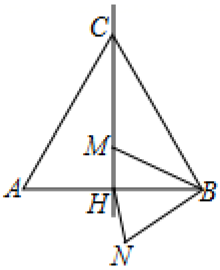
（培优特训）

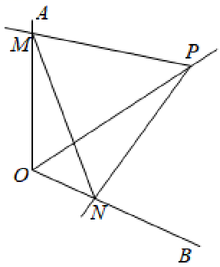
专项 9.4　旋转常考综合运用

1．（2020 秋•乌兰察布期末）如图，边长为 24 的等边三角形 ABC 中，M 是高 CH 所在直线上的一个动点，连接 MB，将线段 BM 绕点 B 逆时针旋转 60°得到 BN，连接 HN．则在点 M 运动过程中，线段 HN 长度的最小值是（　　）



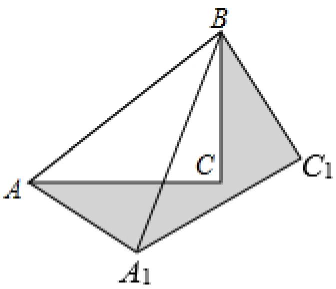
A．12　　B．6　　C．3　　D．1

2．（2021 春•罗湖区校级期末）如图，点 P 为定角∠AOB 平分线上的一个定点，且∠MPN 与∠AOB 互补．若∠MPN 在绕点 P 旋转的过程中，其两边分别与 OA、OB 相交于 M、N 两点，则以下结论：①$PM=PN$；②$OM+ON$ 的值不变；③MN 的长不变；④四边形 $PMON$ 的面积不变，其中，正确结论的是（　　）



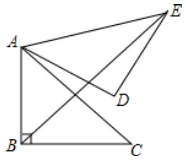
A．①②③　　B．①②④　　C．①③④　　D．②③④

3．（2022 春•高州市期末）如图，在△ABC 中，$AB=8$，将△ABC 绕点 B 按逆时针方向旋转 30°后得到△A_1BC_1，则阴影部分面积为 ____．

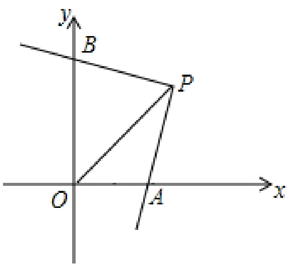


4．（2022 秋•福州期末）如图，在 Rt△ABC 中，∠$ABC=90°$，$AB=BC=2\sqrt{2}$

，将△ABC 绕点 A 逆时针旋转 60°，得到△ADE，连接 BE，则 BE 的长是 ____.

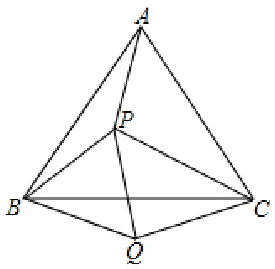


5.（2021 秋•驿城区期末）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，三角板的直角顶点 P 的坐标为（2，2），一条直角边与 x 轴的正半轴交于点 A，另一直角边与 y 轴交于点 B，三角板绕点 P 在坐标平面内转动的过程中，当△POA 为等腰三角形时，则点 B 的坐标是 ____________________.

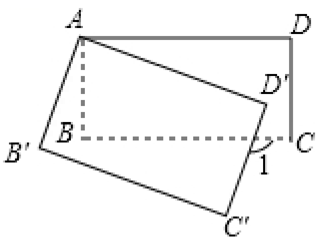


6.（2021 秋•肇源县期末）如图，P 是等边三角形 ABC 内的一点，且 $PA=3$，$PB=4$，$PC=5$，以 BC 为边在△ABC 外作△BQC≌△BPA，连接 PQ，则以下结论中正确有_______（填序号）

①△BPQ 是等边三角形②△PCQ 是直角三角形③∠APB=150°　④∠APC=120°

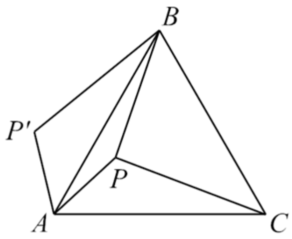


7.（2021 秋•信丰县期末）如图，将矩形 $ABCD$ 绕点 A 顺时针旋转到 $AB'C'D'$ 的位置，旋转角为 α（0°＜α＜90°）．若∠1=120°，则∠α=____.

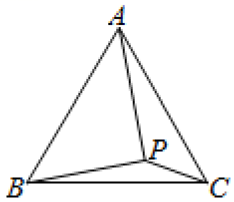


8．（2020 秋•赣榆区期末）如图，点 P 是等边△ABC 内的一点，PA＝6，PB＝8，

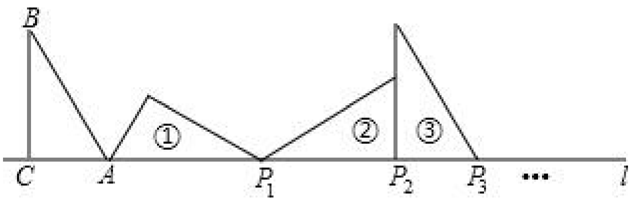
$PC=10$．若点 P' 是△ABC 外的一点，且△$P'AB$≌△PAC，则∠APB 的度数为 ______．



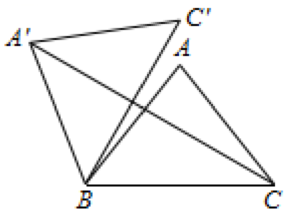
9．（2021•江西模拟）如图，P 是等边△ABC 内一点，$PA=4$，$PB=2\sqrt{3}$，$PC=2$，则△ABC 的边长为______．



10．（2021•镇雄县一模）如图，Rt△ABC 中，∠$ACB=90°$，∠$B=30°$，$AC=1$，且 AC 在直线 l 上，将△ABC 绕点 A 顺时针旋转到①，可得到点 P_1，此时 $AP_1=2$；将位置①的三角形绕点 $P1$ 顺时针旋转到位置②，可得到点 P_2，此时 $AP_2=2+\sqrt{3}$；将位置②的三角形绕点 $P2$ 顺时针旋转到位置③，可得到点 P_3，此时 $AP_3=3+\sqrt{3}$；…按此规律继续旋转，直到点 P_{2020} 为止，则 AP_{2020} 等于_________．



11．（2020•江都区三模）如图，在△ABC 中，$AB=AC=5$，$BC=6$，将△ABC 绕点 B 逆时针旋转 $60°$ 得到△$A'BC'$，连接 $A'C$，则 $A'C$ 的长为______．

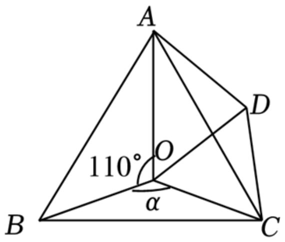


12．（2022秋•恩施市期末）如图，点 O 是等边△ABC 内一点，∠AOB＝110°，∠BOC＝α，将 CO 绕点 C 顺时针方向旋转60°得到 CD，连接 AD，OD．

（1）当 α＝150°时，求证：△AOD 为直角三角形；

（2）求∠DAO 的度数；

（3）请你探究：当 α 为多少度时，△AOD 是等腰三角形？



13．（2022秋•青山湖区期末）如图，△ABC 和△AMN 均为等边三角形，将△AMN 绕点 A 旋转（△AMN 在直线 AC 的右侧）．

（1）求证：△BAM≌△CAN；

（2）若点 C，M，N 在同一条直线上，

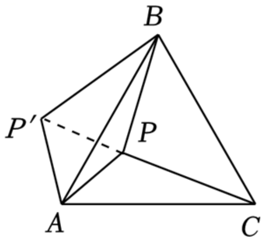
①求∠BMC 的度数；

②点 M 是 CN 的中点，求证：BM⊥AC．

14．（2022•三穗县校级模拟）如图，P 是等边△ABC 内的一点，且 PA＝3，PB＝4，PC＝5，若将△PAC 绕点 A 逆时针旋转后，得到△$P'AB$，

（1）求点 P 与 P'之间的距离；

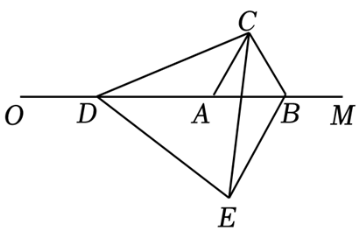
（2）求∠APB 的度数．



15．（2021秋•平泉市期末）如图，△ABC是边长为4cm的等边三角形，边AB在射线OM上，且OA＝6cm，点D从O点出发，沿OM方向以1cm/s的速度运动，运动时间为t．当点D不与点A重合时，将△ACD绕点C逆时针方向旋转60°得到△BCE，连接DE．

（1）求证：△CDE是等边三角形．

（2）当△BCD为直角三角形时，求t的值．



16．（2022秋•思明区校级月考）如图，在锐角△ABC中，∠A＝60°，点D，E分别是边AB，AC上一动点，连接BE交直线CD于点F．

（1）如图1，若AB＞AC，且BD＝CE，∠BCD＝∠CBE，求∠CFE的度数；

（2）如图2，若AB＝AC，且BD＝AE，在平面内将线段AC绕点C

顺时针方向旋转 60° 得到线段 CM，连接 MF，点 N 是 MF 的中点，连接 CN．在点 D，E 运动过程中，猜想线段 BF，CF，CN 之间存在的数量关系，并证明你的猜想．

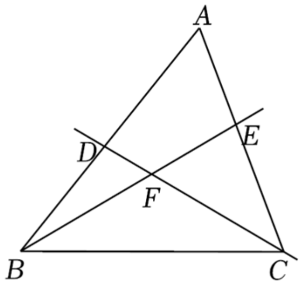


图1

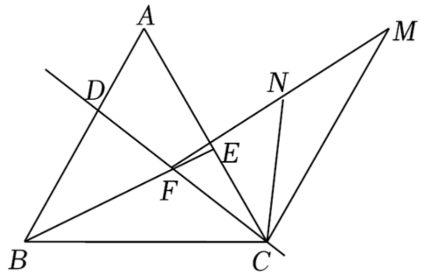
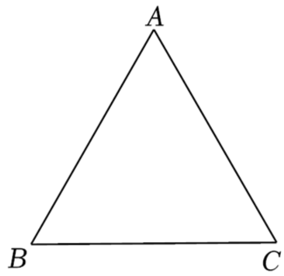


图2



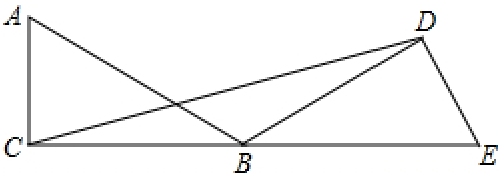
备用图

17．（2022 秋•竹山县期中）如图所示，把一个直角三角尺 ACB 绕着 30° 角的顶点 B 顺时针旋转，使得点 A 与 CB 的延长线上的点 E 重合．

（1）三角尺旋转了多少度？

（2）连接 CD，试判断△CBD 的形状．

（3）求∠BDC 的度数．



18．（2022•黄冈模拟）（1）如图 1，O 是等边△ABC 内一点，连接 OA、OB、OC，且 OA＝3，OB＝4，OC＝5，将△BAO 绕点 B 顺时针旋转后得到△BCD，连接 OD．

求：①旋转角的度数_______；

②线段 OD 的长______；

③求∠BDC 的度数．

（2）如图 2 所示，O 是等腰直角△ABC（∠ABC＝90°）内一点，连接 OA、OB、OC，将△BAO 绕点 B 顺时针旋转后得到△BCD，连接 OD．当 OA、OB、OC 满足什么条件时，∠ODC＝90°？请给出证明．

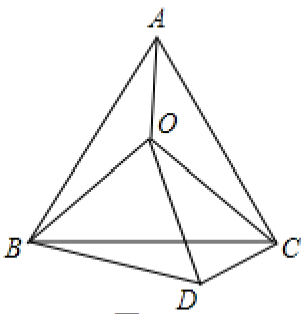


图1

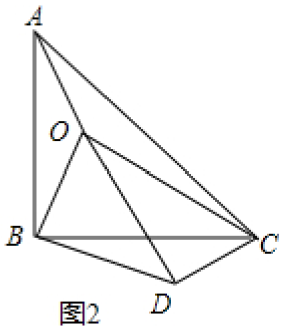


图2

19．（2022 春•兰州期中）（1）如图 1，△ABC 中，∠BAC＝90°，AB＝AC，D、E 在 BC 上，∠DAE＝45°，为了探究 BD、DE、CE 之间的等量关系，现将△AEC 绕 A 顺时针旋转 90°后成△AFB，连接 DF，经探究，你所得到的 BD、DE、CE 之间的等量关系式是 ________．（无需证明）

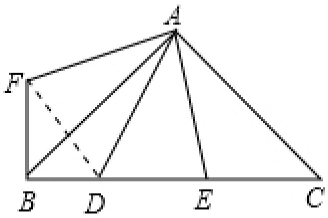


图1

（2）如图 2，在△ABC 中，∠BAC＝120°，AB＝AC，D、E 在 BC 上，∠DAE＝60°、∠ADE＝45°，试仿照（1）的方法，利用图形的旋转变换，探究 BD、DE、CE 之间的等量关系，并证明你的结论．

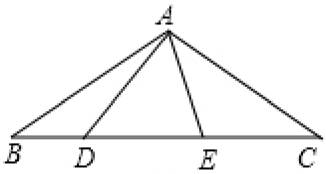
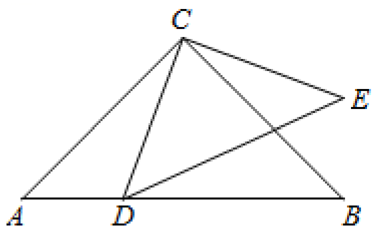


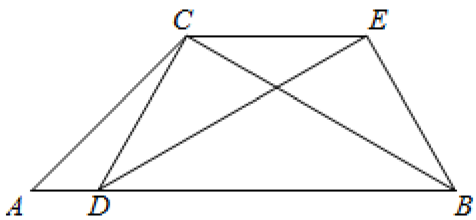
图2

20．（2021 春•江岸区校级月考）△ABC 中，∠A＝45°，∠CBA＝α，点 D 在边 AB 上，将线段 CD 逆时针旋转 β 得到 CE，连接 DE．

（1）当 α＝45°，β＝90°时，求证：$AD^2+DB^2=DE^2$．

（2）当 α＝30°，β＝120°时，若 CE＝BE，求$\frac{AD}{AB}$的值．



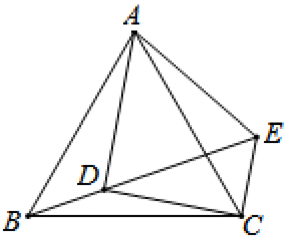


21．（2021•中江县模拟）如图，在等边△ABC 中，点 D 为△ABC 内的一点，∠ADB＝120°，∠ADC＝90°，将△ABD 绕点 A 逆时针旋转 60°得△ACE，连接 DE．

（1）求证：AD＝DE；

（2）求∠DCE 的度数；

（3）若 $BD=1$，求 AD，CD 的长．



22．（2020 秋•辉县市期中）如图（1），已知△ABC 中，$\angle BAC=90°$，$AB=AC$，AE 是过 A 的一条直线，且 B、C 在 A、E 的异侧，$BD\perp AE$ 于 D，$CE\perp AE$ 于 E

（1）试说明：$BD=DE+CE$．

（2）若直线 AE 绕 A 点旋转到图（2）位置时（$BD<CE$），其余条件不变，问 BD 与 DE、CE 的关系如何？请直接写出结果；

（3）若直线 AE 绕 A 点旋转到图（3）位置时（$BD>CE$），其余条件不变，问 BD 与 DE、CE 的关系如何？请直接写出结果，不需说明理由．

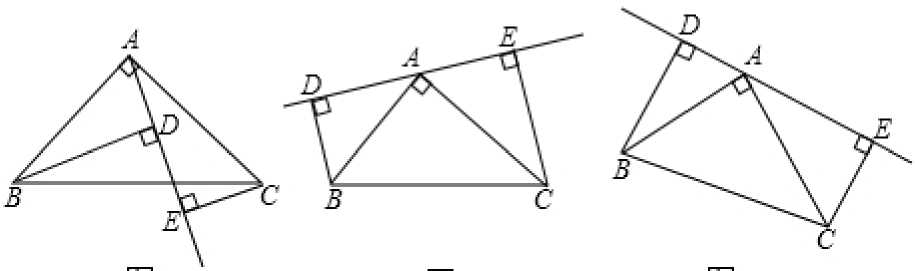
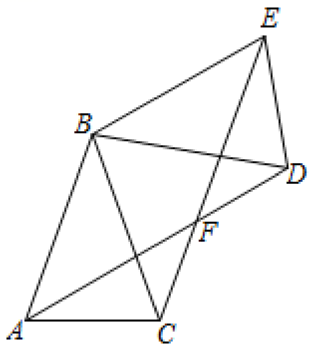


图1　　图2　　图3

23．（2022 秋•大冶市期末）如图，在△ABC 中，$BA=BC$，$\angle ABC=40°$，将△ABC 绕点 B 按逆时针方向旋转 $100°$，得到△DBE，连接 AD，CE 交于点 F．

（1）求证：△ABD≌△CBE；

（2）求∠AFC 的度数．

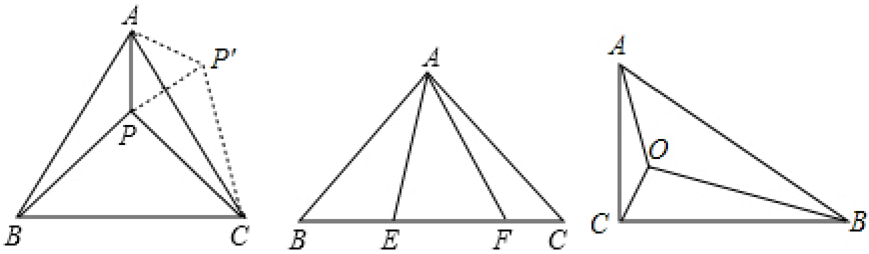


24.（2022秋•青山湖区期末）阅读下面材料，并解决问题：

（1）如图①等边△*ABC*内有一点*P*，若点*P*到顶点*A*、*B*、*C*的距离分别为3，4，5，求∠*APB*的度数.

为了解决本题，我们可以将△*ABP*绕顶点*A*旋转到△*ACP*′处，此时△*ACP*′≌△*ABP*，这样就可以利用旋转变换，将三条线段*PA*、*PB*、*PC*转化到一个三角形中，从而求出∠*APB*=________；

（2）基本运用



图①　　图②　　图③

请你利用第（1）题的解答思想方法，解答下面问题

已知如图②，△*ABC*中，∠*CAB*=90°，*AB*=*AC*，*E*、*F*为*BC*上的点且∠*EAF*=45°，求证：$EF^2=BE^2+FC^2$；

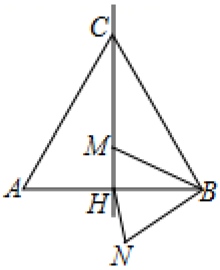
（3）能力提升

如图③，在Rt△*ABC*中，∠*C*=90°，*AC*=1，∠*ABC*=30°，点*O*为Rt△*ABC*内一点，连接*AO*，*BO*，*CO*，且∠*AOC*=∠*COB*=∠*BOA*=120°，求*OA*+*OB*+*OC*的值.

（培优特训）

专项 9.4　旋转常考综合运用

1．（2020 秋•乌兰察布期末）如图，边长为 24 的等边三角形 ABC 中，M 是高 CH 所在直线上的一个动点，连接 MB，将线段 BM 绕点 B 逆时针旋转 60° 得到 BN，连接 HN．则在点 M 运动过程中，线段 HN 长度的最小值是（　　）



A．12　　　B．6　　　C．3　　　D．1

【答案】B

【解答】解：如图，取 BC 的中点 G，连接 MG，

∵旋转角为 60°，

∴$\angle MBH+\angle HBN=60°$，

又∵$\angle MBH+\angle MBC=\angle ABC=60°$，

∴$\angle HBN=\angle GBM$，

∵CH 是等边△ABC 的对称轴，

∴$HB=\frac{1}{2}AB$，

∴$HB=BG$，

又∵MB 旋转到 BN，

∴$BM=BN$，

在△MBG 和△NBH 中，

$$\begin{cases} BG=BH \\ \angle MBG=\angle NBH, \\ MB=NB \end{cases}$$

∴△MBG≌△NBH（SAS），

∴$MG=NH$，

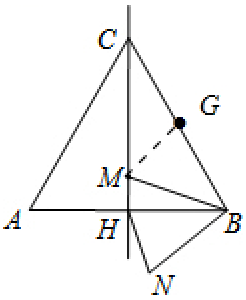
根据垂线段最短，当 $MG\perp CH$ 时，MG 最短，即 HN 最短，

此时 $\angle BCH=\frac{1}{2}\times60°=30°$，$CG=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times24=12$，

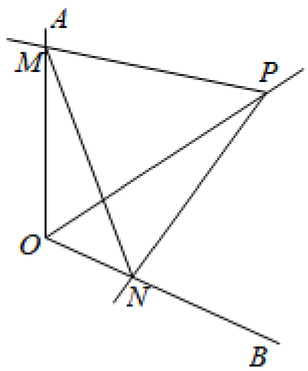
$\therefore MG=\frac{1}{2}CG=\frac{1}{2}\times 12=6$，

$\therefore HN=6$，

故选：B．



2．（2021 春•罗湖区校级期末）如图，点 P 为定角 $\angle AOB$ 平分线上的一个定点，且 $\angle MPN$ 与 $\angle AOB$ 互补．若 $\angle MPN$ 在绕点 P 旋转的过程中，其两边分别与 OA、OB 相交于 M、N 两点，则以下结论：①$PM=PN$；②$OM+ON$ 的值不变；③MN 的长不变；④四边形 $PMON$ 的面积不变，其中，正确结论的是（　　）



A．①②③　　B．①②④　　C．①③④　　D．②③④

【答案】B

【解答】解：如图作 $PE\perp OA$ 于 E，$PF\perp OB$ 于 F．

$\because \angle PEO=\angle PFO=90^\circ$，

$\therefore \angle EPF+\angle AOB=180^\circ$，

$\because \angle MPN+\angle AOB=180^\circ$，

$\therefore \angle EPF=\angle MPN$，

$\therefore \angle EPM=\angle FPN$，

$\because OP$ 平分 $\angle AOB$，$PE\perp OA$ 于 E，$PF\perp OB$ 于 F，

$\therefore \angle PEO=\angle PFO=90^\circ$，

在△*POE* 和△*POF* 中，

$$\begin{cases}\angle POE=\angle POF\\ \angle PEO=\angle PFO,\\ PO=PO\end{cases}$$

∴△*POE*≌△*POF*（*AAS*），

∴*OE*＝*OF*，*PE*＝*PF*，

在△*PEM* 和△*PFN* 中，

$$\begin{cases}\angle MPE=\angle NPF\\ PE=PF\quad ,\\ \angle PEM=\angle PFN\end{cases}$$

∴△*PEM*≌△*PFN*（*ASA*），

∴*EM*＝*NF*，*PM*＝*PN*，故①正确，

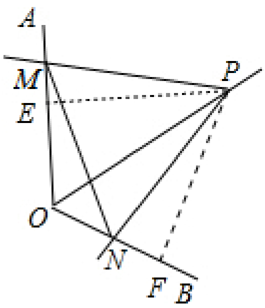
∴$S_{\triangle PEM}=S_{\triangle PNF}$，

∴$S_{\text{四边形}PMON}=S_{\text{四边形}PEOF}$＝定值，故④正确，

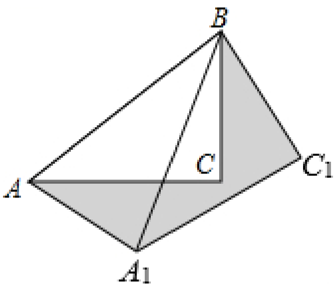
∵*OM*+*ON*＝*OE*+*ME*+（*OF*﹣*NF*）＝2*OE*，是定值，故②正确，

在旋转过程中，△*PMN* 是等腰三角形，形状是相似的，因为 *PM* 的长度是变化的，所以 *MN* 的长度是变化的，故③错误，

故选：*B*．

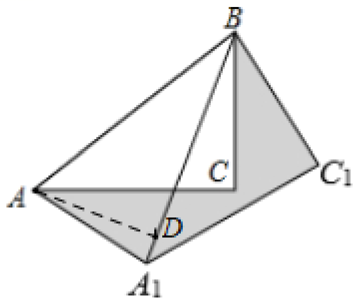


3．（2022 春•高州市期末）如图，在△*ABC* 中，*AB*＝8，将△*ABC* 绕点 *B* 按逆时针方向旋转 30°后得到△A_1BC_1，则阴影部分面积为 ____．



【答案】16

【解答】解：过 A 作 $AD\perp A_1B$ 于 D，如图：



在△ABC 中，$AB=8$，将△ABC 绕点 B 按逆时针方向旋转 30° 后得到△A_1BC_1，

∴△ABC≌△A_1BC_1，

∴$A_1B=AB=8$，

∴△A_1BA 是等腰三角形，$\angle A_1BA=30°$，

∵$AD\perp A_1B$，

∴$AD=\frac{1}{2}AB=4$，

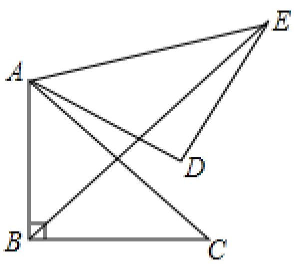
∴$S_{\triangle A1BA}=\frac{1}{2}\times8\times4=16$，

又∵$S_{阴影}=S_{\triangle A1BA}+S_{\triangle A1BC1}-S_{\triangle ABC}$，且 $S_{\triangle A1BC1}=S_{\triangle ABC}$，

∴$S_{阴影}=S_{\triangle A1BA}=16$，

故答案为：16．

4．（2022 秋•福州期末）如图，在 Rt△ABC 中，$\angle ABC=90°$，$AB=BC=2\sqrt{2}$，将△ABC 绕点 A 逆时针旋转 60°，得到△ADE，连接 BE，则 BE 的长是 ______．



【答案】$2+2\sqrt{3}$

【解答】解：连接 CE，设 BE 与 AC 相交于点 F，如下图所示，

∵Rt△ABC 中，$AB=BC$，$\angle ABC=90°$

∴$\angle BCA=\angle BAC=45°$

∵Rt△ABC 绕点 A 逆时针旋转 60° 与 Rt△ADE 重合，

∴∠BAC=∠DAE=45°，AC=AE

又∵旋转角为 60°

∴∠BAD=∠CAE=60°，

∴△ACE 是等边三角形

∴AC=CE=AE=4

在△ABE 与△CBE 中，

$$\begin{cases}BA=BC\\AE=CE\\BE=BE\end{cases}$$，

∴△ABE≌△CBE　（SSS）

∴∠ABE=∠CBE=45°，∠CEB=∠AEB=30°

∴在△ABF 中，∠BFA=180°﹣45°﹣45°=90°

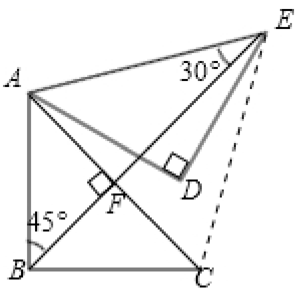
∴∠AFB=∠AFE=90°

在 Rt△ABF 中，由勾股定理得，$BF=AF=\sqrt{(\frac{AB}{2})^2}=2$

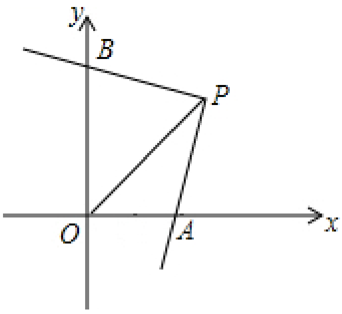
又在 Rt△AFE 中，∠AEF=30°，∠AFE=90°，可得 $FE=\sqrt{3}AF=2\sqrt{3}$

∴$BE=BF+FE=2+2\sqrt{3}$

故答案为 $2+2\sqrt{3}$

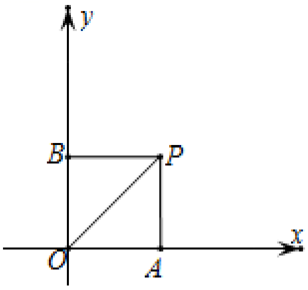


5.（2021 秋•驿城区期末）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，三角板的直角顶点 P 的坐标为（2，2），一条直角边与 x 轴的正半轴交于点 A，另一直角边与 y 轴交于点 B，三角板绕点 P 在坐标平面内转动的过程中，当△POA 为等腰三角形时，则点 B 的坐标是 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿.



【答案】（0，2）或（0，0）或（0，$4-2\sqrt{2}$）

【解答】解：①当 $OA=AP$ 时，如图：



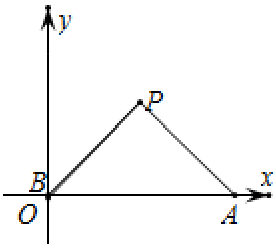
∵P 的坐标为（2，2），

∴此时 A（2，0），

∵$\angle APB=90°$，

∴B（0，2）；

②当 $AP=OP$ 时，如图：



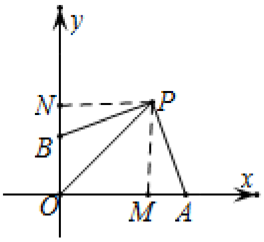
∵P 的坐标为（2，2），

∴$\angle POA=\angle PAO=45°$，

∴$\angle P=90°$，

∴此时 B 与 O 重合，即 B（0，0）；

③当 $OP=OA=2\sqrt{2}$时，过 P 作 $PM\perp x$ 轴于 M，作 $PN\perp y$ 轴于 N，如图：



∵$\angle APB=90^\circ$，

∴$\angle NPB=90^\circ-\angle BPM=\angle MPA$，

∵$NP=MP=2$，$\angle PNB=\angle PMA$，

∴$\triangle PNB\cong\triangle PMA$（$ASA$），

∴$BN=AM=2\sqrt{2}-2$，

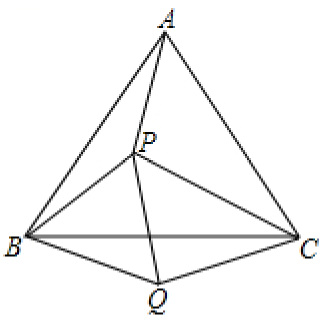
∴$OB=NO-BN=2-(2\sqrt{2}-2)=4-2\sqrt{2}$，

∴B（0，$4-2\sqrt{2}$），

综上所述，点 B 的坐标是（0，2）或（0，0）或（0，$4-2\sqrt{2}$）.

6．（2021 秋•肇源县期末）如图，P 是等边三角形 ABC 内的一点，且 $PA=3$，$PB=4$，$PC=5$，以 BC 为边在$\triangle ABC$ 外作$\triangle BQC\cong\triangle BPA$，连接 PQ，则以下结论中正确有_______（填序号）

①$\triangle BPQ$ 是等边三角形②$\triangle PCQ$ 是直角三角形③$\angle APB=150^\circ$ ④$\angle APC=120^\circ$



【答案】 ①②③

【解答】解：①∵$\triangle ABC$ 是等边三角形，

∴$\angle ABC=60^\circ$，

∵$\triangle BQC\cong\triangle BPA$，

∴$\angle CBQ=\angle ABP$，$PB=QB=4$，

$PA=QC=3$，$\angle BPA=\angle BQC$，

∴$\angle PBQ=\angle PBC+\angle CBQ=\angle PBC+\angle ABP=\angle ABC=60^\circ$，

∴△BPQ 是等边三角形，

所以①正确；

②$PQ=PB=4$，

$PQ^2+QC^2=4^2+3^2=25$，

$PC^2=5^2=25$，

∴$PQ^2+QC^2=PC^2$，

∴$\angle PQC=90°$，

∴△PCQ 是直角三角形，

所以②正确；

③∵△BPQ 是等边三角形，

∴$\angle PQB=\angle BPQ=60°$，

∴$\angle APB=\angle BQC=\angle BQP+\angle PQC=60°+90°=150°$，

所以③正确；

④$\angle APC=360°-150°-60°-\angle QPC=150°-\angle QPC$，

∵$\angle PQC=90°$，$PC\neq 2QC$，

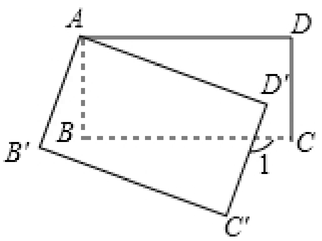
∴$\angle QPC\neq 30°$，

∴$\angle APC\neq 120°$．

所以④错误．

所以正确的有①②③．

7．（2021 秋•信丰县期末）如图，将矩形 $ABCD$ 绕点 A 顺时针旋转到 $AB'C'D'$ 的位置，旋转角为 α（$0°<\alpha<90°$）．若$\angle 1=120°$，则$\angle\alpha=$____．



【答案】30°

【解答】解：如图，由对顶角相等得，$\angle 2=\angle 1=120°$，

在四边形中，$\angle BAD'=360°-90°\times 2-\angle 2=360°-180°-120°=60°$，

所以，$\angle DAD'=90°-60°=30°$，