第 05 讲 尺规作图、垂直平分线、角平分线的性质

知识点梳理

一、基本作图

1.尺规作图的定义

利用没有刻度直尺和圆规作图，简称为尺规作图.

要点：尺规作图时使用的直尺是不能用来进行测量长度的操作，它一般用来将两个点连在一起.圆规可以开至无限宽,但上面也不能有刻度.它只可以拉开成之前构造过的长度或一个任意的长度.

2.常见基本作图

本套教科书设计的基本尺规作图包括：1.作一条线段等于已知线段；2.作一个角等于已知角；3.作一个角的平分线；4.作一条线段的垂直平分线；5.过一点作已知直线的垂线.

要点：1.要熟练掌握直尺和圆规在作图中的正确应用，对于作图要用正确语言来进行表达；

2.本节中继续学习用直尺、圆规做一条线段等于已知线段、一个角等于已知角、作一条线段的垂直平分线等.

二、根据三角形全等用尺规作三角形

根据三角形全等判定定理,应用基本尺规作图作三角形以及作一个三角形与已知三角形全等.

三、线段的垂直平分线

1.定义：经过线段中点并且垂直于这条线段的直线，叫做这条线段的垂直平分线，也叫线段的中垂线.

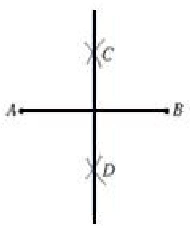
2.线段的垂直平分线的尺规作图

求做线段 AB 的垂直平分线

作法：（1）分别以点 A，B 为圆心，以大于$\frac{1}{2}$AB 的长为半径作弧，两弧相交于 C，D 两点；

（2）作直线 CD，CD 即为所求直线.

要点：作弧时的半径必须大于$\frac{1}{2}$AB 的长，否则就不能得到交点



了.

3.线段的垂直平分线性质定理

线段垂直平分线上的任意一点到这条线段两个端点的距离相等.

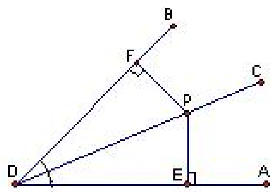
要点：线段的垂直平分线性质定理，是证明两线段相等的常用方法之一.同时也给出了引辅助线的方法，那就是遇见线段的垂直平分线，画出到线段两个端点的距离，这样就出现相等线段，直接或间接地为构造全等三角形创造条件.

四、角平分线的性质定理

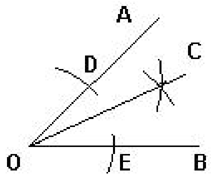
1.角平分线的性质定理：角平分线上的点到角两边的距离相等.

要点：用符号语言表示角的平分线的性质定理：

若 CD 平分∠ADB，点 P 是 CD 上一点，且 PE⊥AD 于点 E，PF⊥BD 于点 F，则 PE＝PF.



2.角平分线的尺规作图



（1）以 O 为圆心，适当长为半径画弧，交 OA 于 D，交 OB 于 E.

（2）分别以 D、E 为圆心，大于 $\frac{1}{2}$DE 的长为半径画弧，两弧在∠AOB 内部交于点 C.

（3）画射线 OC.

射线 OC 即为所求.

典例与范例

例 1．尺规作图的工具是（　　）.

A．刻度尺和圆规　　B．三角尺和圆规

C．直尺和圆规　　D．没有刻度的直尺和圆规

【答案】D

【解析】

根据尺规作图的定义作答.

解：“尺规作图”中的尺是指没有刻度的直尺，即使有刻度也不能使用上面的刻度.

故选：D.

【点睛】

本题考查了尺规作图的定义，解题的关键是掌握尺规作图是指用没有刻度的直尺和圆规作图.

例 2．下列各条件中，不能作出唯一三角形的是（　　）

A．已知两边和夹角　　B．已知两边和其中一边的对角

C．已知两角和夹边　　D．已知三边

【答案】B

【解析】

看是否符合所学的全等的公理或定理即可.

A、符合全等三角形的判定 SAS，能作出唯一三角形；

B、而已知两边和其中一边的对角对应相等，不能作出唯一三角形；

C、符合全等三角形的判定 ASA，能作出唯一三角形；

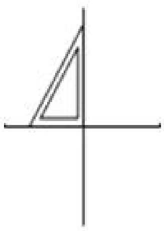
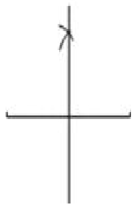
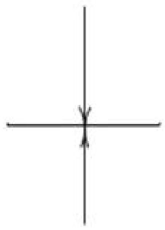
D、符合全等三角形的判定 SSS，能作出唯一三角形；

故选：B．

【点睛】

本题主要考查了由已知条件作三角形，可以依据全等三角形的判定来做．

例 3．用直尺和圆规作线段的垂直平分线，下列作法正确的是（　　）

A． 　B． 　C． 　D． 

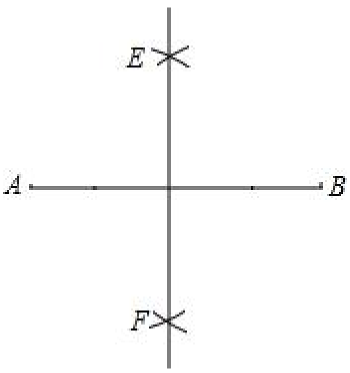
【答案】C

【解析】

利用尺规作图画出 AB 的垂直平分线，即可据此作出选择．

以 AB 为圆心，大于$\frac{1}{2}$AB 为半径作弧相交于 E、F，

过 EF 作直线即为 AB 的垂直平分线．

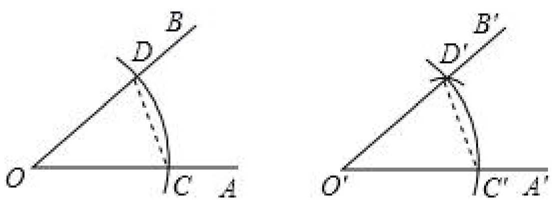


故选 C．

【点睛】

本题考查了作图--基本作图，熟悉垂直平分线的作法是解题的关键．

例 4．如图是用直尺和圆规作一个角等于已知角，那么能得出$\angle A'O'B' = \angle AOB$的依据是运用全等三角形判定（　）



A．边边边　　B．边角边　　C．角边角　　D．角角边

【答案】A

【解析】

由作图可知 OD=OD′=OC=OC′，CD=C′D′，根据 SSS 可证△ODC≌△O′D′C′，根据全等三角形的对应角相等即可得∠A′O′B′=∠AOB．可得答案.

由作图可知 OD=OD′=OC=OC′，CD=C′D′，

∴△ODC≌△O′D′C′（SSS），

∴∠A′O′B′=∠AOB，

故选 A.

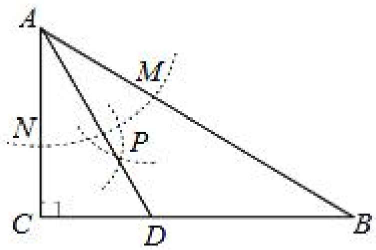
【点睛】

本题考查了全等三角形的性质和判定和有关角的作法，主要考查学生的观察能力和推理能力，全等三角形的判定定理有 SAS，ASA，AAS，SSS．

例 5．如图，在△*ABC* 中，∠*C*=90°，∠*B*=30°，以 *A* 为圆心，任意长为半径画弧分别交 *AB*、*AC* 于点 *M* 和 *N*，再分别以 *M*、*N* 为圆心，大于 $\frac{1}{2}$*MN* 的长为半径画弧，两弧交于点 *P*，连结 *AP* 并延长交 *BC* 于点 *D*，则下列说法中正确的个数是（　　）.

①作出 *AD* 的依据是 SAS；②∠*ADC*=60°

③点 *D* 在 *AB* 的中垂线上；④$S_{\triangle DAC}$：$S_{\triangle ABD}$=1：2．



A．1　　B．2　　C．3　　D．4

【答案】C

【解析】

①根据作图的过程可以判定作出 *AD* 的依据；

②利用角平分线的定义可以推知∠*CAD*=30°，则由直角三角形的性质来求∠*ADC* 的度数；

③利用等角对等边可以证得△*ADB* 的等腰三角形，由等腰三角形的“三合一”的性质可以证明点 *D* 在 *AB* 的中垂线上；

④利用 30 度角所对的直角边是斜边的一半、三角形的面积计算公式来求两个三角形的面积

之比．

解：①根据作图的过程可知，作出 AD 的依据是 SSS；

故①错误；

②如图，∵在△ABC 中，$\angle C=90°$，$\angle B=30°$，

∴$\angle CAB=60°$．

又∵AD 是$\angle BAC$ 的平分线，

∴$\angle 1=\angle 2=\frac{1}{2}\angle CAB=30°$，

∴$\angle 3=90°-\angle 2=60°$，即$\angle ADC=60°$．

故②正确；

③∵$\angle 1=\angle B=30°$，

∴$AD=BD$，

∴点 D 在 AB 的中垂线上．

故③正确；

④∵如图，在直角△ACD 中，$\angle 2=30°$，

∴$AD=2CD$，

∴$BD=2CD$，

∵$S_{\triangle DAC}=\frac{1}{2}AC\bullet CD$，$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AC\bullet BD$，

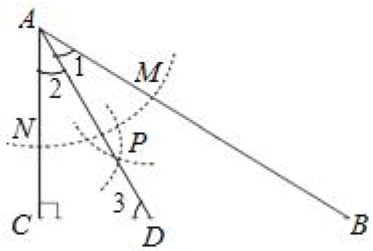
∴$S_{\triangle DAC}$：$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AC\bullet CD$：$\frac{1}{2}AC\bullet BD=CD$：$BD=1$：2，

即 $S_{\triangle DAC}$：$S_{\triangle ABD}=1$：2．

故④正确．

综上所述，正确的结论是：②③④，共有 3 个．

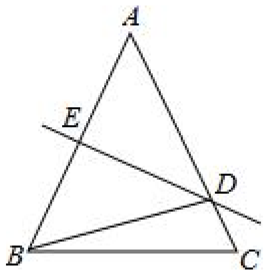
故选 C．



【点睛】

此题主要考查的是作图-基本作图，涉及到角平分线的作法以及垂直平分线的性质，熟练根据角平分线的性质得出$\angle ADC$度数是解题关键．

例 6．如图，$\triangle ABC$中，$AB=AC$，DE是线段AB的垂直平分线，如果$BD+CD=2020$，那么AB的长度是（　　）



A．1010　　B．2019　　C．2020　　D．2021

【答案】C

【解析】

根据DE是线段AB的垂直平分线，得到 BD=AD,便可求解．

解：DE是线段AB的垂直平分线

∴BD=AD

∵$BD+CD=2020$

∴AD+CD=2020　即 AC=2020

∵AB=AC

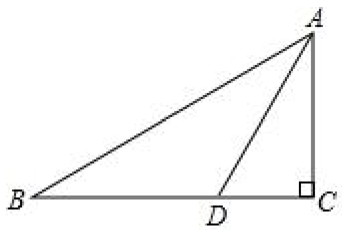
∴AB=2020

故选 C．

【点睛】

本题考查等腰三角形性质，以及线段垂直平分线性质，属于基础题．

例 7．如图，在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$AB=10$，AD是$\triangle ABC$的一条角平分线．若$CD=3$，则$\triangle ABD$的面积为（　　）



A．15　　　　B．30　　　　C．12　　　　D．10

【答案】A

【解析】

根据角平分线的性质可得 DE=DC，然后用三角形面积公式算出结果即可．

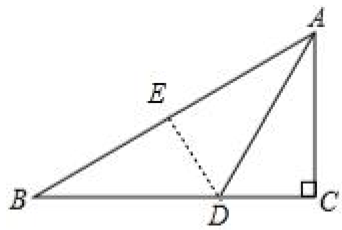
过 D 点作 $DE \perp AB$ 于 E，如图，

∵AD 平分∠BAC，$DE \perp AB$，$DC \perp AC$，

∴$DE=DC=3$，

∴$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\times 10\times 3=15$．

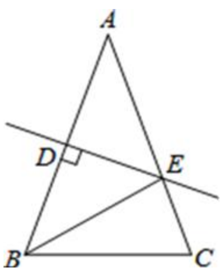
故选：A．



【点睛】

本题考查角平分线性质，正确作出辅助线是解题的关键．

例 8．如图，在△ABC 中，$AB=AC$，$AB=6$，$BC=3$，AB 的垂直平分线交 AB 于点 D，交 AC 于点 E，连接 BE，则△CBE 的周长为（　　）



A．12　　　　B．6　　　　C．9　　　　D．15

【答案】C

【解析】

根据线段的垂直平分线的性质可得 $EA=EB$，利用线段得和差关系计算即可得答案．

∵AB 的垂直平分线交 AB 于点 D，交 AC 于点 E，

∴$EA=EB$，

∵$AB=AC$，$AB=6$，$BC=3$，

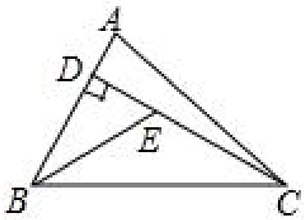
∴△CBE 的周长$=BC+EB+CE=BC+EA+CE=BC+AC=6+3=9$，

故选：C．

【点睛】

本题考查的是线段的垂直平分线的性质，线段的垂直平分线上的点到线段的两个端点的距离相等．

例 9．如图，在$\triangle ABC$中，CD是AB边上的高，BE平分$\angle ABC$，交CD于点E，$BC=4$，$DE=1$，则$\triangle BCE$的面积等于（　　）



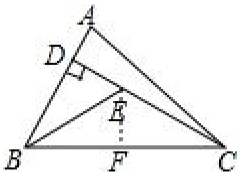
A．1　　　　B．2　　　　C．3　　　　D．4

【答案】B

【解析】

过 E 作 EF⊥BC 于 F，根据角平分线性质求出 EF=DE=8，根据三角形面积公式求出即可．

解：过 E 作 EF⊥BC 于 F，



∵CD 是 AB 边上的高，BE 平分∠ABC，交 CD 于点 E，DE=1，

∴DE=EF=1，

∵BC=4，

∴ $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times BC\times EF=\dfrac{1}{2}\times 4\times 1=2$

故选:B

【点睛】

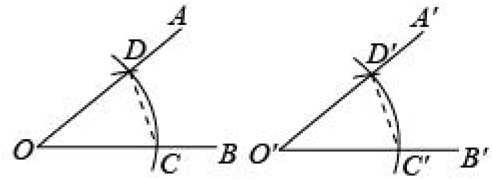
本题考查了角平分线性质的应用，能根据角平分线性质求出 EF=DE=8 是解此题的关键，注意：在角的内部，角平分线上的点到角的两边的距离相等．

跟踪训练

一、单选题

1．在复习用尺规作一个角等于已知角的过程中，回顾了作图的过程，他发现

$\triangle O'C'D' \cong \triangle OCD$，小华得到全等的依据是（　　）



A．SSS　　B．SAS　　C．ASA　　D．AAS

【答案】A

【分析】由作法易得 $OD = O'D'$，$OC = O'C$，$CD = C'D'$，由SSS的判定定理可以得到三角形全等，从而求解．

【解析】解：在 $\triangle OCD$ 与 $\triangle O'C'D'$ 中，

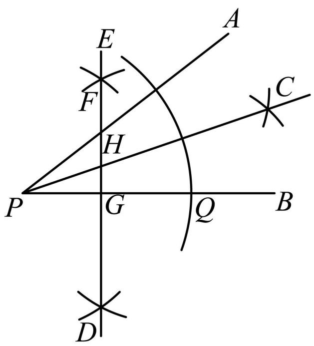
$$\begin{cases} OD = O'D' \\ OC = O'C \\ CD = C'D' \end{cases},$$

$\therefore \triangle COD \cong \triangle C'O'D'(\text{SSS})$．

故选：A．

【点睛】本题考查作图-复杂作图，全等三角形的判定和性质等知识，解题的关键是理解题意，灵活运用所学知识解决问题．

2．如图，由作图痕迹做出如下判断，其中正确的是（　　）



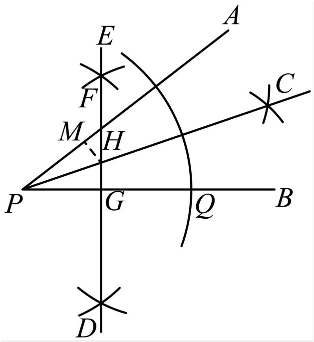
A．$FH > HG$　　B．$FH = HG$　　C．$FH < HG$　　D．$PF < PG$

【答案】A

【分析】由作图痕迹得 PC 平分 $\angle APB$，EF 垂直平分 PQ，根据角的平分线的性质，作 $HM \perp PA$，依据垂线段最短，可得结论；

【解析】解：由作图痕迹得 PC 平分 $\angle APB$，EF 垂直平分 PQ，

过 H 点作 $HM \perp PA$ 于 M 点，如图，



$\therefore HM = HG$，

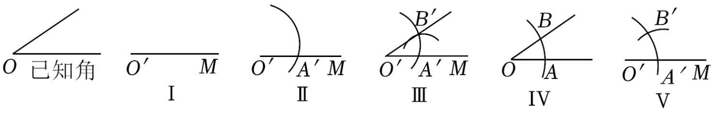
$\because HF > HM$ ，

$\therefore HF > HG$，

故选： A．

【点睛】本题考查角的平分线作图和线段的垂直平分线的作图，解题关键判断出角的平分线、线段的垂直平分线．

3．如图，在用尺规作一个角等于已知角时，小明进行了以下 5 个步骤，将这 5 个步骤按正确的顺序排列为（　　）



A．Ⅰ－Ⅱ－Ⅴ－Ⅲ－Ⅳ　　　　B．Ⅰ－Ⅱ－Ⅲ－Ⅴ－Ⅳ

C．Ⅳ－Ⅰ－Ⅴ－Ⅱ－Ⅲ　　　　D．Ⅰ－Ⅳ－Ⅱ－Ⅴ－Ⅲ

【答案】D

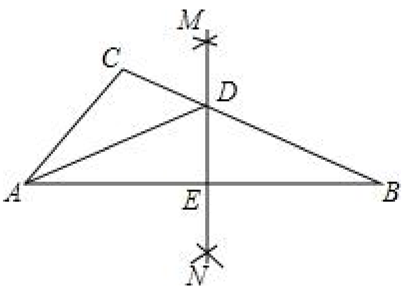
【分析】根据用尺规作一个角等于已知角的作图步骤即可进行判断．

【解析】解：根据用尺规作一个角等于已知角的作图步骤可知正确的是：Ⅰ－Ⅳ－Ⅱ－Ⅴ－Ⅲ．

故选：D

【点睛】此题考查了基本作图，熟练掌握尺规作一个角等于已知角的作法是解题的关键．

4．如图，在 $\triangle ABC$ 中，分别以点 A 和点 B 为圆心，大于 $\frac{1}{2}AB$ 长为半径画弧，两弧相交于点 M 、N，连接 MN，交 BC 于点 D，交 AB 于点 E，连接 AD．若 $\triangle ABC$ 的周长等于17，$\triangle ADC$ 的周长为9，那么线段 AE 的长等于（　）



A． 3　　　　B． 3.5　　　　C． 4　　　　D． 8

【答案】C

【分析】根据作图过程可得MN是AB的垂直平分线，进而可得$AD=BD$，$AE=\frac{1}{2}AB$，再由$\triangle ABC$的周长等于17，$\triangle ADC$的周长为9，可得$AC+AD+CD=9$，$AC+CD+BD+AB=17$，两式相减可得答案.

【解析】解：根据题意可得MN是AB的垂直平分线，

$\because \triangle ADC$的周长为9，

$\therefore AC+AD+CD=9$，

$\because \triangle ABC$的周长等于17，

$\therefore AC+CD+BD+AB=17$，

$\because MN$是AB的垂直平分线，

$\therefore AD=BD$，$AE=\frac{1}{2}AB$，

$\therefore AC+CD+AD+AB=17$，

$\therefore AB=17-9=8$，

$\therefore AE=4$.

故选：C.

【点睛】此题主要考查了作线段的垂直平分线，以及线段垂直平分线的性质，关键是掌握线段垂直平分线的性质.

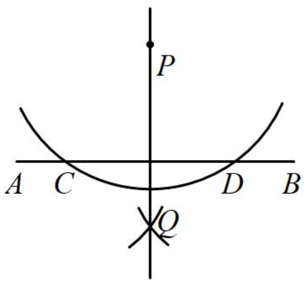
5．如图，已知直线AB及AB外一点P．求作：经过点P，且垂直AB的直线．作法如下：

①以点P为圆心，以a为半径画弧，交直线AB于点C,D；

②分别以点C,D为圆心，以b为半径在直线AB的下方画弧，两弧交于点Q；

③过点P,Q作直线，直线PQ即为所求.

下列正确的是（　　）



A．a,b均无限制　　　　B．$a>0,b>\frac{1}{2}CD$的长

C．a有最小限制，b无限制　　　　D．a大于点P到AB的距离，$b>\frac{1}{2}CD$的长

【答案】D

【分析】利用过直线外一点作已知直线的垂线这个基本作图方法进行判断.

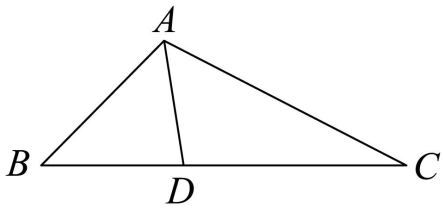
【解析】解：①中 a 指大于点 P 到直线 AB 的距离；

②中 b 指大于 $\frac{1}{2}CD$ 的长．

故选：D．

【点睛】本题考查了尺规作图，熟练掌握基本作图的方法是解题的关键．

6．如图，$\triangle ABC$ 中，AB=5，AC=7，BC=10．$\angle BAC$ 的平分线 AD 交 BC 于点 D．则 DC 的长度为 （　）

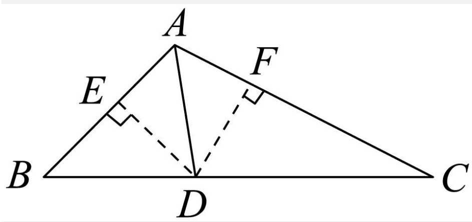


A．$\frac{35}{6}$　　　　B．6　　　　C．$2\sqrt{10}$　　　　D．$\sqrt{35}$

【答案】A

【分析】作 $DE\perp AB$ 于 E，$DF\perp AC$ 于 F，由角平分线性质得 DE=DF，则△ABD 与△ACD 分别以 AB、AC 为底时高相等，则△ABD 与△ACD 的面积比=AB：AC=5：7；同时△ABD 与△ACD 分别以 BD、DC 为底时高也相等，则△ABD 与△ACD 的面积比=BD：DC=5：7；求解即可．

【解析】作 $DE\perp AB$ 于 E，$DF\perp AC$ 于 F，



∵ AD 是$\angle BAC$ 的平分线，

∴DE=DF，

∵　AB=5，AC=7，

$$\therefore \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot AB\cdot DE}{\frac{1}{2}\cdot AC\cdot DF}=\frac{AB}{AC}=\frac{5}{7}=\frac{\frac{1}{2}\cdot BD\cdot h}{\frac{1}{2}\cdot CD\cdot h}=\frac{BD}{CD},$$

∵　BC=10，

$$\therefore CD=\frac{7}{12}BC=\frac{7}{12}\times 10=\frac{35}{6},$$

故选：A．

【点睛】本题考查了角平分线的性质定理及三角形的面积，熟练掌握知识点并能够准确作出辅助线是解题的关键．

7．根据下列已知条件，能画出唯一的 $\triangle ABC$ 的是（ ）

A． $AB=3\text{cm}$， $BC=7\text{cm}$， $AC=4\text{cm}$　　B． $AB=3\text{cm}$， $BC=7\text{cm}$， $\angle C=40°$

C． $\angle A=30°$， $AB=3\text{cm}$， $\angle B=100°$　　D． $\angle A=30°$， $\angle B=100°$， $\angle C=50°$

【答案】C

【分析】根据两个三角形全等的三个判定定理逐项判断即可完成．

【解析】A、此三条线段不能围成一个三角形，故不能画出；

B、已知两边的长和其中 AB 边的对角，根据全等三角形的判定方法是不能画出三角形；

C、已知两个角和这两个角的夹边，根据 ASA 判定定理可以画出三角形；

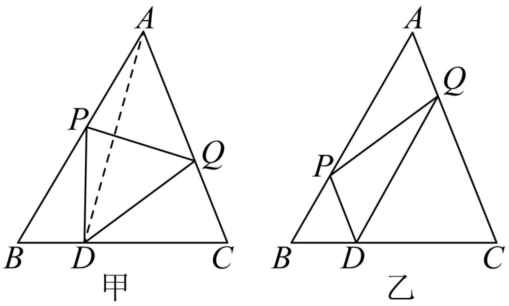
D、已知三个角，根据两个三角形全等的判定方法，可心画出这个三角形，但画出的这样的三角形有无数个，故不合题意；

故唯一可以画出三角形的只有选项 C 符合题意；

故选：C．

【点睛】本题考查了全等三角形的判定定理，掌握三个判定定理是关键．

8．如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB>AC>BC$，点 D 为 BC 上一点．甲、乙两人按图中的作法，都得到了 $\triangle APQ$、$\triangle DPQ$ 全等．下列判断错误的是（　　）



A．甲通过作 AD 的垂直平分线得到点 P、Q　B．乙通过过点 D 作 AC、AB 的平行线得到点 P、Q

C．甲证明全等的依据是 SSS　　D．乙证明全等的依据是 SAS

【答案】D

【分析】根据线段的垂直平分线的性质得到 $PA=PD$， $QA=QD$，则根据“SSS”可判断 $\triangle APQ\cong\triangle DPQ$，根据平行线的性质得到 $\angle AQP=\angle DPQ$， $\angle APQ=\angle DQP$，在根据“ASA”得到 $\triangle APQ\cong\triangle DQP$．

【解析】解：由图可知，甲通过作 AD 的垂直平分线得到点 P、Q，则 $PA=PD$， $QA=QD$，

又∵ $PQ=PQ$，

∴ $\triangle APQ\cong\triangle DPQ(SSS)$．

故 A、C 正确；

由图可知，乙通过过点 D 作 AC、AB 的平行线得到点 P、Q，

∵ $PD\parallel AQ$， $DQ\parallel AP$，

$\therefore \angle AQP=\angle DPQ$， $\angle APQ=\angle DQP$，

又$\because PQ=PQ$

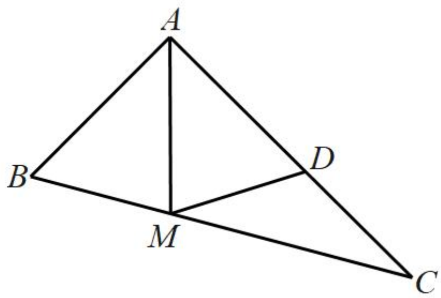
$\therefore \triangle APQ \cong \triangle DQP(ASA)$．

故 B 正确，D 错误．

故答案选 D．

【点睛】本题考查了线段的垂直平分线的性质、平行线的性质、全等三角形的判定等知识，其中掌握基本的作图方法，并能理解作图所使用的原理是解决本题的关键．

9．如图，在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=90°$，M是边BC上一点，将$\triangle ABC$沿AM折叠，点B恰好能与AC的中点D重合，若$AB=6$，则M点到AB的距离是（　）

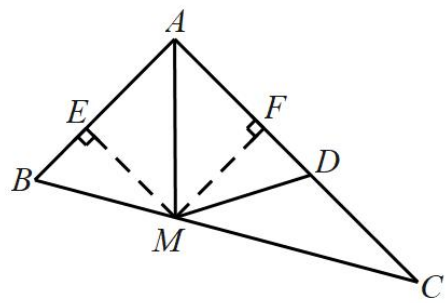


A．3　　　　B．4　　　　C．5　　　　D．6

【答案】B

【分析】根据翻折证明$\angle BAM=\angle DAM=45°$，利用角平分线性质求出$ME=MF$，再根据面积之和列式子即可求出答案.

【解析】解：过点M作$ME\perp AB$于E，过点M作$MF\perp AC$于F，



$\because$将$\triangle ABC$沿AM折叠，点B恰好能与AC的中点D重合，$\angle BAC=90°$，

$\therefore \angle BAM=\angle DAM=45°$， $AB=AD=CD=6$，

$\because ME\perp AB$， $MF\perp AC$，

$\therefore ME=MF$.

$\because S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABM}+S_{\triangle ACM}$，

$\therefore \dfrac{AB\cdot AC}{2}=\dfrac{AB\cdot ME}{2}+\dfrac{AC\cdot MF}{2}$，

$\therefore \frac{6\times(6+6)}{2}=\frac{6\cdot ME}{2}+\frac{(6+6)\cdot ME}{2}$

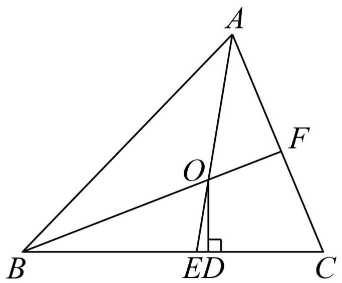
$\therefore 72=6ME+12ME$，

$\therefore ME=4$.

故选：B.

【点睛】本题考查了翻折的性质、角平分线性质.解题的关键在于是否能根据两个角相等作辅助线，熟练运用角平分线性质.

10．如图，在$\triangle ABC$中，$\angle BAC$和$\angle ABC$的平分线AE，BF相交于点O，AE交BC于E，BF交AC于F，过点O作$OD\perp BC$于D，下列四个结论：①$\angle AOB=90^\circ+\frac{1}{2}\angle C$；②当$\angle C=60^\circ$时，$AF+BE=AB$；③若$OD=a$，$AB+BC+CA=2b$，则$S_{\triangle ABC}=ab$；④$\angle ABF=\angle CAE$．其中正确的是（　　）



A．②③④　　　　B．①③

C．①②　　　　D．①②③

【答案】D

【分析】由角平分线的定义和三角形内角和定理可求解$\angle AOB$和$\angle C$的关系，进而判定①；根据$\angle C=60^\circ$得$\angle BAC+\angle BCA=120^\circ$，根据角平分线和三角形内角和定理得$\angle BOE=60^\circ$，在$AB$上取一点$H$，使$BH=BE$，利用SAS证明$\triangle HBO\cong\triangle EBO$可得$\angle AOH=\angle AOF=60^\circ$，利用ASA可证明$\triangle HAO\cong\triangle FAO$得$AF=AH$，进而可判定②；作$OH\perp AC$于$H$，$OM\perp AB$于$M$，根据题意得$OH=OM=OD=a$，根据$AB+BC+CA=2b$，利用三角形面积即可判断③，利用角平分线性质和已知条件即可判断④，进而得出结论.

【解析】解：∵$\angle BAC$和$\angle ABC$的平分线AE，BF相交于点O，

∴$\angle OBA=\frac{1}{2}\angle CBA$，$\angle OAB=\frac{1}{2}\angle CAB$，

∴$\angle AOB=180^\circ-\angle OBA-\angle OAB$

$=180^\circ-\frac{1}{2}\angle CBA-\frac{1}{2}\angle CAB$

$=180^\circ-\frac{1}{2}(180^\circ-\angle C)$

$=90^\circ+\frac{1}{2}\angle C$，

故①正确；

$\because \angle C=60^{\circ}$，

$\therefore \angle BAC+\angle CBA=120^{\circ}$，

$\because AE$，BF分别是$\angle BAC$和$\angle ABC$的平分线，

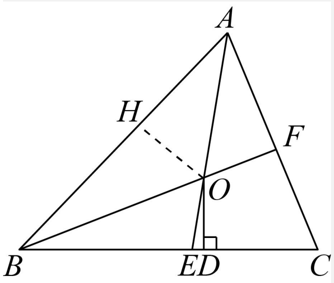
$\therefore \angle OAB+\angle OBA=\frac{1}{2}(\angle BAC+\angle ABC)=60^{\circ}$，

$\therefore \angle AOB=120^{\circ}$，

$\therefore \angle AOF=60^{\circ}$，

$\therefore \angle BOE=60^{\circ}$，

如图所示，在AB上取一点H，使$BH=BE$，



$\because BF$是$\angle ABC$的角平分线，

$\therefore \angle HBO=\angle EBO$，

在$\triangle HBO$和$\triangle EBO$中，

$$\begin{cases} BH=BE \\ \angle HBO=\angle EBO \\ BO=BO \end{cases},$$

$\therefore \triangle HBO\cong\triangle EBO(\mathrm{SAS})$，

$\therefore \angle BOH=\angle BOE=60^{\circ}$，

$\therefore \angle AOH=60^{\circ}$，

$\therefore \angle AOH=\angle AOF=60^{\circ}$，

在$\triangle HAO$和$\triangle FAO$中，

$$\begin{cases} \angle HAO=\angle FAO \\ AO=AO \\ \angle AOH=\angle AOF \end{cases},$$

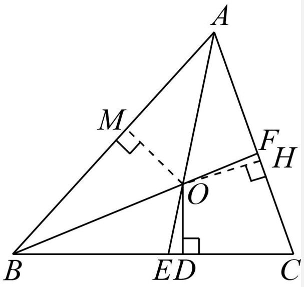
$\therefore \triangle HAO\cong\triangle FAO(\mathrm{ASA})$，

$\therefore AF=AH$，

$\therefore AB=BH+AH=BE+AF$，

故②正确；

如图所示，作$OH\perp AC$于H，$OM\perp AB$于M，



∵ $\angle BAC$ 和 $\angle ABC$ 的平分线相交于点 O，

∴点 O 在 $\angle C$ 的平分线上，

∴ $OH = OM = OD = a$，

∵ $AB + BC + CA = 2b$，

∴ $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot OM + \frac{1}{2}AC \cdot OH + \frac{1}{2}BC \cdot OD$

$= \frac{1}{2}\left(AB + AC + BC\right)a$

$= ab$，

故③正确；

∵ AE， BF 分别是 $\angle BAC$ 和 $\angle ABC$ 的平分线，

若 $\angle ABF = \angle CAE$，则 $\angle ABC = \angle BAC$，

而所给的条件中， $\triangle ABC$ 的三个内角都未知，

∴ $\angle ABF$ 不一定等于 $\angle CAE$，

故④错误；

综上，①②③正确，

故选：D．

【点睛】本题考查了三角形内角和定理，角平分线的性质，三角形全等的判定与性质，解题的关键是掌握这些知识点，添加辅助线．

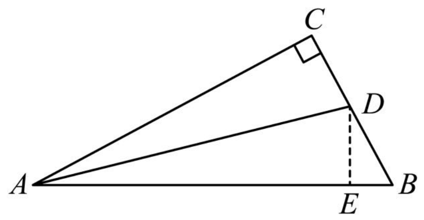
二、填空题

11．在△ABC 中，∠C=90°，AD 是△ABC 的角平分线，BC=6、AC=8、AB=10，则点 D 到 AB 的距离为________．

【答案】 $\frac{8}{3}/2\frac{2}{3}$

【分析】作 $DE \perp AB$ 于 E，如图，先根据勾股定理计算出 BC=8，再利用角平分线的性质得到 DE=DC，设 DE=DC=x，利用面积法得到 10x=6（8-x），然后解方程即可．

【解析】解：作 $DE \perp AB$ 于 E，如图，



∵AD 是△ABC 的一条角平分线，$DC \perp AC$，$DE \perp AB$，

∴$DE=DC$，

设 $DE=DC=x$，

$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}DE \cdot AB=\frac{1}{2}AC \cdot BD$，

即 $10x=8(6-x)$，解得 $x=\frac{8}{3}$，

即点 D 到 AB 边的距离为$\frac{8}{3}$.

故答案为：$\frac{8}{3}$.

【点睛】本题考查了角平分线的性质：角的平分线上的点到角的两边的距离相等，由已知能够注意到 D 到 AB 的距离即为 DE 长是解决的关键.

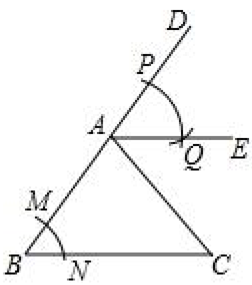
12．如图，∠CAD 为△ABC 的外角，按以下步骤作图：

①以点 B 为圆心，以适当长为半径画弧，交 BA 于点 M，交 BC 于点 N；

②以点 A 为圆心，以 BM 长为半径画弧，交 AD 于点 P；

③以点 P 为圆心，以 MN 长为半径画弧，交前一条弧于点 Q；

④经过点 Q 画射线 AE，若∠C＝50°，则∠EAC 的大小是_____度.



【答案】50

【分析】由作图可知：∠DAE＝∠B，推出 AE//BC，利用平行线的性质即可解决问题.

【解析】解：由作图可知：∠DAE＝∠B，

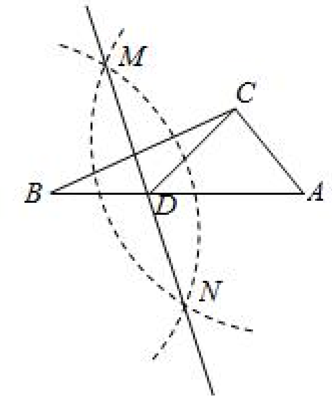
∴AE//BC，

∴∠EAC＝∠C＝50°，

故答案为：50.

【点睛】本题考查了平行线的判定和性质，掌握知识点是解题关键.

13．如图，在已知的ΔABC中，按以下步骤作图：①分别以B，C为圆心，以大于$\frac{1}{2}BC$的长为半径作弧，两弧相交于两点M,N；②作直线MN交AB于点D，连接CD．若$CD=AC$，则BD________AC（填“>”、“<”或“=”）．



【答案】=

【分析】根据作图步骤可判定 MN 为线段 BC 的垂直平分线，然后利用垂直平分线的性质和题中$CD=AC$的条件，即可确定线段 BD 与 AC 的大小.

【解析】由作图步骤①可得：直线 MN 是线段 BC 的垂直平分线，点 D 在 MN 上

∴BD=CD

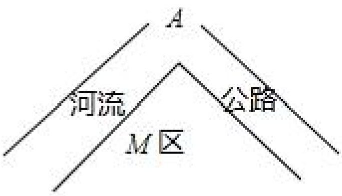
又∵CD=AC

∴BD=AC

故答案为：=

【点睛】本题考查的是线段的垂直平分线的性质定理，根据作图的过程判定直线 MN 是线段 BC 的中点是本题解题的关键.

14．如图，要在河流的右侧、公路的左侧M区建一个工厂，位置的选择要满足到河流和公路的距离相等，小红说工厂应该建在河流与公路夹角的平分线上，请你帮小红说出她的理由____.



【答案】角平分线上的点到角两边的距离相等

【分析】根据角平分线性质定理求解即可.

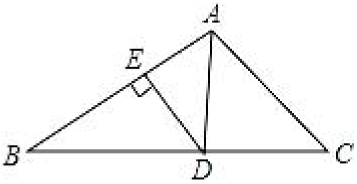
【解析】解：角平分线上的点到角两边的距离相等.

故答案为：角平分线上的点到角两边的距离相等.

【点睛】本题考查角平分线性质，掌握角平分线性质是解题关键.

15．如图，在△ABC中，AD平分∠BAC，DE⊥AB于点E，$S_{\triangle ABC}$=15，DE=3，AB=6，

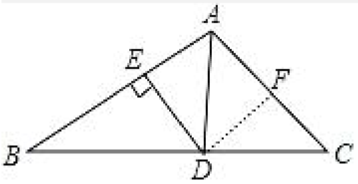
则 AC 长是___.



【答案】4

【分析】作 $DF \perp AC$ 于 F，先利用角平分线的性质得到 $DF=DE=3$，再根据 $S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}=S_{\triangle ABC}$ 即可得.

【解析】解：如图，作 $DF \perp AC$ 于 F，



$\because AD$ 平分 $\angle BAC$， $DE \perp AB, DF \perp AC, DE=3$，

$\therefore DF=DE=3$，

$\because S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}=S_{\triangle ABC}=15, AB=6$，

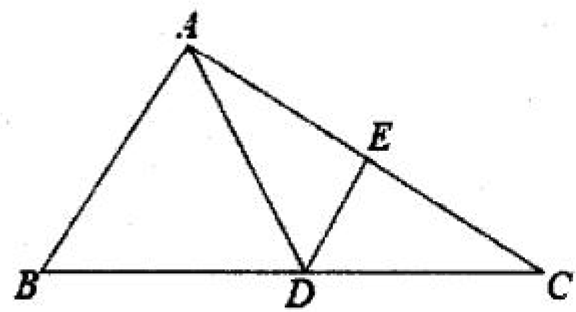
$\therefore \frac{1}{2}\times 6\times 3+\frac{1}{2}\times 3AC=15$，

解得 $AC=4$，

故答案为：4.

【点睛】本题考查了角平分线的性质定理，熟练掌握角平分线的性质定理是解题关键.

16．如图，在 ΔABC 中， DE 是 AC 的垂直平分线，分别交 BC， AC 于点 D， E，连接 AD，若 ΔABD 的周长 $C_{\Delta ABD}=16cm$， $AB=5cm$，则线段 BC 的长度等于___________cm.



【答案】11

【分析】根据线段垂直平分线性质求出 AD＝DC，得出△ABD 周长＝AB＋BC 即可.

【解析】解：∵DE 是 AC 的垂直平分线，

∴AD＝DC，

∴△ABD 的周长为 AB＋AD＋BD＝AB＋DC＋BD＝AB＋BC，

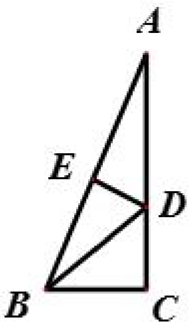
∵$C_{\triangle ABD}$＝16cm，AB＝5cm，

∴BC＝11cm，

故答案为 11.

【点睛】本题考查了线段垂直平分线性质的应用，关键是根据线段垂直平分线上的点到线段两个端点的距离相等解答.

17. 已知如图，在 Rt△ABC 中，∠C=90°，DE 是 AB 的垂直平分线，其中∠ABD：∠DBC=2:5，那么∠A=________



【答案】20°.

【分析】由 DE 是 AB 的垂直平分线，利用线段的垂直平分线的性质得∠A=∠ABD，结合∠ABD：∠DBC=2:5，与直角三角形两锐角互余，可以得到答案.

【解析】解：在 Rt△ABC 中

∵DE 是 AB 的垂直平分线

∴AD=BD

∴∠A=∠ABD，

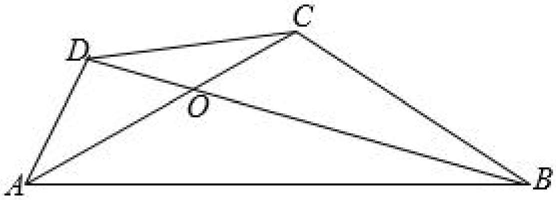
∵∠ABD：∠DBC=2:5，∠A+∠ABC=90°，

∴$\angle A=90°\times\frac{2}{2+2+5}=20°$

故答案为 20°.

【点睛】此题主要考查线段的垂直平分线的性质等几何知识．线段的垂直平分线上的点到线段的两个端点的距离相等．由已知条件得出$\angle A=90°\times\frac{2}{2+2+5}$是正确解答本题的关键.

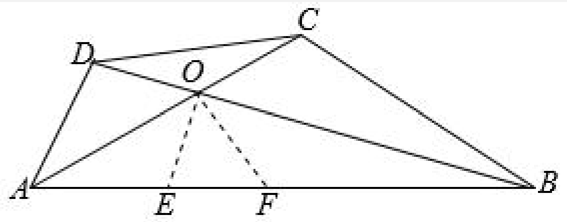
18．如图，四边形 $ABCD$ 中，$\angle DAB+\angle ABC=90°$，对角线 AC、BD 相交于 O 点，且分别平分∠DAB 和∠ABC，若 $BO=4OD$，则$\frac{AO}{OC}$的值为_____



【答案】$\frac{5}{3}$

【分析】在 AB 上截取 $AE=AD$，$BF=BC$，连接 OE、OF，根据 AC 平分$\angle BAD$，BD 平分$\angle ABC$，可得$\triangle AOD\cong\triangle AOE$，$\triangle BOC\cong\triangle BOF$，从而得到$\angle AOD=\angle AOE$，$\angle BOC=\angle BOF$，$OD=OE$，$OC=OF$，进而得到$\angle AOE=\angle BOF=45°$，$\angle AOB=135°$，$OF$ 平分$\angle BOE$，然后设$\triangle AOD$ 的 OD 边的高为h_1 ，AD 边的高为h_2 ，设$\triangle AOB$ 的 BO 边的高为h_3 ，AB 边的高为h_4 ，则 $S_{\triangle AOD}=\frac{1}{2}OD\times h_1=\frac{1}{2}AD\times h_2$ ，$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}OB\times h_3=\frac{1}{2}AB\times h_4$，根据角平分线的性质，可得 $h_2=h_4$ ，从而得到$\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle AOB}}=\frac{AD}{AB}=\frac{OD}{OB}=\frac{1}{4}$，同理$\frac{AO}{OC}=\frac{AB}{BC}$ ，再由 OF 平分$\angle BOE$，同理 $\frac{EF}{BF}=\frac{OE}{OB}=\frac{OD}{OB}=\frac{1}{4}$ ，即可求解.

【解析】解：如图，在 AB 上截取 $AE=AD$，$BF=BC$，连接 OE、OF，



∵AC 平分$\angle BAD$，BD 平分$\angle ABC$，

∴$\angle BAC=\angle DAC=\frac{1}{2}\angle BAD$ ，$\angle ABD=\angle DBC=\frac{1}{2}\angle ABC$，

∵$AE=AD$，$BF=BC$，$AO=AO$，$BO=BO$，

∴$\triangle AOD\cong\triangle AOE$，$\triangle BOC\cong\triangle BOF$，

∴$\angle AOD=\angle AOE$，$\angle BOC=\angle BOF$，$OD=OE$，$OC=OF$，

∵$\angle DAB+\angle ABC=90°$，

∴$\angle OAE+\angle OBF=45°$，

∴$\angle AOD=\angle BOC=45°$，

∴$\angle AOE=\angle BOF=45°$，$\angle AOB=135°$，

∴$\angle BOE=90°$，

∴$\angle EOF=\angle BOF=45°$，即 OF 平分$\angle BOE$，

设$\triangle AOD$ 的 OD 边的高为h_1 ，AD 边的高为h_2 ，设$\triangle ABD$ 的 BO 边的高为h_3 ，AB 边的高为h_4 ，则$h_1=h_3$，$S_{\triangle AOD}=\frac{1}{2}OD\times h_1=\frac{1}{2}AD\times h_2$ ，$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}OB\times h_3=\frac{1}{2}AB\times h_4$，

∵AC 平分$\angle BAD$，

∴$h_2=h_4$ ，

∵$BO=4OD$，

∴$\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle AOB}}=\frac{AD}{AB}=\frac{OD}{OB}=\frac{1}{4}$ ，