牡丹江市初中毕业学业考试数学试卷

考生注意：

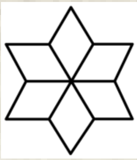
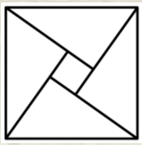
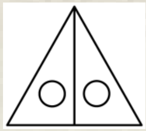
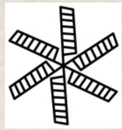
1 考试时间 120 分钟；

2 全卷共三道大题，总分 120 分；

3 所有试题请在答题卡上作答，在试卷上答题无效

一单项选择题（本题 12 个小题，每小题 3 分，共 36 分）

1 下列图形中，既是中心对称图形，又是轴对称图形的是（　　）

A 　B 　C 　D 

【答案】A

【解析】

【分析】根据轴对称图形与中心对称图形的概念求解

【详解】A 是轴对称图形，也是中心对称图形，故选项符合题意；

B 不是轴对称图形，是中心对称图形，故选项不符合题意；

C 是轴对称图形，不是中心对称图形，故选项不符合题意；

D 不是轴对称图形，是中心对称图形，故选项不符合题意；

故选：A

【点睛】此题主要考查了中心对称图形与轴对称图形的概念：轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分沿对称轴折叠后可重合；中心对称图形是要寻找对称中心，旋转 180 度后与原图重合

2 函数 $y=\sqrt{x+1}$ 中，自变量 x 的取值范围是（　　）

A $x\le 1$　　B $x\ge -1$　　C $x<-1$　　D $x>1$

【答案】B

【解析】

【分析】根据二次根式有意义的条件，被开方数大于等于 0 知：$x+1\ge 0$，可求出 x 的范围

【详解】解：根据题意得：$x+1\ge 0$，

解得：$x\ge -1$，

故选：B

【点睛】本题考查的是函数自变量取值范围的求法函数自变量的范围一般从三个方面考虑：（1）当函数表达式是整式时，自变量可取全体实数；（2）当函数表达式是分式时，考虑分式的分母不能为 0；（3

牡丹江市初中毕业学业考试数学试卷

考生注意：

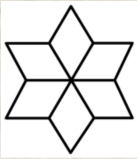
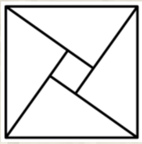
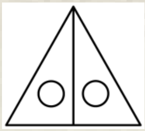
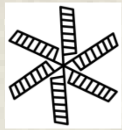
1 考试时间 120 分钟；

2 全卷共三道大题，总分 120 分；

3 所有试题请在答题卡上作答，在试卷上答题无效

一单项选择题（本题 12 个小题，每小题 3 分，共 36 分）

1 下列图形中，既是中心对称图形，又是轴对称图形的是（　　）

A 　　B 　　C 　　D 

【答案】A

【解析】

【分析】根据轴对称图形与中心对称图形的概念求解

【详解】A 是轴对称图形，也是中心对称图形，故选项符合题意；

B 不是轴对称图形，是中心对称图形，故选项不符合题意；

C 是轴对称图形，不是中心对称图形，故选项不符合题意；

D 不是轴对称图形，是中心对称图形，故选项不符合题意；

故选：A

【点睛】此题主要考查了中心对称图形与轴对称图形的概念：轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分沿对称轴折叠后可重合；中心对称图形是要寻找对称中心，旋转 180 度后与原图重合

2 函数 $y=\sqrt{x+1}$ 中，自变量 x 的取值范围是（　　）

A $x\le 1$　　B $x\ge -1$　　C $x<-1$　　D $x>1$

【答案】B

【解析】

【分析】根据二次根式有意义的条件，被开方数大于等于 0 知：$x+1\ge 0$，可求出 x 的范围

【详解】解：根据题意得：$x+1\ge 0$，

解得：$x\ge -1$，

故选：B

【点睛】本题考查的是函数自变量取值范围的求法函数自变量的范围一般从三个方面考虑：（1）当函数表达式是整式时，自变量可取全体实数；（2）当函数表达式是分式时，考虑分式的分母不能为 0；（3

）当函数表达式是二次根式时，被开方数非负

3 下列计算正确的是（　　）

A $a^2\cdot a^4=a^8$　　B $3a^3-a^3=2a$　　C $\left(ab^2\right)^3=a^3b^6$　　D $\left(a+b\right)^2=a^2+b^2$

【答案】C

【解析】

【分析】分别根据同底数幂的乘法，合并同类项，积的乘方，完全平方公式逐一分析判断即可

【详解】解：$a^2\cdot a^4=a^6$，故 A 不符合题意，

$3a^3-a^3=2a^3$，故 B 不符合题意；

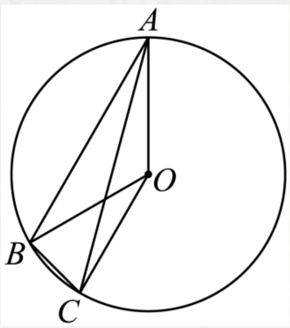
$\left(ab^2\right)^3=a^3b^6$，故 C 符合题意；

$\left(a+b\right)^2=a^2+2ab+b^2$，故 D 不符合题意；

故选 C

【点睛】本题考查的是同底数幂的乘法，合并同类项，积的乘方运算，完全平方公式的应用，熟记运算法则是解本题的关键

4 如图，A，B，C 为 e O 上的三个点，$\angle AOB=4\angle BOC$，若 $\angle ACB=60°$，则 $\angle BAC$ 的度数是（　　）



A $20°$　　B $18°$　　C $15°$　　D $12°$

【答案】C

【解析】

【分析】由 $\angle ACB=60°$，可得 $\angle AOB=2\angle ACB=120°$，结合 $\angle AOB=4\angle BOC$，可得 $\angle BOC=\frac{1}{4}\times120°=30°$，再利用圆周角定理可得答案

【详解】解：$\because\angle ACB=60°$，

$\therefore\angle AOB=2\angle ACB=120°$，

$\because\angle AOB=4\angle BOC$，

$\therefore \angle BOC = \frac{1}{4} \times 120° = 30°$，

$\therefore \angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC = 15°$，

故选 C

【点睛】本题考查的是圆周角定理的应用，熟记圆周角定理的含义是解本题的关键

5 一组数据 1，x，5，7 有唯一众数，且中位数是 6，则平均数是（　　）

A 6　　　　B 5　　　　C 4　　　　D 3

【答案】B

【解析】

【分析】由一组数据 1，x，5，7 有唯一众数， 可得 x 的值只能是 1，5，7，结合中位数是 6，可得 $x=7$，从而可得答案

【详解】解：∵一组数据 1，x，5，7 有唯一众数，

$\therefore x$ 的值只能是 1，5，7，

∵中位数是 6，

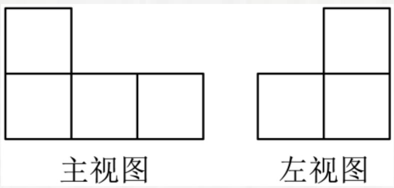
$\therefore x=7$，

$\therefore$ 平均数为 $\frac{1}{4}(1+5+7+7)=5$，

故选 B

【点睛】本题考查的是众数，中位数，平均数的含义，理解概念并灵活应用是解本题的关键

6 由若干个完全相同的小正方体搭成的几何体的主视图和左视图如图所示，则搭成该几何体所用的小正方体的个数最多是（　　）



A 6　　　　B 7　　　　C 8　　　　D 9

【答案】B

【解析】

【分析】根据主视图和左视图判断该几何体的层数及每层的最多个数，即可得到答案

【详解】解：根据主视图和左视图判断该几何体共有两层，

下面一层最多有 4 个小正方体，上面的一层最多有 3 个小正方体，故该几何体所用的小正方体的个数最多是 7 个，

故选:B

【点睛】此题考查了几何体的三视图，由三视图判断小正方体的个数，正确理解三视图是解题的关键

7 观察下面两行数：

1,5,11,19,29,…

1,3,6,10,15,…取每行数的第 7 个数，计算这两个数的和是（　　）

A 92　　　　B 87　　　　C 83　　　　D 78

【答案】C

【解析】

【分析】先分别找出每行数字的规律，求出每行第 7 个数，将这两个数相加即可

【详解】解：第一行的数字规律为：n^2+n-1，第二行的数字规律为：$\frac{n^2+n}{2}$，

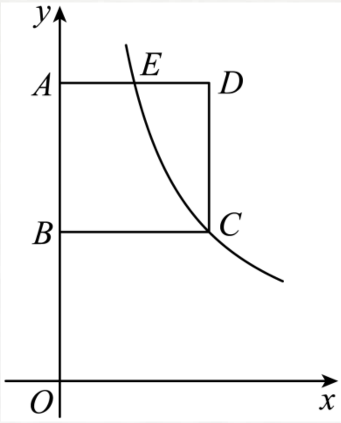
$\therefore$第一行的第 7 个数字为：$7^2+7-1=55$，第二行的第 7 个数字为：$\frac{7^2+7}{2}=28$，

$\therefore 55+28=83$，

故选：C

【点睛】本题考查规律探究，发现每行数字的排布规律是解题的关键

8 如图，正方形 $ABCD$ 的顶点 A，B 在 y 轴上，反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象经过点 C 和 AD 的中点 E，若 $AB=2$，则 k 的值是（　　）



A 3　　　　B 4　　　　C 5　　　　D 6

【答案】B

【解析】

【分析】由正方形的性质得 $BC=AB=2$，可设 $C\left(2,\frac{k}{2}\right)$，$E\left(1,\frac{k}{2}+2\right)$，根据 $2\times\frac{k}{2}=1\times\left(\frac{k}{2}+2\right)$ 可求出 k 的值

【详解】解：∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∵ $AB=BC=CD=AD=2,$

∵点 E 为 AD 的中点，

∴ $AE=\frac{1}{2}AD=1,$

设点 C 的坐标为 $\left(2,\frac{k}{2}\right)$，则 $BO=\frac{k}{2},AO=AB+BO=\frac{k}{2}+2$，

∴ $E\left(1,\frac{k}{2}+2\right)$，

∵点 C，E 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象上，

∴ $2\times\frac{k}{2}=1\times\left(\frac{k}{2}+2\right)$，

解得，$k=4$，

故选：B

【点睛】本题考查了反比例函数图象上点的坐标特征：反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（k 为常数，$k\neq0$）的图象是双曲线，图象上的点 $(x，y)$ 的横纵坐标的积是定值 k，即 $xy=k$

9 若分式方程 $\frac{a}{x+2}=1-\frac{3}{x+2}$ 的解为负数，则 a 的取值范围是（　　）

A　$a<-1$ 且 $a\neq-2$　　　　B　$a<0$ 且 $a\neq-2$

C　$a<-2$ 且 $a\neq-3$　　　　D　$a<-1$ 且 $a\neq-3$

【答案】D

【解析】

【分析】直接解分式方程，进而得出 a 的取值范围，注意分母不能为零

【详解】解：去分母得：$a=x+2-3$，

解得：$x=a+1$，

∵分式方程 $\frac{a}{x+2}=1-\frac{3}{x+2}$ 的解是负数，

$\therefore a+1<0$，$x+2\neq 0$，即 $a+1+2\neq 0$，

解得：$a<-1$ 且 $a\neq -3$，

故选：D

【点睛】此题主要考查了分式方程的解，正确解分式方程是解题关键

10 用一个圆心角为 $90°$，半径为 8 的扇形作一个圆锥的侧面，则这个圆锥的底面直径是（　　）

A 6　　　　B 5　　　　C 4　　　　D 3

【答案】C

【解析】

【分析】先利用弧长公式求出扇形的弧长即圆锥的底面周长，再根据圆的周长公式求出直径即可

【详解】解：扇形的弧长：$\dfrac{\pi\times 8\times 90°}{180°}=4\pi$，

则圆锥的底面直径：$4\pi\div\pi=4$

故选：C

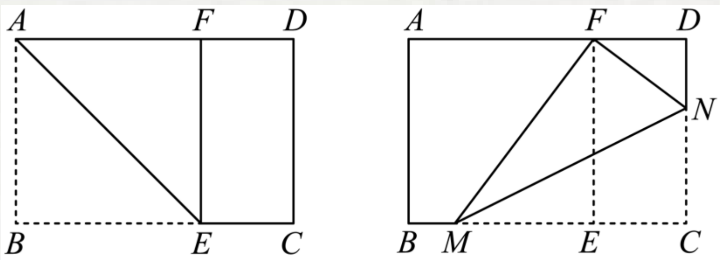
【点睛】本题考查圆锥侧面积公式，熟记公式的灵活应用是解题的关键

11 在以“矩形的折叠”为主题的数学活动课上，某位同学进行了如下操作：

第一步：将矩形纸片的一端，利用图①的方法折出一个正方形 $ABEF$，然后把纸片展平；

第二步：将图①中的矩形纸片折叠，使点 C 恰好落在点 F 处，得到折痕 MN，如图②

根据以上的操作，若 $AB=8$，$AD=12$，则线段 BM 的长是（　　）



图①　　　　图②

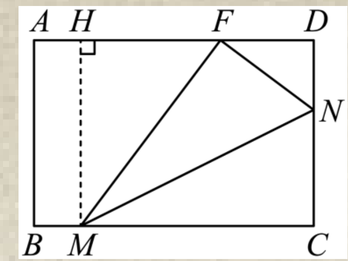
A 3　　　　B $\sqrt{5}$　　　　C 2　　　　D 1

【答案】C

【解析】

【分析】根据折叠的性质得：$AB=AF=BE=8$，$FD=EC=4$，$FN=CN$，设 $DN=x$，则 $CN=FN=8-x$，利用勾股定理求出 DN,FN，再证明 $\triangle MFH\sim\triangle FND$，得 $MF=MC$，求解即可

【详解】解：如图，过点 M 作 $MH\perp AD$，交 AD 于点 H，



$\because \angle DFN+\angle DNF=90^\circ$ $\angle MFH+\angle DFN=90^\circ$

$\therefore \angle MFH=\angle DNF$

$\because \angle D=\angle MHD=90^\circ$

在$\triangle MFH$和$\triangle FND$中，

$$\begin{cases}\angle D=\angle MHD=90^\circ\\ \angle MFH=\angle DNF\\ \angle FMH=\angle DFN\end{cases}$$

$\therefore \triangle MFH \backsim \triangle FND$

$\therefore \dfrac{MF}{FN}=\dfrac{MH}{DF}=\dfrac{FH}{DN}$

$\because DF=4, MH=8$

$\therefore \dfrac{MF}{FN}=\dfrac{FH}{DN}=\dfrac{8}{4}=2$

设$DN=x$，则$CN=FN=8-x$，

$\therefore FN^2=DN^2+DF^2$，即：$(8-x)^2=x^2+4^2$，

解得：$x=3$，

$\therefore DN=3$，$CN=FN=5$，

$\therefore \dfrac{MF}{FN}=\dfrac{MF}{5}=2$，

$\therefore MF=10$，

$\therefore MC=MF=10$，

$\because AD=BC=12$

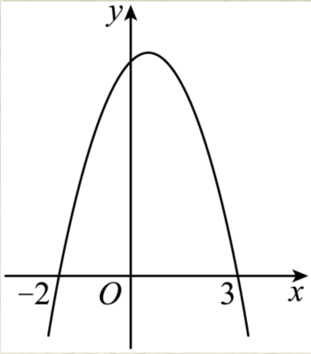
$\therefore BM=BC-MC=12-10=2$，

故选：C

【点睛】本题考查折叠问题及矩形的性质正方形的性质，相似三角形的判定与性质，掌握折叠的性质并能熟练运用勾股定理方程思想是解题的关键

12 如图，抛物线$y=ax^2+bx+c$经过点$(-2,0)$，$(3,0)$下列结论：①$\dfrac{ab}{c}>0$；②$c=2b$

；③若抛物线上有点$\left(\frac{5}{2},y_1\right)$，$(-3,y_2)$，$\left(-\frac{1}{2},y_3\right)$，则$y_2<y_1<y_3$；④方程$cx^2+bx+a=0$的解为$x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=-\frac{1}{3}$，其中正确的个数是（　　）



A 4　　　　B 3　　　　C 2　　　　D 1

【答案】D

【解析】

【分析】根据二次函数图象可知：$a<0$，$-\frac{b}{2a}>0$，$c>0$，得出$\frac{ab}{c}<0$，故①不正确；将点$(-2,0)$，$(3,0)$代入，得出：$a+b=0$，再求出$c=-2b$，故②不正确；根据函数图象可得$y_2<y_1<y_3$，故③正确；根据方程$cx^2+bx+a=0$，$\Delta=b^2-4ac=b^2-4\times(-b)\times(-2b)=-7b^2<0$，可知方程无解，故④不正确

【详解】解：根据二次函数图象可知：$a<0$，$-\frac{b}{2a}>0$，$c>0$，

$\therefore b>0$，

$\therefore \frac{ab}{c}<0$，故①不正确；

将点$(-2,0)$，$(3,0)$代入得出：$\begin{cases}4a-b+c=0① \\ 9a+3b+c=0②\end{cases}$，

②-①得出：$a+b=0$，

$\therefore a=-b$，

再代入①得出：$c=-2b$，故②不正确；

$\because -3<-\frac{1}{2}<0$，

$\therefore y_2<0$，$y_3>0$，

$\because \frac{5}{2}>0$，

$\therefore y_1 > 0$，

根据图象可知：$y_2 < y_1 < y_3$，故③正确；

$\because$方程$cx^2 + bx + a = 0$，

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = b^2 - 4\times(-b)\times(-2b) = -7b^2 < 0$，

$\therefore$方程$cx^2 + bx + a = 0$无解，故④不正确；

正确的个数是 1 个，

故选：D

【点睛】本题考查二次函数，掌握二次函数的性质是解题的关键

二填空题（本题 8 个小题，每小题 3 分，共 24 分）

13 目前，中国国家版本馆中央总馆入藏版本量共16000000余册数据16000000用科学记数法表示为

【答案】1.6×10^7

【解析】

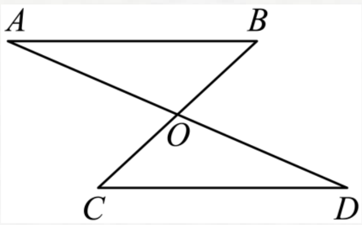
【分析】根据题意用科学记数法$a\times10^n\ (1\le a<10)$表示即可

【详解】解：$16000000 = 1.6\times10^7$，

故答案为：1.6×10^7

【点睛】本题考查科学记数法，掌握科学记数法的形式$a\times10^n\ (1\le a<10)$是解题的关键

14 如图，$AB\parallel CD$，AD与BC交于点 O，请添加一个条件，使$\triangle AOB\cong\triangle DOC$（只填一种情况即可）



【答案】$AB = CD$或$AO = DO$或$BO = CO$

【解析】

【分析】根据三角形全等的判定方法处理

【详解】$\because AB\parallel CD$

$\therefore \angle A = \angle D$，$\angle B = \angle C$

若 $AB=CD$，则 $\triangle AOB\cong\triangle DOC$ (ASA)；

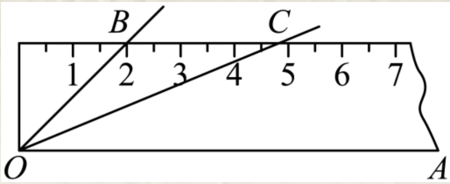
若 $AO=DO$，则 $\triangle AOB\cong\triangle DOC$ (AAS)；

若 $BO=CO$，则 $\triangle AOB\cong\triangle DOC$ (AAS)；

故答案为： $AB=CD$ 或 $AO=DO$ 或 $BO=CO$

【点睛】本题考查平行线的性质，全等三角形的判定；掌握全等三角形的判定方法是解题的关键

15 如图，将 $45°$ 的 $\angle AOB$ 按下面的方式放置在一把刻度尺上：顶点 O 与尺下沿的端点重合，OA 与尺下沿重合，OB 与尺上沿的交点 B 在尺上的读数恰为 2cm，若按相同的方式将 $22.5°$ 的 $\angle AOC$ 放置在该刻度尺上，则 OC 与尺上沿的交点 C 在尺上的读数为 cm



【答案】$\left(2\sqrt{2}+2\right)$

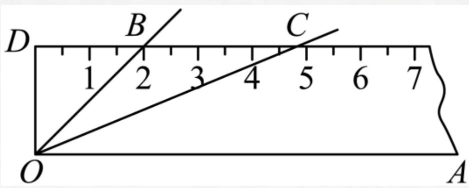
【解析】

【分析】根据平行线的性质得到 $\angle DBO=\angle AOB=45°$，解直角三角形求出 $OB=2\sqrt{2}\text{cm}$，再推出 $\angle BOC=\angle BCO$，进而得到 $BC=BO=2\sqrt{2}\text{cm}$，再求出 CD 的长即可得到答案

【详解】解：由题意得，$BC\parallel OA$，$\angle BDO=90°$，$OB=2\text{cm}$，

$\therefore \angle DBO=\angle AOB=45°$，

$\therefore OB=\dfrac{BD}{\cos\angle DBO}=2\sqrt{2}\text{cm}$



$\because \angle AOC=22.5°$，

$\therefore \angle BOC=\angle AOB-\angle AOC=22.5°$，$\angle BCO=\angle AOC=22.5°$，

$\therefore \angle BOC=\angle BCO$，

$\therefore BC=BO=2\sqrt{2}\text{cm}$，

$\therefore CD=BD+BC=\left(2\sqrt{2}+2\right)\text{cm}$，

$\therefore OC$ 与尺上沿的交点 C 在尺上的读数为 $\left(2\sqrt{2}+2\right)\text{cm}$，

故答案为：$\left(2\sqrt{2}+2\right)$

【点睛】本题主要考查了解直角三角形，平行线的性质，等腰三角形的判定，正确求出 BC 的长是解题的关键

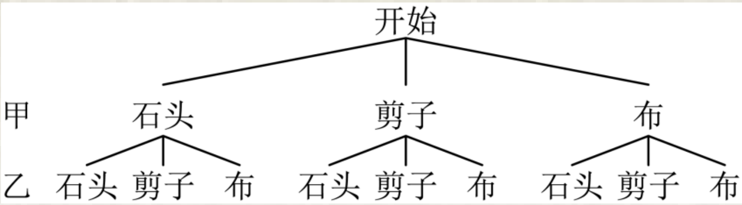
16 甲，乙两名同学玩“石头剪子布”的游戏，随机出手一次，甲获胜的概率是

【答案】$\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】画树状图得出所有等可能的结果数，再从中找到符合条件的结果数，然后再用概率公式求解即可

【详解】解：根据题意画出树状图如图所示：



，

共有 9 种等可能的结果，甲获胜的情况有 3 种，

$\therefore$ 甲获胜的概率是：$\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$，

故答案为：$\frac{1}{3}$

【点睛】本题主要考查的是用列表法或树状图法求概率，列表法可以重复不遗漏的列出所有可能的结果，适合于两步完成的事件，树状图法适合两步或两步以上完成的事件，用到的知识点为：概率等于所求情况数与总情况数之比

17 张师傅去年开了一家超市，今年 2 月份开始盈利，3 月份盈利 5000 元，5 月份盈利达到 7200 元，从 3 月到 5 月，每月盈利的平均增长率都相同，则每月盈利的平均增长率是

【答案】20%

【解析】

【分析】设该超市的月平均增长率为 x，根据等量关系：三月份盈利额 $\times\left(1+x\right)^2=$ 五月份的盈利额列出方程求解即可

【详解】解：设每月盈利平均增长率为 x，

根据题意得：$5000\left(1+x\right)^2=7200$

解得：$x_1=20\%$，$x_2=-220\%$（不符合题意，舍去），

故答案为：20%

【点睛】此题主要考查了一元二次方程的应用，属于增长率的问题，一般公式为原来的量$\times(1\pm x)^2=$后来的量，其中增长用＋，减少用−，难度一般

18 将抛物线$y=(x+3)^2$向下平移1个单位长度，再向右平移个单位长度后，得到的新抛物线经过原点

【答案】2或4###4或2

【解析】

【分析】先求出抛物线$y=(x+3)^2$向下平移1个单位长度后与x的交点坐标，然后再求出新抛物线经过原点时平移的长度

【详解】解：抛物线$y=(x+3)^2$向下平移1个单位长度后的解析式为$y=(x+3)^2-1$，

令$y=0$，则$(x+3)^2-1=0$，

解得，$x_1=-2,x_2=-4$，

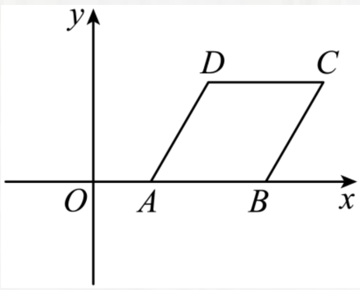
∴抛物线$y=(x+3)^2-1$与x的交点坐标为$(-2,0)$和$(-4,0)$，

∴将抛物线$y=(x+3)^2-1$向右平移2个单位或4个单位后，新抛物线经过原点

故答案为：2或4

【点睛】此题考查了二次函数图象的平移与几何变换，利用抛物线解析式的变化规律：左加右减，上加下减是解题关键

19 如图，在平面直角坐标系中，菱形$ABCD$的顶点A，B在x轴上，$AB=2$，$A(1,0)$，$\angle DAB=60°$，将菱形$ABCD$绕点A旋转$90°$后，得到菱形$AB_1C_1D_1$，则点C_1的坐标是

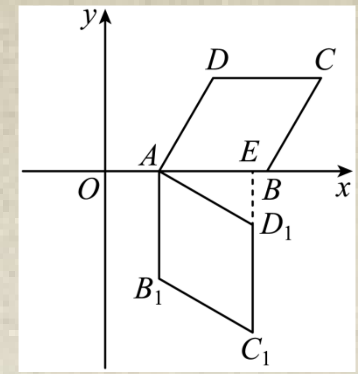


【答案】$(1-\sqrt{3},3)$或$(1+\sqrt{3},-3)$

【解析】

【分析】分两种情况：当绕点A顺时针旋转$90°$后，当绕点A逆时针旋转$90°$后，利用菱形的性质及直角三角形30度角的性质求解即可

【详解】解：当绕点A顺时针旋转$90°$后，如图，



$\because \angle DAB=60°$， $\angle D_1AD=90°$

$\therefore \angle D_1AB=30°$，

$\because$菱形 $ABCD$ 中 $AB \parallel CD$， $CD=AD=AB=2$，

$\therefore \angle AD_1C_1=\angle ADC=120°$，

延长 C_1D_1 交 x 轴于点 E，

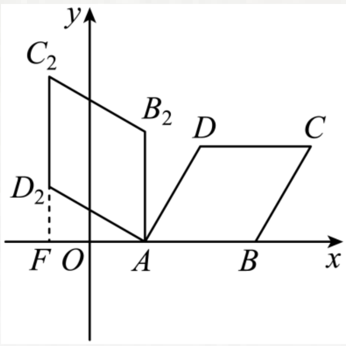
$\therefore \angle AD_1E=60°$， $\angle AED_1=90°$，

$\therefore ED_1=\dfrac{1}{2}AD_1=1$，

$\therefore AE=\sqrt{3}$，

$\therefore C_1\left(1+\sqrt{3},-3\right)$；

当绕点 A 逆时针旋转 $90°$ 后，如图，延长 C_2D_2 交 x 轴于点 F，



$\because \angle DAB=60°$， $\angle B_2AB=90°$，

$\therefore \angle D_2AF=30°$，

$\because$菱形 $ABCD$ 中 $AB \parallel CD$， $CD=AD=AB=2$，

$\therefore \angle AD_2C_2=\angle ADC=120°$，

$\therefore \angle AD_2F = 60°$， $\angle AFD_2 = 90°$，

$\therefore FD_2 = \frac{1}{2}AD_2 = 1$，

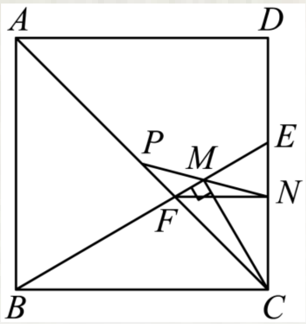
$\therefore AF = \sqrt{3}$，

$\therefore C_2\left(1-\sqrt{3},3\right)$；

故答案为：$\left(1-\sqrt{3},3\right)$或$\left(1+\sqrt{3},-3\right)$

【点睛】此题考查了菱形的性质，直角三角形 30 度角所对的直角边等于斜边的一半，旋转的性质，正确理解菱形的性质及旋转的性质是解题的关键

20 如图，在正方形 $ABCD$ 中，E 在边 CD 上，BE 交对角线 AC 于点 F，$CM \perp BE$ 于 M，$\angle CME$ 的平分线所在直线分别交 CD，AC 于点 N，P，连接 FN 下列结论：① $S_{\triangle NPF} : S_{\triangle NPC} = FM : MC$；② $CM = PN$；③ $EN \cdot CD = EC \cdot CF$；④若 $EM = 1$，$MB = 4$，则 $PM = \sqrt{2}$，其中正确的是



【答案】①④

【解析】

【分析】如图，记 N 到 PC 的距离为 h，可得 $\frac{S_{\triangle NPF}}{S_{\triangle NPC}} = \frac{\frac{1}{2}PF \times h}{\frac{1}{2}PC \times h} = \frac{PF}{PC}$，证明 $\triangle PMF \backsim \triangle PCN$，可得 $\frac{MF}{CN} = \frac{PF}{PN}$，$\angle PFM = \angle PNC$，证明 $\triangle NCM \backsim \triangle NPC$，可得 $\frac{PN}{CN} = \frac{PC}{CM}$，可得 $\frac{PF}{PC} = \frac{FM}{CM}$，$\frac{S_{\triangle NPF}}{S_{\triangle NPC}} = \frac{PF}{PC} = \frac{FM}{CM}$，故①正确；证明 M, F, C, N 四点共圆，可得 $FN \parallel BC$，证明 $\triangle EFN \backsim \triangle EBC$，$\frac{EN}{EC} = \frac{FN}{BC} = \frac{FN}{CD}$，故③不正确；求解 $CM^2 = BM \cdot EM = 4$，可得 $CM = 2$，（负根舍去），$CE = \sqrt{5}$，$BC = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5} = AB$，证明 $\triangle CEF \backsim \triangle ABF$，$EF = \frac{5}{3}$，$BF = \frac{10}{3}$，$FM = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$，证明 $\triangle PMF \backsim \triangle BCF$，$\frac{PM}{BC} = \frac{MF}{CF}$，求解 $CF = \sqrt{2}CN = \frac{2\sqrt{10}}{3}$，可得 $PM = \sqrt{2}$，故④正确；证明

$\triangle EMN \backsim \triangle ECF$，可得 $\frac{EN}{EF}=\frac{MN}{CF}$，求解 $MN=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，则 $PN=PM+MN=\sqrt{2}+\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{5\sqrt{2}}{3}\neq CM$，

故②不正确

【详解】解：如图，记 N 到 PC 的距离为 h，

$\therefore \frac{S_{\triangle NPF}}{S_{\triangle NPC}}=\frac{\frac{1}{2}PF\times h}{\frac{1}{2}PC\times h}=\frac{PF}{PC}$，

$\because CM\perp BE$，正方形 $ABCD$，

$\therefore \angle CME=90^\circ$，$\angle PCN=45^\circ$，

$\because MN$ 平分 $\angle CME$，

$\therefore \angle CMN=\angle EMN=\angle PMF=45^\circ=\angle PCN$，

$\because \angle MPF=\angle NPC$，

$\therefore \triangle PMF \backsim \triangle PCN$，

$\therefore \frac{MF}{CN}=\frac{PF}{PN}$，$\angle PFM=\angle PNC$，

$\therefore \frac{PF}{MF}=\frac{PN}{CN}$，

同理可得：$\triangle NCM \backsim \triangle NPC$，

$\therefore \frac{PN}{CN}=\frac{PC}{CM}$，

$\therefore \frac{PC}{CM}=\frac{PF}{MF}$，

$\therefore \frac{PF}{PC}=\frac{FM}{CM}$，

$\frac{S_{\triangle NPF}}{S_{\triangle NPC}}=\frac{PF}{PC}=\frac{FM}{CM}$，故①符合题意；

$\because \angle PMF=45^\circ=\angle PCE$，

$\therefore \angle PCE+\angle FMN=180^\circ$，

$\therefore M,F,C,N$ 四点共圆，

$\therefore \angle FNC=\angle FMC=90^\circ$，

$\therefore FN\ /\!/\ BC$，

$\therefore \triangle EFN \backsim \triangle EBC$，

$\therefore \frac{EN}{EC}=\frac{FN}{BC}=\frac{FN}{CD}$，

$\therefore EN\cdot CD=EC\cdot FN$，故③不正确；

$\because EM=1$，$BM=4$，则 $BE=5$，

$\because$ 正方形 $ABCD$，$CM\perp BE$，

$\therefore \angle BCD=\angle BMC=\angle EMC=90^\circ$，

$\therefore \angle MEC+\angle MCE=90^\circ=\angle MCE+\angle BCM$，

$\therefore \angle MEC=\angle BCM$，

$\therefore \triangle CME\backsim\triangle BMC$，

$\therefore \dfrac{CM}{BM}=\dfrac{ME}{CM}$，

$\therefore CM^2=BM\cdot EM=4$，

$\therefore CM=2$，（负根舍去），

$\therefore CE=\sqrt{5}$，$BC=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}=AB$，

同理可得：$\triangle CEF\backsim\triangle ABF$，

$\therefore \dfrac{EF}{BF}=\dfrac{CE}{AB}=\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore EF=\dfrac{5}{3}$，$BF=\dfrac{10}{3}$，$FM=\dfrac{5}{3}-1=\dfrac{2}{3}$，

$\because \angle PMF=\angle ACB=45^\circ$，$\angle PFM=\angle BFC$，

$\therefore \triangle PMF\backsim\triangle BCF$，

$\therefore \dfrac{PM}{BC}=\dfrac{MF}{CF}$，

$\because \triangle EFN\backsim\triangle EBC$，

$\therefore \dfrac{EN}{EC}=\dfrac{EF}{BE}=\dfrac{1}{3}$，

$\therefore EN=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，$CN=\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$，

$\therefore CF=\sqrt{2}CN=\dfrac{2\sqrt{10}}{3}$，

即 $\dfrac{PM}{2\sqrt{5}}=\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}\sqrt{10}}$，

$\therefore PM=\sqrt{2}$，故④正确；

同理可得：$\triangle EMN\backsim\triangle ECF$，