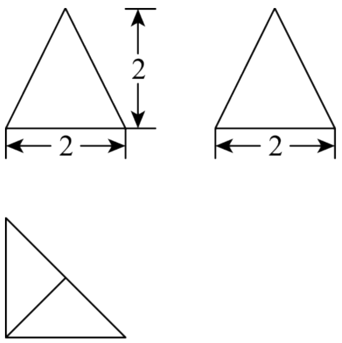
3．在各棱长均为2的正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，上下底面的中心分别为D，H，三个侧面的中心分别为E，F，G，若在该三棱柱中挖去两个三棱锥$D-EFG$和$H-EFG$，则剩余部分的体积为（　）

A．$\frac{11\sqrt{3}}{6}$　　B．$\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　C．$\frac{5\sqrt{3}}{3}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{6}$

4．已知$\triangle ABC$中，C为直角，若分别以边CA，CB，AB所在的直线为轴旋转一周，得到几何体的体积为V_1，V_2，V_3，则（　）

A．$\frac{1}{V_1^2}+\frac{1}{V_2^2}=\frac{1}{V_3^2}$　　B．$\frac{1}{V_1}+\frac{1}{V_2}=\frac{1}{V_3}$　　C．$\frac{1}{V_1^2}+\frac{1}{V_2^2}=\frac{2}{V_3^2}$　　D．$\frac{1}{V_1}+\frac{1}{V_2}=\frac{2}{V_3}$

5．如图为某几何体的三视图，其中正视图和侧视图均为等腰三角形，则该几何体的体积为（　）

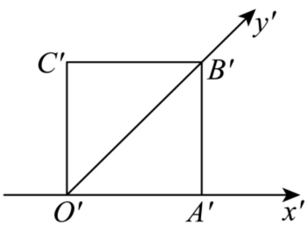


A．4　　　　B．$\frac{4}{3}$　　　　C．$\frac{2}{3}$　　　　D．$\frac{1}{3}$

6．已知圆台O_1O_2的内切球半径为2，圆台O_1O_2的体积为28π，则圆台O_1O_2外接球的表面积为（　）

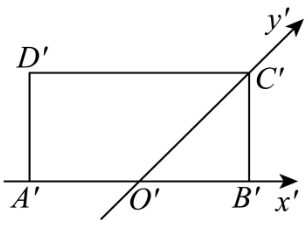
A．32π　　　　B．$\frac{1025\pi}{48}$　　　　C．$\frac{1025\pi}{64}$　　　　D．$\frac{1025\pi}{16}$

7．如图，一个平面图形的斜二测画法的直观图是一个边长为a的正方形$O'A'B'C'$，则原平面图形的周长为（　）



A．$4a$　　　　B．$8a$　　　　C．$6a$　　　　D．$8\sqrt{2}a$

8．一个水平放置的平面四边形$ABCD$，用斜二测画法画出的直观图为如图所示的矩形$A'B'C'D'$，已知$A'B'=2$，O'是$A'B'$的中点，则原四边形$ABCD$的周长为（　）



A．6　　　　B．8　　　　C．10　　　　D．$4+2\sqrt{3}$

二、多选题

9．已知a，b是不同的直线，α是平面，下列命题错误的是（　）

A．$a//b$，$b\subset\alpha\Rightarrow a//\alpha$　　　　B．$a//\alpha$，$b\subset\alpha\Rightarrow a//b$

C．$a//\alpha$，$a//b\Rightarrow b//\alpha$　　　　D．$a\not\subset\alpha$，$a//b$，$b\subset\alpha\Rightarrow a//\alpha$

10．已知圆锥的顶点为 P，底面圆心为 O，AB 为底面直径，$\angle APB=120°$，$PA=2$，点 C 在底面圆周上，且二面角 $P-AC-O$ 为 $45°$，则（　）.

A．该圆锥的体积为 π　　B．该圆锥的侧面积为 $4\sqrt{3}\pi$

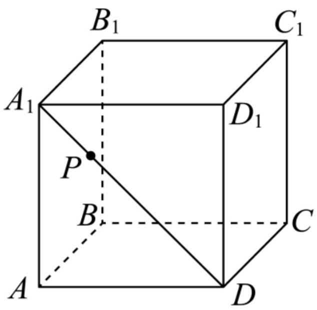
C．$AC=2\sqrt{2}$　　D．$\triangle PAC$ 的面积为 2

11．已知圆台的上、下底面半径分别为 2，4，母线与底面所成的角为 $\frac{\pi}{4}$，则（　）

A．该圆台的母线长为 $2\sqrt{2}$　　B．该圆台的表面积为 $12\sqrt{2}\pi$

C．该圆台的体积为 $\frac{56\pi}{3}$　　D．该圆台的外接球的表面积为 80π

12．如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，P 是线段 A_1D 上的一个动点，则下列结论正确的有（　）



A．直线 BP 与平面 $ABCD$ 所成角的取值范围是 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$

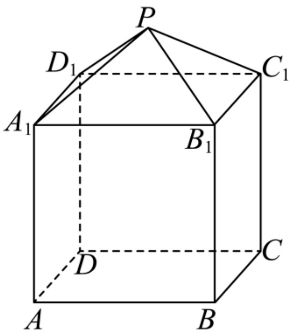
B．$BD_1\perp C_1P$

C．三棱锥 B_1-ACP 的体积不变

D．以点 B 为球心，$\sqrt{2}$ 为半径的球面与平面 AB_1C 的交线长为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$

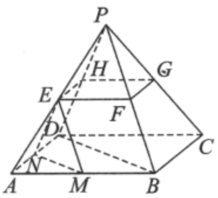
三、填空题

13．如图所示，几何体由正方体和正四棱锥组合而成，若该组合体内接于半径为 R 的球 O(即所有顶点都在球上)，记正四棱锥侧棱 PB_1 与正方体底面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成的角为 θ，则 $\tan\theta=$______.



14．在菱形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$\angle BAD=\dfrac{\pi}{3}$，将$\triangle ABD$沿 BD 翻折，使二面角 $A-BD-C$ 的余弦值为$\dfrac{1}{3}$，则四面体 $ABCD$ 的外接球的表面积为_____.

15．如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是平行四边形，E 为线段 PA 的中点，过点 E 分别作平行于平面 $ABCD$、平面 PBD 的平面 $EFGH$、平面 EMN，它们将四棱锥 $P-ABCD$ 分成三部分．将这三部分依体积从小到大排列，其体积之比为_____.

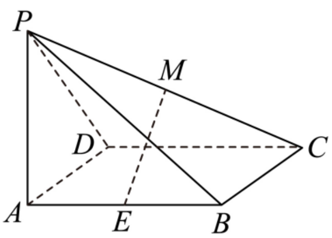


16．已知圆锥的内切球半径为 1，底面半径为$\sqrt{2}$，则该圆锥的表面积为__________.

注：在圆锥内部，且与底面和各母线均有且只有一个公共点的球，称为圆锥的内切球.

四、解答题

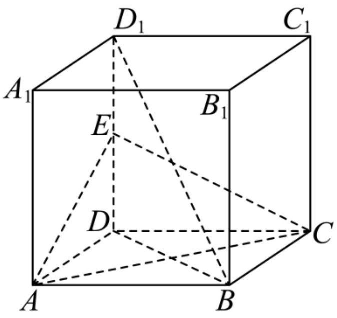
17．如图，在四棱锥 $PABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形，点 E,M 分别在棱 AB,PC 上，其中 E 是 AB 的中点，连接 ME.



(1)若 M 为 PC 的中点，求证：$ME//$平面 PAD；

(2)若 $ME//$平面 PAD，求点 M 的位置.

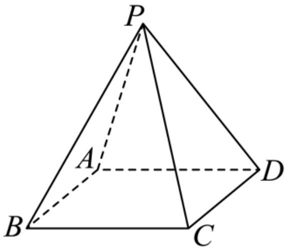
18．如图，在边长为2的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为 DD_1 中点，



(1)证明：$BD_1//$平面AEC；

(2)求三棱锥$E-ADC$的体积.

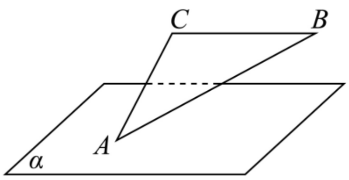
19. 已知四棱锥$P-ABCD$的底面$ABCD$是正方形，给出下列三个论断：①$PC=PD$；②$AC\perp PD$；③$BD\perp$平面PAC.



(1)以其中的两个论断作为条件，另一个论断作为结论，写出一个正确的命题，并证明；

(2)在（1）的条件下，若$PA=1$，求四棱锥$P-ABCD$体积的最大值.

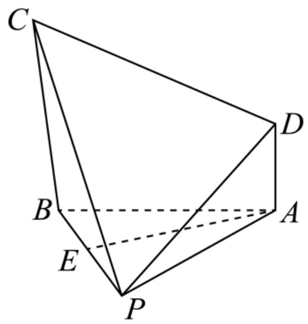
20．如图，已知直角三角形ABC的斜边$BC//$平面α，A在平面α上，AB，AC分别与平面α成$30°$和$45°$的角，$BC=6$.



(1)求BC到平面α的距离；

(2)求平面ABC与平面α的夹角.

21．如图，在四棱锥$P-ABCD$中，$AD//BC,AB=AP$，平面$PAB\perp$平面PBC，平面$PCD\perp$平面PBC.



(1)点 E 是 PB 的中点，求证：AE // 平面 PCD；

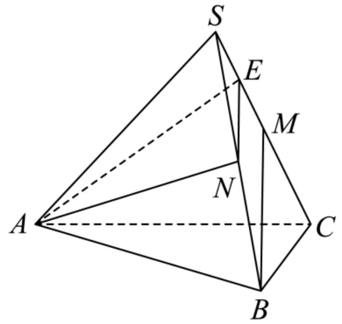
(2)若 $AB = AP = BC = 2\sqrt{2}, \angle PBC = 135^\circ$，求三棱锥 $\boldsymbol{C-PBD}$ 体积的最大值.

参考答案：

1．A

【分析】取SM的中点E，连接EN，AN，$\angle ANE$或其补角即为异面直线BM与AN所成的角，在$\triangle ASE$中，利用余弦定理求出AE的长，再在$\triangle ANE$中，利用余弦定理的推论求出$\cos\angle ANE$即可.

【详解】



取SM的中点E，连接EN，AN，$\because N$是SB的中点，

$\therefore EN//MB$，$EN=\dfrac{1}{2}MB$，

$\therefore \angle ANE$或其补角即为异面直线BM与AN所成的角，

设正四面体的棱长为4，

$\because M$是SC的中点，N是SB的中点，$\triangle SAB$和$\triangle SBC$均为正三角形，

$\therefore BM\perp SC$，$AN\perp SB$，且$BM=AN=2\sqrt{3}$，$\therefore EN=\sqrt{3}$，

在$\triangle ASE$中，$AE^2=SA^2+SE^2-2\cdot SA\cdot SE\cdot\cos\angle ASE=16+1-2\times4\times1\times\dfrac{1}{2}=13$，

在$\triangle ANE$中，$\cos\angle ANE=\dfrac{AN^2+NE^2-AE^2}{2\cdot AN\cdot NE}=\dfrac{12+3-13}{2\times2\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{1}{6}$，

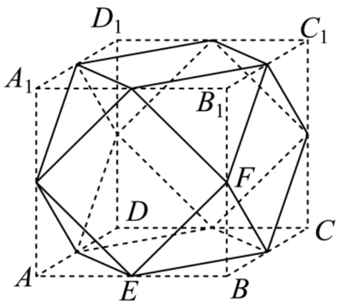
$\therefore$异面直线BM与AN夹角的余弦值为$\dfrac{1}{6}$.

故选：A.

2．A

【分析】将该多面体补全为正方体，得出该多面体的外接球即为正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱切球，求出该正方体的棱长得出棱切球半径，计算得到表面积.

【详解】将“阿基米德多面体”补全为正方体，如下图所示：



不妨取两棱中点为E,F，由题知$EF=\sqrt{2}$，

易知$BE\perp BF, BE=BF$，可得$BE=BF=1$，

所以正方体的棱长为 2，该多面体的外接球即为正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱切球，

所以棱切球的直径为该正方体的面对角线，长度为$2\sqrt{2}$，

因此该多面体的外接球的半径为$\sqrt{2}$，所以其表面积为$S=4\pi\left(\sqrt{2}\right)^2=8\pi$.

故选：A

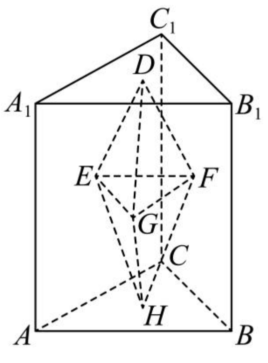
3．A

【分析】求得正三棱柱的体积与挖去的两个三棱锥的体积，可求剩余几何体的体积.

【详解】如图所示：

因为三个侧面的中心分别为E,F,G，

所以三棱锥$D-EFG$和三棱锥$H-EFG$的底面EFG面积为$\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$，



高为正三棱柱的高的一半，

故挖去的几何体的体积为$2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times2\times2\sin60°\times1=\frac{\sqrt{3}}{6}$，

三棱柱的体积为$\frac{1}{2}\times2\times2\sin60°\times2=2\sqrt{3}$，

故剩余几何体的体积为$2\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{11\sqrt{3}}{6}$.

故选：A.

4．A

【分析】借助锥体体积公式计算即可得.

【详解】设$CA=b$，$CB=a$，则由题意得$V_1=\frac{1}{3}\pi a^2b$，$V_2=\frac{1}{3}\pi ab^2$，

$V_3=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2\cdot\sqrt{a^2+b^2}=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$，

所以$\frac{1}{V_1^2}=\frac{9}{\pi^2a^4b^2}$，$\frac{1}{V_2^2}=\frac{9}{\pi^2a^2b^4}$，$\frac{1}{V_3^2}=\frac{9a^2+9b^2}{\pi^2a^4b^4}=\frac{1}{V_1^2}+\frac{1}{V_2^2}$.

故选：A.

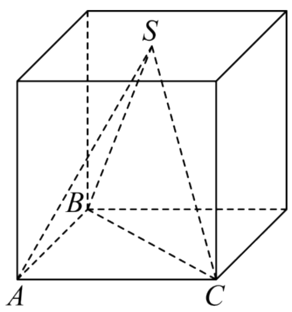
5．B

【分析】还原该几何体的直观图，并将其放到正方体中求解即可.

【详解】还原该几何体的直观图，并将其放到棱长为2的正方体中，为如图中所示的三棱锥$S-ABC$，

则该几何体的体积$V=\frac{1}{3}\times S_{\triangle ABC}\times 2=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times 2\times 2=\frac{4}{3}$.

故选：B.



6．D

【分析】首先根据圆台内切球半径为2求出圆台上、下底面半径的乘积为4，然后结合圆台的体积为28π并利用圆台的体积公式得到圆台的上、下底面半径，根据圆台和球的对称性并利用勾股定理求得圆台外接球的半径，即可求得圆台外接球的表面积.

【详解】设圆台O_1O_2的上、下底面半径分别为r_1，r_2，易知内切球的轴截面与圆台O_1O_2的轴截面内切，

所以$\left(r_2+r_1\right)^2=\left(r_2-r_1\right)^2+4^2$，解得$r_1r_2=4$，

又圆台O_1O_2的体积为$\frac{\pi}{3}\times 4\times\left(r_2^2+r_1^2+r_2r_1\right)=28\pi$，

所以 $r_1=1$，$r_2=4$．

设圆台 O_1O_2 外接球的半径为 R，易知圆台 O_1O_2 的轴截面与外接球的轴截面内接，外接球球心 O 在线段 O_1O_2 上，（提示：当 O 在 O_1O_2 的延长线上时，设 $OO_2=x$，则 $OO_1=4+x$，所以 $R^2=x^2+16=(4+x)^2+1$，无解，所以 O 在线段 O_1O_2 上），

如图，连接 OC，OB，

则 $CO_1=r_1=1$，$BO_2=r_2=4$，

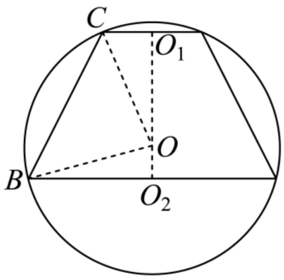
设 $OO_1=x$，则 $OO_2=4-x$，

所以 $R^2=1+x^2=16+(4-x)^2$，得 $x=\dfrac{31}{8}$，

故 $R^2=1+x^2=\dfrac{1025}{64}$，

所以该圆台外接球的表面积为 $4\pi R^2=\dfrac{1025\pi}{16}$，

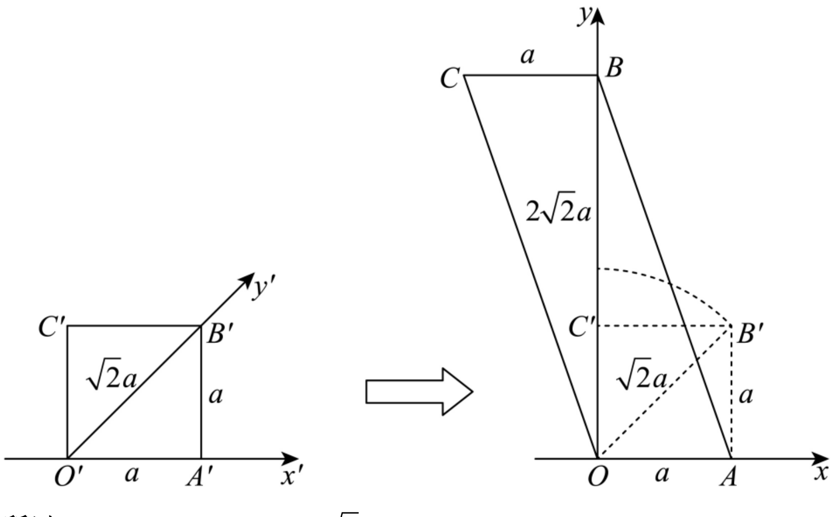
故选：D．



7．B

【分析】由直观图还原可得原图形，结合斜二测画法求边长，再求其周长即可.

【详解】由直观图可得原图形，



所以 $OA=BC=a$，$OB=2\sqrt{2}a$，$\angle BOA=90^\circ$，

所以$AB=OC=\sqrt{OA^2+OB^2}=3a$，原图形的周长为$2\times(a+3a)=8a$.

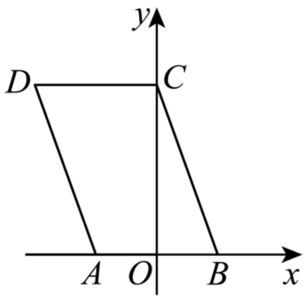
故选：B.

8．C

【分析】根据斜二测画法将直观图还原为原图，如图，由勾股定理求出AD，即可求解.

【详解】由题意知，$\angle C'O'B'=45^\circ$，$O'A'=O'B'=1$，

则$O'C'=\sqrt{2}$，将直观图还原为原图，如图，



在矩形$ABCD$中，$OC=2O'C'=2\sqrt{2},OB=1$，

则$AD=BC=\sqrt{OB^2+OC^2}=3$，

所以该矩形的周长为$2(AB+BC)=10$.

故选：C

9．ABC

【分析】考查点线面位置关系，根据点线面位置关系类型和种类以及线面平行判定定理进行讨论分析即可.

【详解】对于 A，因为$b\subset\alpha$，α内有无数条直线与b平行，故$a//b$还可能是$a\subset\alpha$，故 A 错误；

对于 B，$a//\alpha$，所以a与α没有公共点，又$b\subset\alpha$，所以a与b没有公共点，

所以a与b的位置可平行可异面，故 B 错误；

对于 C，因为$a//\alpha,a//b$，所以$b//\alpha$或b在α内，故 C 错误；

对于 D，由线面平行的判定定理知 D 正确.

故选：ABC.

10．ACD

【分析】根据圆锥的体积、侧面积判断 A、B 选项的正确性；利用二面角的知识可知$OP=OD=1$，进而判断 C、D 选项的正确性.

【详解】依题意，$\angle APB=120^\circ$，$PA=2$，所以$OP=1,OA=OB=\sqrt{3}$，